8. *Ueber electrische Resonanz; von* *V. Bjerknes.*

1. **Einleitung.**

1. Schon bei seinen ersten Untersuchungen über sehr schnelle electrische Schwingungen wurde Hertz zu der Beobachtung der electrischen Resonanz geführt. Diese Erscheinung gab ihm das Hilfsmittel, wodurch er später die Entdeckung und die qualitative Untersuchung der electrischen Wellen vollführte.

Eine der wichtigsten Aufgaben, welche der jetzigen Generation von Physikern vorliegt, ist die quantitative Durchforschung des grossen Untersuchungsgebietes, welches uns durch Hertz's Genie eröffnet worden ist. Unsere Hilfsmittel zur Lösung dieser Aufgabe scheinen aber noch sehr beschränkt zu sein. Als ein erster vorbereitender Versuch in dieser Richtung dürfte es nahe liegen, ein eingehendes quantitatives Studium der electrischen Resonanz zu versuchen. Sobald wir im Stande sind, den Verlauf dieser Erscheinung vollständig zu verfolgen, dürfen wir hoffen in derselben ein Hilfsmittel ersten Ranges nicht nur für die qualitativen, sondern auch für die quantitativen Untersuchungen zu besitzen.

Ich wurde schon vor mehreren Jahren von meinem hochverehrten verstorbenen Lehrer veranlasst, mich mit dieser Aufgabe, die quantitative Verwerthung der Resonanzerscheinung, zu beschäftigen. Erst jetzt ist es mir aber gelungen die vollständige Lösung dieses Problems durchzuführen, welches ich mir seiner Anregung gemäss gestellt hatte.

2. Der Verlauf der im Resonator auftretenden Electricitätsbewegung muss von einer Reihe von Parametern abhängen. Kennt man die Werthe dieser Parameter, so wird man den electrischen Zustand des Resonators — zum Beispiel den Potentialunterschied seiner Pole, die auf seiner Oberfläche befindlichen Mengen freier Electricität, die Stromintensität in seinem Leitungsdrahte — zu jeder gegebenen Zeit vollständig

berechnen können. Wir stellen uns die Aufgabe, eine experimentelle Methode auszubilden zur Bestimmung dieser für die Beschreibung der Resonatorbewegung nothwendigen Parameter.

Zur Lösung dieser Aufgabe benutzten wir die Hypothese, dass sowohl der Oscillator als der Resonator, wenn einmal erregt, Eigenschwingungen ausführen können. Als die in erster Linie eingreifenden Parameter dürfen dann, wie man leicht sieht, die folgenden gewählt werden:

1. Die Schwingungsdauer des Oscillators.
2. Die Schwingungsdauer des Resonators.
3. Das logarithmische Decrement des Oscillators.
4. Das logarithmische Decrement des Resonators.
5. Eine Constante, welche die Intensität der Schwingungen misst.

Die Resonanzversuche denken wir uns in der Weise ausführbar, dass man an einem der Leiter die Schwingungsdauer verändern kann, während sie am anderen constant gehalten wird. Den veränderlichen Leiter denken wir uns in Bezug auf die Schwingungsdauer calibriert, sodass dieselbe immer eine bekannte Grösse ist. Unsere Aufgabe ist, solche Resonanzversuche anzustellen, dass wir aus denselben die Werthe der vier übrigen Parameter, nämlich die Schwingungsdauer des constant gehaltenen Leiters, die logarithmischen Decremente der beiden Leiter und den Intensitätsfactor ableiten können.

3. Die Bestimmung der Schwingungsdauer des constant gehaltenen Leiters ist der Hauptsache nach längst bekannt, indem man nach der Fundamentealeigenschaft der Resonanz annimmt, dass die höchste Resonanz bei Isochronismus eintritt. Dies ist jedoch im allgemeinen nicht streng richtig; man erhält eine Correction, welche sowohl positiv als negativ sein kann, und welche meistens nicht vernachlässigt werden darf.

Das Hauptinteresse knüpft sich jedoch an die Bestimmung der logarithmischen Decremente, welche man bis jetzt fast nie hat bestimmen können. Da die Vorstellungen, welche man sich auf Grundlage beiläufiger theoretischer Betrachtungen und unvollkommener Experimente über diese Grössen gemacht hat, zum Theil sehr unrichtig sind, so führe ich hier sofort das wenige an, was ich einigermaassen sicher über dieselben aus meinen Versuchen habe schliessen können.

Das kleinste logarithmische Decrement, welches ich bei meinen Resonatoren constatirt habe, ist etwa 0,034. Zahlen wie 0,002 ¹⁾ und 0,00015 ²⁾, sind sicher zehn oder hundertmal zu klein und die combinirten Electrometer- und Funkenmessungen, durch welche sie gefunden worden sind, müssen verworfen werden, bis wir eine genauere Kenntniss der Funken-eigenschaften erworben haben.

