Su un'equazione a radici reali.

(Di ONORATO NICCOLETTI, a Pisa.)

In una Memoria, recentemente pubblicata in questi *Annali* (*), ho considerato una particolare equazione algebrica, che ha molte analogie coll'equazione secolare, e ne ho assegnate alcune semplici proprietà. Torno ora sull'argomento, per comunicare alcuni altri teoremi relativi alla stessa equazione, che mettono ancora in più chiara luce la sua analogia coll'equazione secolare, e che ho trovati solo dopo la stampa della Memoria ora ricordata.

1. Siano

$$A(x, \bar{x}) = \sum_{\mu, \nu} a_{\mu\nu} x_{\mu} \bar{x}_{\nu}; \quad B = \sum_{\mu, \nu} b_{\mu\nu} x_{\mu} \bar{x}_{\nu}; \quad C = \sum_{\mu, \nu} c_{\mu\nu} x_{\mu} \bar{x}_{\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

tre forme di HERMITE di prima specie (M , n.° 1) in n variabili $x_1, \dots, x_n$, e si consideri l'equazione (che ammettiamo non essere identicamente soddisfatta):

$$E(\omega) = |a_{\mu\nu} + 2b_{\mu\nu}\omega + c_{\mu\nu}\omega^2| = |e_{\mu\nu}(\omega)| = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

che si ha annullando il discriminante della forma:

$$E_{\omega}(x, \bar{x}) = A(x, \bar{x}) + 2B(x, \bar{x})\omega + C(x, \bar{x})\omega^2 = \sum_{\mu, \nu} e_{\mu\nu}(\omega) x_{\mu} \bar{x}_{\nu} \quad (3)$$

con ω variabile arbitraria.

Se ω , è una soluzione della (2), il sistema di equazioni lineari omogenee:

$$\sum_{\mu} e_{\mu\nu}(\omega_1) x_{\mu} = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

(*) NICCOLETTI, *Su una classe di equazioni a radici reali* — (questi *Annali*, Tomo IX, pag. 93 e ss.). Nei frequenti richiami a questa Memoria l'indicherò colla lettera M .

avrà soluzioni non tutte nulle. Sia $x_1 \dots x_n$ una tal soluzione, si moltiplichi la (4) per $\bar{x}$, e si sommi quindi rispetto a ν da 1 ad n ; otteniamo così la relazione fondamentale:

$$E_{\omega_1}(x, \bar{x}) = A(x, \bar{x}) + 2B(x, \bar{x})\omega_1 + C(x, \bar{x})\omega_1^2 = 0. \quad (3^*)$$

Ammettiamo ora che:

a) le tre forme A, B, C non si annullino mai insieme, per valori non tutti nulli delle x ; (cioè se $A = B = C = 0$, si abbia necessariamente $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$) (*).

b) qualunque sistema di valori si dia alle $x_1 \dots x_n$, l'equazione di 2.º grado in ω che si ha annullando la (3) abbia *sempre* radici reali; sia cioè, qualunque siano le $x_1, x_2, \dots x_n$:

$$B^2 - AC \geq 0. \quad (5)$$

In queste ipotesi, dalla (3*) si ha che ω_1 è necessariamente reale; donde il teorema (Cf. M, n.º 21, a):

L'equazione $E(\omega) = 0$ ha, nelle ipotesi superiori, tutte le radici reali.

2. Non è facile discutere con tutta generalità la disuguaglianza (5); noi ci limiteremo a studiare alcuni casi particolari, che portano a risultati interessanti.

a) Due consecutive tra le forme A, B, C sian definite; la condizione a) del n.º 1 è certamente soddisfatta; inoltre, cambiando al più ω in $-\omega$, o in $\pm \frac{1}{\omega}$, possiamo supporre, senza ledere la generalità, che siano esse le B e C ed abbiano ugual segno; è subito visto allora che la disuguaglianza (5) può scriversi al modo seguente

$$\frac{A}{B} \leq \frac{B}{C}, \quad (5^*)$$

ed, osservando che il rapporto $\frac{B}{C}$ ha sempre un valore positivo, sarà certamente verificata, quando le x sian tali, che il rapporto $\frac{A}{B}$ sia negativo o

