

Transformations-Formeln für rechtwinklige Raum- Coordinationen.

(Von Herrn *O. Hesse* zu Heidelberg.)

Das Problem der Transformation rechtwinkliger Raum-Coordinationen, rein analytisch gefasst, besteht bekanntlich darin:

„Die Substitutionen zu bestimmen von der Form:

$$(1.) \quad \begin{cases} X = ax + by + cz, \\ Y = a'x + b'y + c'z, \\ Z = a''x + b''y + c''z, \end{cases}$$

„welche folgende Gleichung zu einer identischen machen

$$(2.) \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Diese durch die Substitutionen (1.) identische Gleichung (2.) löset sich in folgende Bedingungsgleichungen zwischen den neun Substitutions-Coefficienten auf:

$$(3.) \quad \begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, & bc + b'c' + b''c'' = 0, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, & ca + c'a' + c''a'' = 0, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, & ab + a'b' + a''b'' = 0, \end{cases}$$

und das Problem verlangt die wirkliche Auflösung dieser sechs Gleichungen.

Da nämlich die neun Substitutions-Coefficienten diesen sechs Gleichungen zu genügen haben, so sieht man, dass man irgend drei von jenen Coefficienten als unabhängige Variable wählen kann, und dass alle neun Coefficienten als Functionen der drei Variablen bestimmt sind.

Monge stellt alle neun Substitutions-Coefficienten als Functionen der drei Variablen a, b', c'' dar *). *Euler* drückt sie durch drei andere Variablen aus, die von mehr praktischer Bedeutung sind **).

Die drei Variablen von *Monge* oder *Euler* in den Functionen, welche die neun Substitutions-Coefficienten ausdrücken, kann man mittelst Substitutionen ersetzen durch drei oder mehrere unabhängige Variable. Das Criterium für die neun Functionen bleiben die sechs Gleichungen (3.).

*) Mémoire de l'académie des sciences de Paris, année 1784, p. 114.

**) Introductio in analysin infinitorum, tom. II, p. 369.

Setzen wir für $\varphi(\lambda)$ nach einander:

$(\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_5)$, $(\lambda - \lambda_3)^2(\lambda - \lambda_5)(\lambda - \lambda_1)$, $(\lambda - \lambda_5)^2(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_3)$,
so geht die identische Gleichung (6.) über in drei identische Gleichungen, die wir auch erhalten, wenn wir in den drei letzten Gleichungen (3.) die Ausdrücke (5.) der Coefficienten setzen.

Die Ausdrücke (5.) der neun Substitutionscoefficienten sind in der That die Auflösungen der sechs Gleichungen (3.). Die sechs Variabeln λ in ihnen können nur die Wirkung von drei Variabeln ausüben, weil die neun Functionen (5.) den sechs Gleichungen (3.) genügen. Wir werden dieses auch direct nachweisen können.

Zu dem genannten Zwecke bemerken wir, dass die Ausdrücke (5.) der neun Coefficienten ungeändert bleiben, wenn man erstens für alle λ_k setzt $\alpha\lambda_k$, zweitens für alle λ_k setzt $\lambda_k + \beta$ und drittens für alle λ_k setzt $\frac{1}{\lambda_k}$. Wenn wir diese Substitutionen in eine vereinigen, so können wir kürzer sagen: die neun Functionen (5.) der sechs Variabeln λ_k werden dieselben Functionen der sechs Variabeln μ_k , wenn man setzt:

$$(7.) \quad \lambda_k = \frac{\alpha\mu_k + \beta}{\mu_k + \gamma},$$

also unabhängig von α, β, γ , wovon man sich auch direct leicht überzeugen kann.

Daraus ziehen wir den Schluss, dass, wenn man in den oben angegebenen Ausdrücken (5.) der neun Coefficienten irgend welchen drei Variabeln λ gegebene Werthe zuertheilt, die drei anderen aber beliebig variiren lässt, die neun Coefficienten alle Werthe annehmen, welche sie durch Variation sämtlicher Variabeln λ erhalten würden.

Denn es sei C der Ausdruck irgend eines der neun Coefficienten und (C) der Ausdruck, in welchen C durch die Substitutionen (7.) übergeht. Es ist (C) also dieselbe Function der sechs Variabeln μ_k als C der Variabeln λ_k , welche Werthe auch α, β, γ haben. Haben nun die sechs Variabeln λ_k irgend welche Werthe, so kann man, da es freisteht über die Constanten α, β, γ beliebig zu verfügen, denselben solche Werthe zuertheilen, dass drei von den sechs Variabeln μ_k auf Grund der sechs Gleichungen (7.) gegebene Werthe erhalten. Da aber $C = (C)$ ist, so haben wir auf der einen Seite irgend welche Werthe der Variabeln, auf der anderen Seite gegebene Werthe von drei Variabeln.