Das logarithmische Decrement kann immer in zwei Theile getheilt werden: *das Hertz'sche Ausstrahlungsdecrement* und *das Joule'sche Erwärmungsdecrement*. Für gewöhnliche Formen der Instrumente mit Leitungsdrähten aus gutleitenden unmagnetischen Metallen von 1 mm oder grösserem Durchmesser, ist das Hertz'sche Decrement lange das überwiegende. Verkleinert man aber den Drahtdurchmesser und vergrössert den Widerstand oder die Magnetisirbarkeit desselben, so wird zuletzt das Joule'sche Decrement überwiegend. Beispielsweise haben die von mir in zwei früheren Abhandlungen beschriebenen Resonatoren mit 0,5 mm dicken Drähten ³⁾ logarithmische Decremente von 0,034 beim Kupfer, bis 0,27 bei den magnetischen Metallen. Dabei war das Hertz'sche Decrement etwa 0,027, während das Joule'sche Decrement von dem Werth 0,007 beim Kupfer, bis zum Werth 0,24 bei den magnetischen Metallen anstieg.

4. Eine systematische Untersuchung des Hertz'schen Decrementes, um eventuell die experimentell gefundenen Gesetze und Zahlenwerthe dieser Grösse mit denjenigen zu vergleichen, die man aus der Maxwell'schen Theorie ableiten kann, dürfte die wichtigste hier vorliegende Aufgabe sein. Meine Experimentaluntersuchungen gestatten nur ein Gesetz festzustellen, nämlich, dass die möglichst geschlossene Leiterform kleinere Decremente (wenigstens bis zu zehn mal), als die offene Leiterform hat, ein Resultat, welches nach bekannten theoretischen Ueberlegungen zu erwarten war.

Eine wichtige Anwendung der Joule'schen Decremente ist die Berechnung der magnetischen Permeabilität des im Leitungsdrahte benutzten Metalles. Beispielsweise habe ich

1) V. Bjerknes, Wied. Ann. **44**. p. 88. 1891.

2) Ebert u. Wiedeman, Wied. Ann. **49**. p. 20. 1893.

3) V. Bjerknes, Wied. Ann. **47**. p. 69. 1892 und **48**. p. 592. 1893.

aus meinen Beobachtungen für käufliches Eisen den Werth 50, für electrolytische Eisen- und Kobaltschichten bez. die Werthe 130 und 110 abgeleitet.

5. Eine Anwendung der Resonanzversuche endlich, welche besondere Beachtung verdient, ist das Studium gewisser Eigenschaften electrischer Funken, welche bis jetzt jeder Untersuchung unzugänglich gewesen sind.

Den Widerstand electrischer Funken kann man aus der Differenz der logarithmischen Decremente eines Oscillators und eines Resonators genau gleicher Form bestimmen. Beispielsweise habe ich für einen wirksamen Funken von 0,7 mm Länge einen Widerstand von etwa 11 Ohm gefunden.

Noch wichtiger wird das Studium einer anderen Funken-eigenschaft sein, welche man als die *Trägheit des Funkens* bezeichnen darf, und welche darin besteht, dass zur Herstellung von Funken gegebener Länge um so höhere Spannungen nöthig sind, je kürzer der Zeitraum ist, während welchen die Spannung besteht. Numerische Resultate kann ich leider nicht geben, wegen Lücken in meinem Beobachtungsmaterial. Die Existenz dieser Eigenschaft ist aber nichtsdestoweniger sicher, denn nur die Funkenträgheit wird erklären können, warum man durch Funkenmessungen, wo man für die secundären Hertz'schen Funken die unter statischen Verhältnissen gefundenen Tabellen über Funkenpotentiale benutzt, logarithmische Decremente findet, die mehr als hundertmal zu klein sein können.

Die hier erwähnten experimentellen Resultate sind alle aus einem alten Beobachtungsmaterial gewonnen, welches aus Versuchen hervorgegangen ist, die lange vor der Ausarbeitung der unten mitzutheilenden Theorie gemacht sind. Sie müssen deshalb als sehr unvollkommen und nur der Grössenordnung nach richtig angesehen werden. Mit Hülfe der Theorie, sowie sie jetzt vorliegt, wird man leicht die Versuche so anstellen können, dass man einerseits viel genauere Resultate gewinnt und andererseits, dass man systematisch die oben mehr zufällig berührten Fragen untersucht.¹⁾

1) Man wird diese Versuche und die quantitative Bearbeitung derselben im „Bihang till K. svenska Vetenskapsakademiens Handlingar“ 1895 finden.