(*) Perciò ad es. è sufficiente che la rete di forme $\lambda A + \mu B + \nu C$, con λ, μ, ν parametri reali arbitrari, contenga una forma definita.

nullo. Se poi il rapporto $\frac{A}{B}$ ha un valore positivo, consideriamo le due equazioni:

$$\Delta(\lambda) = |a_{\mu\nu} - \lambda b_{\mu\nu}| = 0; \quad (6')$$

$$D(\tau) = |b_{\mu\nu} - \tau c_{\mu\nu}| = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2 \dots n); \quad (6'')$$

esse hanno, nelle nostre ipotesi, tutte le radici reali e la seconda inoltre tutte positive (*); inoltre tutti i possibili valori del rapporto $\frac{A}{B}$ (e $\frac{B}{C}$) sono sempre compresi tra la minima e massima radice della equazione

$$\Delta(\lambda) = 0 \quad (D(\tau) = 0);$$

(cf. M, n.° 12); ne segue, indicando con L la massima radice della $\Delta(\lambda) = 0$, con t la minima della $D(\tau) = 0$, che la (5*) varrà sicuramente, quando si abbia la disuguaglianza

$$L \leq t. \quad (7)$$

b) Siano invece definite le due forme estreme A e C ed abbiano segno contrario; sarà allora sempre $AC < 0$; e quindi valgono certamente le a), b) del n.° 1.

c) Consideriamo infine un terzo caso; le tre forme A, B, C sian tutte tre semidefinite, e le due estreme abbiano segno contrario (per fissare le idee, siano la A negativa, le B e C positive), inoltre i due determinanti $\Delta(\lambda), D(\tau)$ non siano identicamente nulli; varranno ancora le a), b) del n.° 1. Diamo infatti a $\lambda(\tau)$ un valore positivo (negativo) che non annulli il determinante $\Delta(\lambda) (D(\tau))$; la forma corrispondente $A - \lambda B (B - \tau C)$ è allora ancora non indefinita e, poichè non è degenerare, è definita negativa (positiva), donde è chiaro che è soddisfatta la a) del n.° 1, e quindi anche, per le ipotesi fatte, la (5); ne segue anche che l'equazione $\Delta(\lambda) = 0$ ha radici tutte (reali) negative o nulle, la $D(\tau) = 0$ tutte (reali) positive o nulle.

In ciascuno di questi tre casi adunque: *l'equazione (2) ha tutte le radici reali*: quando inoltre si aggiungano alcune condizioni complementari, si può affermare insieme che:

Una radice multipla di ordine ρ dell'equazione (2) rende il determinante $E(\omega)$ di caratteristica $n - \rho$.

(*) Infatti per τ negativo arbitrario la forma $B - \tau C$ è ancora evidentemente definita e quindi il suo discriminante è diverso da zero.

3. Per dimostrare questo teorema, cominciamo dall'osservare che, per la regola di derivazione dei determinanti, la derivata di ordine s ($s = 1, 2, \dots$) della $E(\omega)$ è una combinazione lineare omogenea dei minori del determinante $E(\omega)$, che hanno un ordine maggiore od uguale ad $n - s$ (*). Ciò posto, è evidente che il teorema vale per $\rho = 1$ (cfr. M, n.º 6); procederemo quindi ancora per induzione ed ammessane la verità per le radici multiple fino all'ordine ρ , lo dimostreremo per quelle dell'ordine $\rho + 1$.

Sia allora ω_1 una radice multipla della (2) dell'ordine $\rho + 1$ e quindi anche dell'ordine ρ ; il determinante $E(\omega_1)$ avrà una caratteristica non maggiore di $n - \rho$, ed il suo determinante associato di rango $n - \rho$, che con notazioni evidenti scriviamo (cf. M, n.º 6, 19):

$$|E_{i_1 \dots i_\rho; k_1 \dots k_\rho}(\omega_1)|$$

ove non sia identicamente nullo, avrà la caratteristica uno; quindi, osservando che due minori coniugati di $E(\omega)$ hanno, per ω reale, valori complessi coniugati, potremo scrivere in ogni caso:

$$E_{i_1 \dots i_\rho; k_1 \dots k_\rho}(\omega) = \pm p_{i_1 \dots i_\rho} \cdot \bar{p}_{k_1 \dots k_\rho}, \quad (8)$$

essendo le $p_{i_1 \dots i_\rho} \binom{n}{\rho}$ opportune costanti, che dimostreremo esser tutte nulle.