Was die Vorzeichen der sechs Quadratwurzeln $\sqrt{\pi_1}, \sqrt{\pi_2}, \dots, \sqrt{\pi_6}$ anbelangt, welche in die gegebenen Ausdrücke der neun Coefficienten eingehen,

so können dieselben ganz willkürlich genommen werden. Bemerken wir aber, dass sämtliche Variationen, die in den Substitutionen (1.) durch die Veränderungen der Vorzeichen der sechs Quadratwurzelgrößen hervorgehen, auch dadurch zu Wege gebracht werden können, dass man einer oder mehreren der sechs Variablen die entgegengesetzten Vorzeichen zuertheilt, so können wir von diesen Variationen absehen und annehmen, dass sämtliche Quadratwurzelgrößen das positive Vorzeichen haben.

Eine gefälligere Form nehmen die Ausdrücke (5.) für die neun Coefficienten der Substitution an, wenn man für die sechs Größen π ihre Werthe (4.) setzt. Man erhält dadurch:

$$(8.) \quad \left\{ \begin{aligned} a &= \sqrt{\left\{ \frac{(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_6)}{(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_6)} \cdot \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_5)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_5)} \right\}}, \\ a' &= \sqrt{\left\{ \frac{(\lambda_1 - \lambda_6)(\lambda_1 - \lambda_2)}{(\lambda_4 - \lambda_6)(\lambda_4 - \lambda_2)} \cdot \frac{(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_5)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_5)} \right\}}, \\ a'' &= \sqrt{\left\{ \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_4)}{(\lambda_6 - \lambda_2)(\lambda_6 - \lambda_4)} \cdot \frac{(\lambda_6 - \lambda_3)(\lambda_6 - \lambda_5)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_5)} \right\}}, \\ b &= \sqrt{\left\{ \frac{(\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_6)}{(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_6)} \cdot \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_5)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_5)} \right\}}, \\ b' &= \sqrt{\left\{ \frac{(\lambda_3 - \lambda_6)(\lambda_3 - \lambda_2)}{(\lambda_4 - \lambda_6)(\lambda_4 - \lambda_2)} \cdot \frac{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_5)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_5)} \right\}}, \\ b'' &= \sqrt{\left\{ \frac{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)}{(\lambda_6 - \lambda_2)(\lambda_6 - \lambda_4)} \cdot \frac{(\lambda_6 - \lambda_1)(\lambda_6 - \lambda_5)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_5)} \right\}}, \\ c &= \sqrt{\left\{ \frac{(\lambda_5 - \lambda_4)(\lambda_5 - \lambda_6)}{(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_6)} \cdot \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)}{(\lambda_5 - \lambda_1)(\lambda_5 - \lambda_3)} \right\}}, \\ c' &= \sqrt{\left\{ \frac{(\lambda_5 - \lambda_6)(\lambda_5 - \lambda_2)}{(\lambda_4 - \lambda_6)(\lambda_4 - \lambda_2)} \cdot \frac{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_3)}{(\lambda_5 - \lambda_1)(\lambda_5 - \lambda_3)} \right\}}, \\ c'' &= \sqrt{\left\{ \frac{(\lambda_5 - \lambda_2)(\lambda_5 - \lambda_4)}{(\lambda_6 - \lambda_2)(\lambda_6 - \lambda_4)} \cdot \frac{(\lambda_6 - \lambda_1)(\lambda_6 - \lambda_3)}{(\lambda_5 - \lambda_1)(\lambda_5 - \lambda_3)} \right\}}. \end{aligned} \right.$$

Hier ist es allerdings unerlässlich das Vorzeichen zu bestimmen, welches jeder der neun Quadratwurzeln zukommt. Wir haben in dieser Absicht jeden unter dem Quadratwurzelzeichen stehenden Bruch als das Product zweier Brüche dargestellt. Der zweite Bruch ist der nämliche, welcher in (5.) das Vorzeichen der Substitutionscoefficienten bestimmt. Wir haben deshalb jedem Quadratwurzelzeichen in (8.) das positive oder negative Zeichen vorzusetzen, je nach dem die Brüche unter demselben beide einen positiven oder beide einen negativen Werth haben. Hat der eine Bruch einen positiven, der andere

einen negativen Werth — solche Fälle giebt es — so werden gewisse Substitutionscoefficienten imaginär und es tritt eine gewisse Unsicherheit in den Formeln (8.) ein, die in den vorhergehenden Formeln (5.) nicht aufkommt.

Wir wollen nicht unterlassen darauf aufmerksam zu machen, dass unter den Quadratwurzelzeichen in (8.) Quotienten von solchen Producten stehen, deren Differenzen nach den bei Gelegenheit der Involution angestellten Betrachtungen (S. p. 180 dieses Bandes) mannigfacher Umgestaltung fähig sind.

Heidelberg, im Januar 1864.