II. Ausgangspunkt der Theorie.

6. Die Electricitätsbewegung im Resonator wollen wir durch den Parameter φ beschreiben, welcher den Potentialunterschied der zwei Pole des Resonators bedeuten soll. Unsere erste Aufgabe ist die Bestimmung dieses Parameters als Function der Zeit, und um diese Aufgabe lösen zu können, wählen wir als Ausgangspunkt die folgende Arbeitshypothese:

Der Parameter φ soll, als Function der Zeit betrachtet, der allgemeinen lineären Differentialgleichung zweiter Ordnung mit constanten Coefficienten genügen:

$$(1) \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2\beta \frac{d\varphi}{dt} + (b^2 + \beta^2) \varphi = F(t),$$

wo weiter die Function F die specielle Form haben soll:

$$(1a) \quad F(t) = \mathfrak{A} e^{-\alpha t} \sin(\alpha t + \alpha)$$

und wo die Anfangsbedingungen die folgenden sind:

$$(1b) \quad . \quad t = 0, \quad \varphi = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0.$$

Von diesen Annahmen enthält die letzte (1b) nichts hypothetisches; sie besagt nur, dass der Anfangszustand ein Zustand des Gleichgewichts sein soll. (1) und (1a) enthalten dagegen hypothetische Voraussetzungen, die wir nach einander näher betrachten wollen.

7. Wäre $F(t) = 0$, so würde die Gleichung (1) mit den Anfangsbedingungen (1b) nur das identische Integral $\varphi = 0$ geben: das Gleichgewicht würde nie gestört werden. Die Störung des Gleichgewichtes rührt also ausschliesslich von $F(t)$ her, und $F(t)$ repräsentirt also die Kraft, womit die Oscillatorenwellen das Gleichgewicht des Resonators stören.

(1a) repräsentirt die Vorstellung, welche sich von Hertz an die meisten Physiker über diese Kraft gemacht haben, und welche auf der Hypothese beruht, dass im Oscillator wirkliche Schwingungen vorliegen. Was man ganz allgemein für diese Hypothese anführen kann, ist einerseits, dass sie qualitativ die Erklärung sämtlicher Hertz'scher Versuche gestattet, andererseits, dass sie als eine theoretische Nothwendigkeit hervortritt als Consequenz der Thomson'schen Theorie der

electrischen Schwingungen, vorausgesetzt, dass der primäre Funke eine genügende Leitungsfähigkeit hat.

Doch ist es sowohl möglich als wahrscheinlich, dass (1a) nicht eine vollständige Beschreibung des Vorganges im Oscillator gibt. Die Theorie lässt z. B. die Möglichkeit von Obertönen voraussehen, welche wir nach (1a) ausgeschlossen haben. Dies hat jedoch weniger Bedeutung, weil man die Intensität derselben bei den Versuchen beliebig viel verringern kann. Die Intensität der möglichen Obertöne muss nämlich um so geringer werden, je mehr sich der Oscillator der Form von zwei durch eine lineäre Leitung verbundenen Capacitäten nähert.

Schwerer zu beurtheilen ist aber der Einfluss des Inductoriums und der Funkenstrecke. Im allgemeinen muss nämlich der Inductionsstrom noch andauern, nachdem die Oscillatorschwingungen erregt sind, sodass man eine Superposition von zwei Bewegungen erhält. Die mit null anfangende, zu einem Maximum steigende und wieder zu null herabsinkende Leitungsfähigkeit der Funkenstrecke muss auch nothwendig eine mehr oder weniger bedeutende Modification des Schwingungsgesetzes (1a) zur Folge haben.

Unsere Hypothese ist also nur, dass (1a) den hauptsächlichsten Theil der Electricitätsbewegung im Oscillator repräsentiren soll.

8. Die Hypothese (1) besagt endlich, dass die Resonatorbewegung, wenn man die störende äussere Kraft gleich null setzt, nach der Differentialgleichung des gedämpften Pendels verlaufen soll. Die Berechtigung dieser Annahme ist theils in der Analogie der electrischen und der mechanischen Resonanzerscheinungen zu suchen; theils in der Thomson'schen Theorie der electrischen Schwingungen, welche unmittelbar auf diese Gleichung führt, nur dass wir unterlassen die in dieser Theorie vorkommenden Ausdrücke der Coefficienten als Functionen von Selbstinduction, Capacität und Widerstand zu benutzen, weil diese Ausdrücke nicht als allgemein gültig angenommen werden dürfen. Allerdings ist ein strenger Beweis auf Grundlage der Maxwell'schen Electrodynamik ebenso wenig für die Richtigkeit dieser Hypothese als für die der Hypothese (1a) geführt worden.