Poichè inoltre ω_1 è multipla dell'ordine $\rho + 1$ ed $E(\omega_1)$ ha, per ipotesi, una caratteristica non maggiore di $n - \rho$, sarà per $\omega = \omega_1$:

$$\left\{ \begin{aligned} \left\{ \frac{d^\rho E(\omega)}{d\omega^\rho} \right\}_{\omega=\omega_1} &= 2^\rho \sum_{(i_1 \dots i_\rho; k_1 \dots k_\rho)} d_{i_1 \dots i_\rho; k_1 \dots k_\rho} E_{i_1 \dots i_\rho; k_1 \dots k_\rho}(\omega_1) = \\ &= \pm 2^\rho \cdot D^{(*)}(p, \bar{p}) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

dove abbiám posto:

$$d_{ik} = b_{ik} + \omega_1 c_{ik}, \quad (10)$$

$d_{i_1 \dots i_\rho; k_1 \dots k_\rho}$ è il minore di ordine ρ del determinante $|d_{ik}|$, formate dalle righe $i_1 \dots i_\rho$, dalle colonne $k_1 \dots k_\rho$ e $D^{(*)}$ è la forma associata di rango ρ della forma di HERMITE

$$D = B + \omega_1 C. \quad (10^*)$$

Insieme coll'equazione data consideriamo anche la reciproca (ponendo $\omega = \frac{1}{\theta}$):

$$\theta^{2n} E\left(\frac{1}{\theta}\right) = F(\theta) = |a_{\mu\nu} \theta^2 + 2 b_{\mu\nu} \theta + c_{\mu\nu}| = 0; \quad (11)$$

(*) Di qui segue che se una radice $\omega = \omega_1$ rende il determinante $E(\omega)$ di caratteristica $n - \rho$ essa è multipla dell'ordine ρ almeno.

varranno per essa considerazioni affatto analoghe a quelle svolte per la $E(\omega)$; in particolare una radice ω_1 della data, multipla dell'ordine $\rho + 1$, ne darà una θ_1 (che sarà infinita, ove sia $\omega_1 = 0$) multipla dello stesso ordine per la $F(\theta) = 0$ e che quindi, nelle nostre ipotesi, renderà il determinante $F(\theta)$ di una caratteristica non maggiore di $n - \rho$; e si avranno le formule, analoghe alle antecedenti:

$$F_{i_1 \dots i_\rho; k_1 \dots k_\rho}(\theta_1) = \pm q_{i_1 \dots i_\rho; k_1 \dots k_\rho} \quad (8')$$

$$\left\{ \frac{d^\rho F(\theta)}{d\theta^\rho} \right\}_{\theta=\theta_1} = 2^\rho \sum_{(i_1, \dots, i_\rho; k_1, \dots, k_\rho)} g_{i_1 \dots i_\rho; k_1 \dots k_\rho} F'_{i_1 \dots i_\rho; k_1 \dots k_\rho}(\theta_1) = \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \quad (9')$$

$$= \pm 2^\rho G^{(\rho)}(q, \bar{q}) = 0$$

dove:

$$g_{ik} = a_{ik} \theta_1 + b_{ik} = \theta_1 (a_{ik} + b_{ik} \omega_1) \quad (10')$$

e

$$G = A \theta_1 + B = \theta_1 (A + B \omega_1). \quad (10'')$$

4. Convieni ora trattar separatamente i tre casi $a)$, $b)$, $c)$ del n.º 2.

$a)$ Poichè la forma C è definita la forma

$$B = \tau C$$

dove τ è un parametro arbitrario, in forza di un noto teorema di WEIERSTRASS (cf. M, n.º 16, $b)$) è definita per tutti i valori di τ esterni all'intervallo compreso tra la massima e minima radice della equazione $D(\tau) = 0$, in particolare per tutti i valori di τ algebricamente minori della minima radice t di essa equazione, o maggiori della massima T . Ponendo adunque $\tau = -\omega_1$, quando $-\omega_1$ cada nell'intervallo $(-\infty, t)$, o in quello (T, ∞) , la forma (10^*) e quindi anche la sua associata $D^{(\rho)}$ è definita; dalla (9) segue allora subito che tutte le $p_{i_1 \dots i_\rho}$ sono identicamente nulle e quindi, per la (8), il determinante $E(\omega_1)$ ha una caratteristica non maggiore di $n - \rho - 1$, e se ω_1 ha una molteplicità non maggiore di $\rho + 1$, uguale ad $n - \rho - 1$; ciò che dimostra in questo primo caso il teorema enunciato.

In modo affatto analogo si ha dalla (10^{**}) che il teorema vale anche per qualunque radice ω_1 , tale che $-\omega_1$ sia esterna all'intervallo tra la minima t e la massima L delle radici della $\Delta(\lambda) = 0$, cada cioè in uno dei due intervalli $(-\infty, t)$, $(L, +\infty)$. Ma teniamo ora conto della (7); quando in essa valga il segno di disuguaglianza, oppure, quando avendosi $L = t$,

non è $-L = -t = \omega_1$ una radice della $E(\omega) = 0$, i due intervalli $(-\infty, t)$; $(L, +\infty)$ danno tutto l'asse reale; di guisa che in questo caso il teorema vale per qualunque radice della $E(\omega) = 0$.

Esaminiamo il caso escluso che si abbia $L = t = -\omega_1$, essendo ω_1 una radice della $E(\omega) = 0$ (questo accadrà solo in casi particolarissimi ed allora ω_1 si potrà determinare razionalmente) multipla dell'ordine $\rho + 1$ (ammettiamo, si ricordi, il teorema vero *sempre* fino all'ordine ρ). Se $-\omega_1 = t$ è multipla per $D(\tau) = 0$ dell'ordine k , la forma $B + \omega_1 C = B - t C$ è semidefinita e riducibile mediante una sostituzione lineare sulle x (e la coniugata sulle $\bar{x}$) ad una forma definita in $n - k$ variabili. Supponiamo già eseguita sulle $x_1 \dots x_n$ una tale sostituzione (che lascia evidentemente immutate le radici della $E(\omega) = 0$), e la $B + \omega_1 C$ sia definita nelle $x_1 x_2 \dots x_{n-k}$. Dalla (9) si ha che son nulle tutte le $p_{i_1 \dots i_\rho}$, per le quali gli indici $i_1 \dots i_\rho$ son presi in un modo qualunque tra i numeri $1, 2 \dots n - k$; ne segue, per le (8) che son nulli tutti i minori di ordine $n - \rho$ del determinante $E(\omega_1)$, i quali contengono un qualunque minore di ordine k , tratto dalla matrice delle ultime k righe (o colonne). Ma la matrice di queste ultime k righe si riduce, per $\omega = \omega_1$, alla corrispondente del determinante $|a_{\mu\nu}|$, ed è certamente diversa da zero, quando si aggiunga la condizione supplementare che il determinante

$$|a_{\mu\nu} + \sigma(b_{\mu\nu} - t c_{\mu\nu})|$$

non sia identicamente nullo; e di qui, per un noto teorema di KRONECKER, (cf. M, n.º 6) si deduce ancora che il determinante $E(\omega_1)$ ha la caratteristica $n - \rho - 1$. Ad una conclusione affatto identica si perviene, quando il determinante

$$|a_{\mu\nu} - L b_{\mu\nu} + \sigma c_{\mu\nu}|$$

(dove ancora σ è un parametro arbitrario) non sia identicamente nullo.

Il ragionamento che precede, suppone, come è evidente, $\rho \leq n - k$; ma, si vede subito, non può essere $\rho > n - k$; infatti dovrebbe allora la caratteristica di $E(\omega_1)$ non superare certamente k e la considerazione della derivata $E^{(n-k)}(\omega_1)$ porterebbe l'annullarsi di tutti i minori della matrice delle ultime k righe e colonne, il che abbiamo escluso.