Zur Verhinderung der Bildung von Obertönen, deren Vorkommen durch die Gleichung (1) ausgeschlossen ist, wird es vortheilhaft, wenn auch vielleicht nicht nothwendig sein, im Resonator gleichfalls relativ dünnen Leitungsdraht und grosse Capacitäten an den Enden anzuwenden.

Endlich setzt die Gleichung (1) nothwendig eine gewisse Grösse des Abstandes zwischen Oscillator und Resonator voraus; die electrischen Wellen müssen sich nämlich ins unendliche zwischen den beiden Leitern hin und her reflectiren. Ist der Abstand der Leiter gross, so wird die Intensität des mehrere Mal reflectirten Wellenzuges klein werden, sodass man in erster Annäherung einfach einen einzigen Wellenzug zu beachten braucht, welcher nur einmal vorübergeht, so wie wir es in Gleichung (1) vorausgesetzt haben.

Durch die Wahl eines grossen Abstandes wird man auch die Sicherheit gewinnen, dass die Schwingungsdauer- und Dämpfungsconstanten, welche man durch die Resonanzversuche findet, den zwei einzelnen Leitern an sich angehören, und nicht der Gesamtanordnung der beiden Leiter.

Wie gross man den gegenseitigen Abstand der zwei Instrumente zur Erfüllung dieser Bedingungen wählen muss, kann erst eine eingehendere theoretische Untersuchung entscheiden. Die Thomson'sche Theorie lehrt, dass die Bedingung für die Unabhängigkeit der Constanten erfüllt ist, sobald das Quadrat des gegenseitigen Inductionscoefficienten gegen das Product der zwei Selbstinductionscoefficienten verschwindet, welches meistens schon bei sehr kleinem gegenseitigem Abstand der zwei Instrumente erfüllt ist. Um aber den Einfluss der wiederholten Reflexionen genügend zu verkleinern, muss man den Abstand über die so gefundene Grenze hinaus vergrössern, wahrscheinlich wird es indess genügen den kleinsten Abstand der Instrumente grösser als die lineären Dimensionen derselben zu wählen.

III. Die Bedeutung und die Bezeichnung der Parameter.

9. Die fünf in der Einleitung erwähnten Parameter kommen alle in der Differentialgleichung (1) vor, jedoch nur einer derselben explicite, nämlich der Intensitätsfactor $\mathfrak{A}$.

Die Schwingungsdauern und die logarithmischen Decre-

mente, sind, zur Vereinfachung der Schreibweise, vorläufig durch die Parameter a, b, α, β ersetzt, deren Bedeutung theils aus dem Ausdruck (1a), theils aus dem unten aufgestellten Ausdruck des Integrales (3) hervorgeht:

a und b sind die mit dem Factor 2π multiplicirten Schwingungszahlen bez. des Oscillators und des Resonators. Diese Parameter wollen wir abgekürzt als die „cyklischen“ Schwingungszahlen bezeichnen.

α und β werden wir die Dämpfungsexponenten bez. des Oscillators und des Resonators nennen. Wenn man eine dieser Grössen mit der entsprechenden Schwingungsdauer multiplicirt, erhält man das logarithmische Decrement.

Später werden wir Schwingungsdauern und logarithmische Decremente einführen. Zur Bezeichnung der Schwingungsdauer, welche wir in einer graphischen Darstellung der Resonanzerscheinung als Abscissen benutzen werden, wählen wir den Buchstaben x , für die logarithmischen Decremente entweder γ oder δ . Zwischen primärem und secundärem Leiter werden wir durch die Indices 1 und 2 unterscheiden. Diese Parameter sind dann durch die folgenden Gleichungen mit den vorigen verbunden

$$(2a) \quad a = \frac{2\pi}{x_1}, \quad b = \frac{2\pi}{x_2}, \quad \alpha = \frac{\gamma_1}{x_1}, \quad \beta = \frac{\gamma_2}{x_2}.$$

Schliesslich dürfen wir in den definitiven Formeln die Unterscheidung zwischen primärem und secundärem Leiter fallen lassen, um nur zwischen dem constanten und dem veränderlichen Leiter zu unterscheiden. Schwingungsdauer und logarithmisches Decrement des veränderlichen Leiters werden wir dann durch x und γ , des constanten Leiters durch X und δ bezeichnen.

Mit dieser Bezeichnung der Parameter lässt sich die Aufgabe, welche wir uns gestellt haben, folgendermaassen genauer definiren: In den anzustellenden Resonanzversuchen ist das veränderliche x immer eine bekannte Grösse: aus den Resonanzversuchen wollen wir die Werthe der vier Parameter

$$X, \delta, \gamma, \mathfrak{A}$$

ableiten.

10. Ueber die Werthe der Parameter γ und δ werden wir eine beschränkende Hypothese machen, welche wir folgendermaassen aussprechen:

Der Mittelwerth ω der logarithmischen Decremente γ und δ soll gegen 2π so klein sein, dass man ω^2 neben $(2\pi)^2$ vernachlässigen darf.

Ebenso wollen wir das veränderliche x einer Beschränkung unterwerfen:

Die Differenz $x - X$ soll neben X so klein sein, dass man $(x - X)^2$ neben $(2X)^2$ vernachlässigen darf.

Diese letzte Annahme besagt einfach, dass wir aus den Beobachtungsmaterial nur solche Beobachtungen benutzen wollen, die bei angenähertem Isochronismus gemacht sind. Offenbar wird dadurch die Allgemeinheit unserer Theorie nicht beschränkt. Eine wesentliche Beschränkung scheint dagegen beim ersten Anblick die erste dieser beiden Voraussetzungen zu enthalten, denn für beliebig grosse logarithmische Decremente wird dann unsere Theorie nicht gelten. Wir werden aber nachträglich zeigen, dass auch diese Beschränkung eine unwesentliche ist, indem sie besagt, dass wir nur von solchen Schwingungen absehen, welche so stark gedämpft sind, dass sie keine deutliche Resonanzerscheinung erzeugen können.

11. Im Laufe der Rechnung wird es sich vortheilhaft zeigen, die cyklischen Schwingungszahlen a und b und die Dämpfungsexponenten α und β durch die Mittelwerthe und die halben Differenzen zu ersetzen,

$$(2b) \quad m = \frac{a+b}{2}, \quad n = \frac{a-b}{2}, \quad \mu = \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad \nu = \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Ueber die relativen Grössen dieser Parameter schliesst man leicht folgendes, welches eine unmittelbare Consequenz von den oben gemachten Voraussetzungen über x und ω ist.

n , μ und ν sind neben m so klein, dass man die Quadrate derselben neben dem Quadrat von m vernachlässigen darf.

12. Ausser den fünf Hauptparametern kommt in der Differentialgleichung noch ein sechster vor, nämlich α , welcher die Phase angiebt, worin zur Zeit $t=0$ die Oscillatorschwingungen ihre Wirkung im Resonator geltend machen. Man sieht leicht ein, dass diese Grösse meistens nur wenig

in den Verlauf der Erscheinung eingreifen wird. Die Rechnungen vereinfachen sich etwas, wenn man für α entweder den Werth 0 oder $\pi/2$ wählt; der Allgemeinheit halber lassen wir indes α unbestimmt. Es wird sich dabei zeigen, dass es nur in Correctionsglieder eingeht, und eine Bestimmung desselben wollen wir deshalb nicht versuchen.

IV. Der Verlauf der Resonatorschwingungen.

13. Unsere erste Aufgabe ist nach den Bedingungen (1), (1a), (1b), φ als Function der Zeit darzustellen. Nach den gewöhnlichen Regeln für die Integration linearer Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten, kann das Integral φ der Gleichung (1) als eine Summe von zwei Ausdrücken φ_a und φ_b dargestellt werden:

$$(3) \quad \varphi = \varphi_a + \varphi_b,$$

wobei φ_a ein beliebiger Ausdruck ist, welcher die Gleichung (1) erfüllt, während φ_b in dem Specialfalle $F = 0$ die Bedingung erfüllen muss, das allgemeine Integral der Gleichung (1) zu sein. Für φ_a und φ_b findet man leicht die Ausdrücke:

$$(3a) \quad \varphi_a = e^{-\alpha t} (A_1 \sin \alpha t + A_2 \cos \alpha t)$$

$$(3b) \quad \varphi_b = e^{-\beta t} (B_1 \sin \beta t + B_2 \cos \beta t)$$

Diesem mathematischen Resultat kann man eine einfache und nützliche physikalische Deutung geben: Die Electricitätsbewegung im Resonator kann als eine Superposition von zwei Partialbewegungen betrachtet werden:

a) Die „erzwungene“ Schwingung, (3a) deren Schwingungszahl und Dämpfungsexponente diejenige des Oscillators ist.

b) Die freien Eigenschwingungen (3b), deren Schwingungszahl und Dämpfungsexponente dem Resonator eigenthümliche Constanten sind.

Den Werth der Constanten A_1 und A_2 findet man direct durch Substitution von φ in die Differentialgleichung. Nachher findet man B_1 und B_2 mit Hülfe der Anfangsbedingungen (1b).