Scrivendo l'equazione $E(\omega) = 0$ sotto forma omogenea, la discussione che precede può riassumersi nel teorema:

Nel determinante

$$E(\omega_1, \omega_2) = |a_{\mu\nu} \omega_1^2 + 2 b_{\mu\nu} \omega_1 \omega_2 + c_{\mu\nu} \omega_2^2| \quad (11)$$

si supponga:

- a) che le due forme B e C sian definite ed abbiano il medesimo segno;
 b) che, indicando con L , t (rispettivamente) la massima e minima radice delle equazioni

$$\Delta(\lambda) = |a_{\mu\nu} - \lambda b_{\mu\nu}| = 0, \quad D(\tau) = |b_{\mu\nu} - \tau c_{\mu\nu}| = 0,$$

si abbia $L \leq t$;

- c) che quando sia $-L = -t = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ una radice di $E(\omega_1, \omega_2) = 0$, uno almeno dei due determinanti

$$|a_{\mu\nu} + \sigma(b_{\mu\nu} - t c_{\mu\nu})| \quad |a_{\mu\nu} - L b_{\mu\nu} + \sigma c_{\mu\nu}| \quad (12)$$

in cui σ è un parametro arbitrario, non sia identicamente nullo.

In queste ipotesi, il determinante $E(\omega_1, \omega_2)$ ha tutti i suoi divisori elementari reali e lineari.

5 b). Quando le due forme estreme A e C sono definite ed hanno segno contrario, la discussione è affatto simile. La forma $B - \tau C$, con τ arbitrario, rimane allora definita, finchè τ è esterno all'intervallo tra la minima e la massima tra le radici della $D(\tau) = 0$; la $A - B\lambda$ finchè λ è compreso tra le due radici, positiva e negativa, della $\Delta(\lambda) = 0$, che hanno il minimo valore assoluto, o, se questa equazione ha radici tutte di uno stesso segno, finchè λ cade in quello dei due segmenti infiniti dell'asse reale, determinati dalla radice della $\Delta(\lambda) = 0$ che ha il minimo valore assoluto, che non contiene le altre radici. Il teorema da dimostrare, vale dunque, per le (10*), (10'*), finchè $-\omega_1$ è nell'uno o nell'altro dei due intervalli indicati; varrà quindi per qualunque radice, quando questi due intervalli diano insieme tutto l'asse reale. Questo accade, se la $\Delta(\lambda) = 0$ ha radici positive e negative, quando esse sian tutte esterne all'intervallo tra la minima e massima radice della $D(\tau) = 0$; se poi la $\Delta(\lambda) = 0$ ha radici tutte di un medesimo segno, ad es.: tutte positive, questo porta che anche la forma B non è indefinita ed ha lo stesso segno della A (*) (cf. M, n.º 12); la B e C avranno allora segno contrario e perciò la $D(\tau) = 0$ avrà tutte radici negative o nulle; ed è chiaro che ancora in questo caso i due intervalli considerati contengono tutto l'asse

(*) L'asserzione del testo si dimostra subito supponendo le A , B ridotte simultaneamente a forma ortogonale (cf. ad es. Ricci, *Algebra*, pag. 444).

reale. Può infine accadere, quando la $\Delta(\lambda) = 0$ ha radici positive e negative, che la massima e la minima radice (od ambedue) della $D(\tau) = 0$ coincidano (rispettivamente) colle due radici positiva e negativa della $\Delta(\lambda) = 0$ che hanno il minimo valore assoluto, e con un valore $-\omega_1$, dove ω_1 soddisfi alla $E(\omega) = 0$; ma in tal caso un ragionamento affatto identico a quello del n.º 4, dimostra la validità del teorema, quando non tutti due i determinanti (12) siano identicamente nulli. Abbiamo così il teorema:

Il determinante $E(\omega_1, \omega_2)$ ha ancora tutti i divisori elementari reali e lineari, quando si ammetta che:

- a) le due forme estreme A e C sian definite ed abbian segno contrario;*
- b) se la forma intermedia è indefinita, tutte le radici della equazione $\Delta(\lambda) = 0$ siano esterne all'intervallo tra la minima e massima radice della equazione $D(\tau) = 0$.*