14. Von der Form (3) des Integrals können wir zu einer anderen übergehen, welche für die Lösung unserer Aufgabe bequemer ist. Wenn wir nämlich nach (2b) die Parameter

m, n, μ, ν einführen und die Sinus und Cosinus der Summenausdrücke entwickeln, so können wir φ in die Form

$$(4) \quad \varphi = M \sin (m t + m')$$

bringen. (4) stellt also die Resonatorbewegung als eine einzige Schwingung dar, deren Schwingungsdauer der Mittelwerth ist von den Schwingungsdauern des Oscillators und des Resonators. In dieser Schwingung sind aber sowohl die Amplitude M als die Epoche m' Functionen der Zeit. Der Vortheil der Form (4) besteht darin, dass wir von dem Sinusfactor und der in demselben enthaltenen Grösse m' absehen können, um nur die Amplitude M zu betrachten, welche zu jeder beliebigen Zeit die Intensität der Schwingungen angiebt.

15. Bilden wir den Werth von M unter Benutzung unserer Hypothese § 10, wonach n^2, μ^2, ν^2 neben m^2 vernachlässigt werden dürfen, so finden wir den folgenden Ausdruck:

$$(5) \quad M^2 = \frac{\mathfrak{A}^2}{16 m^2 (n^2 + \nu^2)} \left\{ T_1 + 2 \frac{1 + \cos 2 \alpha}{m} T_2 + 2 \frac{\sin 2 \alpha}{m} T_3 \right\},$$

wo

$$(5a) \quad \begin{cases} T_1 = e^{-2\mu t} \{ e^{-2\nu t} + e^{2\nu t} - 2 \cos 2 n t \} \\ T_2 = e^{-2\mu t} \{ n e^{2\nu t} - n \cos 2 n t - \nu \sin 2 n t \} \\ T_3 = e^{-2\mu t} \{ \nu e^{2\nu t} - \nu \cos 2 n t + n \sin 2 n t \}. \end{cases}$$

In dem speciellen Fall, wenn $n = \nu = 0$, wenn also die zwei Leiter gleichzeitig in Schwingungsdauer und in Dämpfung gleich sind, so nimmt M scheinbar die Form 0/0 an. Entwickelt man aber die Parentheseglieder der Grössen T in Reihen, so findet man, dass diese Reihen durch $n^2 + \nu^2$ theilbar sind, und man kommt leicht zu der Form

$$(6) \quad M^2 = \frac{\mathfrak{A}^2}{4 m^2} \cdot t^2 e^{-2\mu t} \left\{ 1 + \frac{\sin 2 \alpha}{m t} \right\}$$

$n = \nu = 0.$

Besonders einfach wird der Ausdruck von M , wenn wir $\alpha = \pi/2$ annehmen. Es verschwinden dann die zwei Correctionsglieder, und da T ein vollständiges Quadrat ist, wird

$$(7) \quad M = \pm \frac{\mathfrak{A}}{4 m \sqrt{n^2 + \nu^2}} \cdot e^{-\mu t} \{ (e^{-\nu t} - e^{\nu t}) \cos n t + (e^{-\nu t} + e^{\nu t}) \sin n t \}.$$

16. Um ein anschauliches Bild der Resonatorschwingungen zu erhalten, brauchen wir nur die Curve

$$y = \pm M,$$

die „Amplitudencurve“, zu zeichnen. Denn die Gleichung (4) zeigt sofort, dass q eine zwischen die positive und die negative Amplitudencurve eingeschlossene Wellencurve ist. Wenn wir die Resonatorschwingungen nach der Form der Amplitudencurven klassificiren, indem wir uns auf die Discussion des durch (9) gegebenen Hauptgliedes beschränken, so können wir vier Typen unterscheiden.

Der erste Typus entspricht dem Fall, wo die zwei Leiter sowohl an Schwingungsdauer als an Dämpfung gleich sind, also $n = \nu = 0$. Die Amplitudencurve wird dann

$$(8a) \quad M = \pm \frac{\mathfrak{A}}{2m} \cdot t e^{-\mu t}.$$

In der Fig. 1 (a) ist diese Curve und die entsprechende Wellencurve gezeichnet für den Fall des logarithmischen Decrementes $\gamma = 0,04$, in Fig. 1 (c) für den Fall $\gamma = 0,4$.