6. c) Nel terzo caso infine, quando tutte tre le forme A , B , C sono non indefinite, e ad es.: la A negativa, le B e C positive (e i due determinanti $\Delta(\lambda)$, $D(\tau)$ non sono identicamente nulli) basta osservare che la $B - \tau C$ è definita per τ negativo, la $A - \lambda B$ per λ positivo, affatto arbitrari, per dedurre che il teorema da dimostrare vale per qualunque radice ω_1 , positiva o negativa, della $E(\omega_1) = 0$. Per $\omega_1 = 0$, od ∞ , il teorema vale ancora, e si dimostra con ragionamento identico a quello fatto sopra al n.º 5 nel caso eccezionale, in quanto i due determinanti $\Delta(\lambda)$, $D(\tau)$ non sono identicamente nulli. Adunque:

Il determinante $E(\omega_1, \omega_2)$ ha ancora tutti i suoi divisori elementari reali e lineari, quando:

- a) le tre forme A , B , C sono semidefinite e le due estreme hanno segno contrario;*
- b) i due determinanti $\Delta(\lambda)$, $D(\tau)$ non sono identicamente nulli.*

7. Torniamo all'equazione non omogenea; una radice ω_1 multipla dell'ordine ρ sarà (nei tre casi considerati) multipla dell'ordine $\rho - 1$ almeno per qualunque minore dell'ordine $n - 1$; ed, eseguendo al più una conveniente sostituzione lineare sulle x , (e la coniugata sulle $\bar{x}$) si può trovare un minore principale $E_k(\omega_1)$, regolare rispetto ad ω_1 , che ha cioè ω_1 come radice multipla di un ordine uguale a $\rho - 1$ (*). Se ora ω_1 è tale che la forma

(*) MUTH, *Theorie und Anwendung der Elementarteiler*. S. 120.

$B + \omega_1 C$ sia definita, indicando con h un numero convenientemente piccolo in valore assoluto, dalle (9) e (10) si ha (cf. **M**, n.° 8, b)

$$E(\omega_1 + h) = \pm 2^p D^{(p)}(p, \bar{p}) \frac{h^p}{p} + \dots \quad (\text{con } D^{(p)}(p, \bar{p}) \neq 0);$$

affatto analogamente sarà

$$E_k(\omega_1 + h) = \pm 2^{p-1} D_k^{(p-1)}(p, \bar{p}) \frac{h^{p-1}}{(p-1)!} + \dots \quad (\text{con } D_k^{(p-1)}(p, \bar{p}) \neq 0),$$

e quindi, nell'intorno di $h = 0$

$$\frac{E(\omega_1 + h)}{E_k(\omega_1 + h)} = 2 \frac{h}{p} \frac{D^{(p)}(p, \bar{p})}{D_k^{(p-1)}(p, \bar{p})} + \dots \quad (13)$$

e quindi il rapporto stesso ha il segno di h o il segno contrario, secondochè la $B + \omega_1 C$ è positiva o negativa. Un risultato affatto analogo si ha evidentemente (per la $F(\theta) = 0$) quando la ω_1 sia tale che la forma $A + \omega_1 B$ sia invece essa definita.

Diciamo ora che due radici ω_1, ω_2 della $E(\omega) = 0$ appartengono alla prima (seconda) specie, quando ambedue le forme $B + \omega_1 C, B + \omega_2 C$ (o le altre due $A + \omega_1 B, A + \omega_2 B$) siano definite, o almeno non indefinite, e del medesimo segno. Dalla (13) si ha allora immediatamente:

a) Tra due radici consecutive della stessa specie cade un numero dispari di radici reali di un qualunque minore principale $E_k(\omega) = 0$; e se, come accadrà in generale, il grado della $E_k(\omega) = 0$ non supera quello della $E(\omega) = 0$, le radici di queste due equazioni si separano a vicenda.

Diciamo anche che un intervallo (α, β) è della prima (seconda) specie, quando in esso la $B + \mu C (A + \mu B)$ è definita; allora dalle (13) e dall'identità della teoria dei determinanti (Cf. **M**, n.° 19):

$$\left. \begin{aligned} E_{i_1 \dots i_k}(\omega) E_{i_1 \dots i_k i_{k+1} i_{k+2}}(\omega) &= E_{i_1 \dots i_k i_{k+1}}(\omega) E_{i_1 \dots i_k i_{k+2}}(\omega) - \\ &- E_{i_1 \dots i_k i_{k+1} i_{k+2}}(\omega) E_{i_1 \dots i_k i_{k+2} i_{k+1}}(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

vediamo (come in **M**, n.° 7, 8, 20 c)) che è possibile costruire dai minori principali del determinante $E(\omega)$ una successione di STURM per qualunque intervallo della prima specie, dai minori di $F(\theta)$ (e quindi anche di $E(\omega)$) una analoga per ogni intervallo della seconda specie. Per proprietà note delle successioni di STURM, (o anche come in **M**, n.° 8 a)) indicando con $E_{i_1 \dots i_k}(\omega)$ un qualunque minore principale dell'ordine $n - k$, si ha poi:

b) L'equazione $E_{i_1 \dots i_k}(\omega) = 0$ ha tutte le sue radici reali; valgono inoltre per essa equazione proprietà affatto simili a quelle delle $E(\omega) = 0$.

Supponiamo infine che le tre forme A, B, C sian tutte tre definite (la A negativa, le B, C positive); è possibile allora assegnare delle limitazioni per le radici della $E(\omega) = 0$.

Sia ad es.: ω_1 una radice positiva; dalla (3*) abbiamo:

$$A(x, \bar{x}) + 2B(x, \bar{x})\omega_1 = -C\omega_1^2 < 0$$

e quindi

$$\omega_1 < -\frac{A}{2B};$$

donde: c) Indicando con $-l$ la minima tra le radici (tutte negative) della equazione $\Delta(\lambda) = 0$, una radice positiva della $E(\omega) = 0$ è sempre minore di $\frac{l}{2}$.

Sia invece ω_2 una radice negativa; sarà per essa:

$$C\omega_2^2 + 2B\omega_2 = -A > 0; \quad C\omega_2 + 2B < 0;$$

$$\omega_2 < -\frac{2B}{C}; \quad |\omega_2| > 2 \cdot \frac{B}{C}$$

cioè: d) Indicando con t la minima tra le radici (tutte positive) dell'equazione $D(\tau) = 0$, una radice negativa della $E(\omega) = 0$ è sempre minore di $-2t$;

Si ha quindi un limite superiore per le radici positive, ed uno per le negative, dell'equazione $E(\omega) = 0$.

8. Ci sia permessa ancora un'osservazione.

Il principio che ci ha servito a dimostrare, sotto le condizioni a) b) del n.º 1, la realtà delle radici della $E(\omega) = 0$ può enunciarsi sotto la forma generale seguente:

Siano $A, B, C \dots L$ $k+1$ forme di HERMITE di prima specie, ed indicando ω una variabile arbitraria, si ponga

$$E(\omega) = \sum_{\mu\nu} e_{\mu\nu}(\omega) x_\mu \bar{x}_\nu = A + B\omega + C\omega^2 + \dots + L\omega^k \quad (\mu, \nu = 1, 2 \dots n) \quad (15)$$

e si consideri l'equazione (di grado non maggiore di $n k$)

$$F(\omega) = |e_{\mu\nu}(\omega)| = 0. \quad (16)$$

Ad una radice ω_1 delle (16) corrisponde una soluzione almeno, non identicamente nulla, del sistema di equazioni lineari omogenee:

$$\sum_{\mu} e_{\mu\nu}(\omega_1) x_{\mu} = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2 \dots n)$$

donde, procedendo come al n.° 1, si ha per i valori antecedenti delle x (e i coniugati delle $\bar{x}$)

$$E(\omega_1) = A(x, \bar{x}) + B(x, \bar{x})\omega_1 + \dots + L(x, \bar{x})\omega_1^k = 0. \quad (17)$$

Si consideri ora l'equazione che si ha annullando la (15), ove però ora le x siano *affatto arbitrarie*.