Der zweite Typus ergibt sich, wenn man n gleich Null, aber ν von Null verschieden annimmt, sodass die zwei Leiter gleiche Schwingungsdauer, aber verschiedene Dämpfung haben. Die Amplitudencurve wird dann

$$(8b) \quad M = \pm \frac{\mathfrak{A}}{4m\nu} \cdot e^{-\mu t} (e^{-\nu t} - e^{\nu t}).$$

Diese Curve und die entsprechende Wellencurve sind in Fig. 1 (b) gezeichnet für den Fall, dass die zwei logarithmischen Decremente $\gamma = 0,4$ und $\delta = 0,04$ sind, sodass diese Curve genau intermediär zwischen den zwei Curven (a) und (c) wird. Im Aussehen unterscheidet sich diese Curve nur sehr wenig von den vorhergehenden.

Der dritte Typus ergibt sich, wenn $\nu = 0$, aber n von Null verschieden ist. Die Amplitudencurve erhält dann die einfach gedämpfte Sinusform

$$(8c) \quad M = \pm \frac{\mathfrak{A}}{2mn} \cdot e^{-\mu t} \sin nt.$$

Die Erscheinung, welche man in der Akustik *Schwebungen* nennt, tritt in diesem Falle auf, und zwar mit der grössten

Reinheit, welche sie im Falle gedämpfter Schwingungen haben kann. (a') und (c') sind solche Curven, die aus den Curven (a) und (c) entstanden sind durch Aenderung der einen Schwingungsdauer um ein Zehntel.

Der vierte Typus endlich ist der allgemeine Fall (7), wenn sowohl n als ν von Null verschieden sind. Eine solche Curve ist in Fig. 1 (b') gezeichnet, welcher aus (b) hervorgegangen ist in derselben Weise wie (a') und (c') aus (a) und (c). Dieser allgemeine Curventypus zeichnet sich durch schwache

Fig. 1.

Schwebungen aus, die um so weniger hervortreten, je mehr die zwei Leiter an Dämpfung verschieden sind.

17. Eine besonders für die Theorie des secundären Funkens wichtige Aufgabe ist es, den Werth des grössten Maximums von φ zu bestimmen. Diese Aufgabe kann man durch die einfachere ersetzen, dass man das erste Maximum der Amplitudencurve M sucht; nur bei sehr grossen Werthen von ν oder n wird dabei ein merkbarer Fehler einkommen. Leider lässt sich aber der analytische Ausdruck des Maximums von M auch nicht allgemein finden, weil die Aufgabe auf eine nicht auflösbare transcendente Gleichung führt. In den durch die Gleichungen (8) gegebenen Specialfälle ist aber die Aufgabe leicht durchführbar.

Das Maximum von (8b), welches dem Fall des Isochronismus entspricht, wird Folgendes, wo wir sofort nach den Relationen (2a) und (2b) die Parameter x , X , γ , δ eingeführt haben:

$$(9a) \quad M_m = \frac{\mathfrak{A}}{4\pi} \frac{X^2}{\gamma} \left(\frac{\delta}{\gamma} \right)^{\frac{\delta}{\gamma-\delta}} = \frac{\mathfrak{A}}{4\pi} \frac{X^2}{\delta} \left(\frac{\gamma}{\delta} \right)^{\frac{\gamma}{\delta-\gamma}}.$$

Die erste Form ist bequem, wenn $\gamma > \delta$, die letzte im umgekehrten Falle. Ist der Parameter α nicht mehr gleich $\pi/2$, wie wir in (7) angenommen haben, so kann man nicht mehr den exacten Werth von M_m finden. Man überzeugt sich aber leicht, dass man den nächsten Schritt in der Annäherung macht durch Multiplication von (9a) mit dem Factor

$$(9b) \quad 1 + \frac{\gamma}{4\pi} \sin 2\alpha,$$

und man überzeugt sich, dass bei Hinzunehmen dieses Factors die in § 10 gestellte Forderung zur Annäherung unserer Formeln erfüllt ist.

Zwei Grenzwerthe von M_m sind besonders zu beachten: wenn $\gamma = \delta$ wird

$$(9c) \quad M_m = \frac{\mathfrak{A}}{4\pi} \frac{X^2}{\gamma} \cdot \frac{1}{e},$$

welchen das Maximum von (8a) darstellt. Ist andererseits $\delta = 0$, so wird:

$$(9d) \quad M_m = \frac{\mathfrak{A}}{4\pi} \frac{X^2}{\gamma}.$$

Der andere Fall, wo man den Werth von M finden kann, ist, wenn die beiden Dämpfungen gleich sind, also $\nu = 0$. Wenn wir der Einfachheit halber die Parameter m , n und ν beibehalten, so wird das Maximum von (8c)

$$(10) \quad M_m = \frac{\mathfrak{A}}{2m} e^{-\frac{\mu}{n} \arctg \frac{n}{\mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + n^2}}.$$