Se le forme $A, B \dots L$ sono tali che essa equazione non diviene mai identica ed ha sempre tutte le sue radici reali, tale sarà, per la (17), anche la ω_1 , cioè una qualunque radice della $F(\omega) = 0$; anche questa equazione avrà dunque tutte le sue radici reali. Si ottiene in tal guisa un certo « Uebertragungsprinzip » un *principio di trasporto*, per cui dalla realtà delle radici della $E(\omega) = 0$, per valori arbitrari delle $x_1 \dots x_n$, si trae una conclusione analoga per quelle dell'altra equazione (16). Su questo principio riposa una delle dimostrazioni della realtà delle radici della equazione secolare nei casi ben noti (*); affatto in generale poi osserviamo che, se non è facile costruire *direttamente* delle equazioni, come la $E(\omega) = 0$, che abbiano, rimanendo le x affatto arbitrarie, tutte le radici reali, è però possibile da una *nota* tra esse, dedurne in guisa molto semplice infinite altre, che hanno ancora la stessa proprietà.

Così, ad es. si ha il teorema seguente (di FOURET) (**):

Se $\varphi(x)$ è un polinomio intero di grado n , i cui fattori lineari sono tutti reali, ed $f(x)$ è di grado maggiore od uguale ad n , ed α è un numero reale qualunque, ma non compreso tra -1 e $-(2n+1)$, l'equazione

$$F(x) = \sum_0^n \frac{f^{(i)}(x) \varphi^{(n-i)}(x)}{(\alpha+1)(\alpha+2) \dots (\alpha+i)(n-i)!} = 0$$

ha almeno tante radici reali quante la $f(x) = 0$; e se ne ha di più, l'eccesso è un numero pari.

(*) Cfr. ad es. CAPELLI, *Analisi algebrica*, 3.^a edizione, pag. 684.

(**) *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*. Vol. 106, pag. 1220, 1888.

Ciò posto, nelle $a)$, $b)$ del n.º 1, poniamo:

$$\begin{cases} H(\omega) = A + 2B\omega + C\omega^2 \\ f(\omega) = g(\omega) \cdot H(\omega); \quad F(\omega) = \sum_0^m \frac{f^{(i)}(\omega) \varphi^{(m-i)}(\omega)}{(\alpha+1) \dots (\alpha+i) \cdot (m-i)!} \end{cases}$$

essendo $\varphi(\omega)$ una funzione razionale intera in ω del grado m , $g(\omega)$ una di un grado maggiore od uguale ad $m-2$, i cui fattori lineari sian tutti reali, ed α un numero reale qualsiasi, non compreso tra -1 e $-(2m+1)$; in virtù del teorema di FOURET ora ricordato, l'equazione $F'(\omega) = 0$ avrà tutte le sue radici reali. Ora si osservi che è:

$$f^{(i)}(\omega) = A g^{(i)}(\omega) + 2B \{ \omega g(\omega) \}^{(i)} + C \{ \omega^2 g(\omega) \}^{(i)},$$

e quindi sarà anche:

$$F(\omega) = A \psi_1(\omega) + 2B \psi_2(\omega) + C \psi_3(\omega)$$

essendo:

$$\begin{cases} \psi_1(\omega) = \sum_0^m \frac{g^{(i)}(\omega) \varphi^{(m-i)}(\omega)}{(\alpha+1) \dots (\alpha+i) (m-i)!} \\ \psi_2(\omega) = \sum_0^m \frac{\{ \omega g(\omega) \}^{(i)} \varphi^{(m-i)}(\omega)}{(\alpha+1) \dots (\alpha+i) (m-i)!} \\ \psi_3(\omega) = \sum_0^m \frac{\{ \omega^2 g(\omega) \}^{(i)} \varphi^{(m-i)}(\omega)}{(\alpha+1) \dots (\alpha+i) (m-i)!} \end{cases}$$

Ne segue, pel principio superiore che anche l'equazione in ω

$$| a_{\mu\nu} \psi_1(\omega) + 2 b_{\mu\nu} \psi_2(\omega) + c_{\mu\nu} \psi_3(\omega) | = 0$$

ha, nelle ipotesi $a)$, $b)$ del n.º 1, tutte le sue radici reali; un teorema, che non sembra facile dimostrare in altro modo. Teoremi analoghi si avrebbero da teoremi di HERMITE, LAGUERRE (*) simili al teorema di FOURET già ricordato.

Pisa, li 15 Gennaio 1904.

(*) Cfr. ad es. NETTO, *Algebra*. Bd. I, S. 211, ss.; ed anche LAGUERRE, *Oeuvres*, Vol. 1.º, pag. 140.