18. Wenn man den Ausdruck des Potentialunterschiedes φ der Resonatorpole als Function der Zeit kennt, kann man den Ausdruck der Stromintensität i im Resonatordrahte bilden, indem

$$(11) \quad i = k \frac{d\varphi}{dt},$$

wo k ein constanter Proportionalitätsfactor ist, dessen Werth

man übrigens kennt, wenn man die Capacität des Condensators und somit die absolute Menge der in Bewegung gesetzten Electricität kennt. Den exacten Ausdruck von i kann man also durch directe Rechnung bilden aus einem der gegebenen Ausdrücke für φ . Wir wollen dies nicht durchführen; wir beschränken uns zu bemerken, dass man aus (8) sofort einen angenäherten Werth für i ableitet, welcher den charakteristischen Unterschied der Potential- und der Stromschwankungen zeigt.

Beachtet man nämlich, dass nach unserer Voraussetzung § 11 m gross ist relativ zu n , μ , ν , so sieht man, dass die Differentiation das folgende Hauptglied geben wird

$$(11a) \quad i = k m M \cos (m t + m').$$

Denn die folgenden Glieder, welche durch Differentiation nach dem in M und m' implicite enthaltenen t hervorgehen, werden alle als Factoren eine der kleinen Grössen n , μ , ν enthalten.

Indem wir vom constanten Proportionalitätsfactor k absehen, welcher nur bei der Ausführung absoluter Messungen von Bedeutung wird, reducirt sich der hauptsächliche Unterschied zwischen Strom- und Potentialschwankungen auf Folgendes:

1. Die Amplitude der Stromschwankungen geht aus der Amplitude der Potentialschwankungen hervor durch Multiplication mit der mittleren cyklischen Schwingungszahl m .
2. Die Stromschwankungen sind relativ zu den Potentialschwankungen um ein Viertel Phase verschoben.

Die graphische Darstellung der Stromintensität im Resonator drahte wird deshalb Curven geben, die sich nur unwesentlich von den Curven der Fig. 1 unterscheiden, indem wir eine proportionale Vergrösserung aller Ordinaten, oder eine Verschiebung der Wellencurve um ein Viertel Phase mit Beibehalten der Amplituden auch als unwesentlich ansehen.

Besonders bemerkt man, dass man approximative Ausdrücke der maximalen Stromintensität im Resonator draht erhält durch Multiplication der entsprechenden maximalen Potentialunterschiede (9) oder (10) mit $k m$. Die Formel für

den Fall der Isochronismen wird dabei besonders, wenn wir m mit $2\pi/x$ ersetzen

$$(12) \quad i_m = k \frac{\mathfrak{A}}{2} \frac{X}{\gamma} \left(\frac{\delta}{\gamma} \right)^{\frac{\delta}{\gamma-\delta}} = k \frac{\mathfrak{A}}{2} \frac{X}{\delta} \left(\frac{\gamma}{\delta} \right)^{\frac{\gamma}{\delta-\gamma}}$$

mit den zwei (9c) und (9d) entsprechenden Grenzwerten.

V. Die Methoden zur Beobachtung der Resonatorschwingungen.

19. Die Methoden, welche man bis jetzt benutzt hat, um das Mitschwingen des Hertz'schen Resonators zu erkennen und zu messen, lassen sich in zwei Klassen theilen nach der Beziehung, worin sie zum Verlaufe der Resonatorschwingungen stehen:

Nach der Hertz'schen Funkenmethode erhält man ein Maass der grössten Amplitude, welche während des Verlaufes der Schwingungen vorgekommen ist. Dasselbe gilt von allen hieraus abgeleiteten Methoden, welche auf Leuchteffecten beruhen, sofern die Messung darin besteht, dass man das Aufhören des Leuchtens beobachtet.

Diesen Messungsmethoden gegenüber steht eine andere Klasse, wo die gemessene Grösse eine Summe ist von den Wirkungen der ganzen Reihe von Resonatorschwingungen. Hierher gehören die Methoden, nach welchen man die mechanischen Kräfte electrischer oder magnetischer Natur im Kraftfelde des Resonators, oder die Entwicklung von Joule'scher Wärme im Leitungsdrahte des Resonators abmisst. Indem wir von den individuellen Verschiedenheiten dieser Methoden absehen, wollen wir sie als Messungen des Integraleffectes der Resonatorschwingungen zusammenfassen.

Einige Methoden endlich, welche auf den Einflüssen der Resonatorschwingungen auf verdünntem Gase beruhen, wo man z. B. die Intensität des Leuchtens oder die Abänderungen des Gaswiderstandes misst, scheinen eine intermediäre Stellung zwischen den zwei oben charakterisirten Classen einzunehmen.

Einige Formeln, welche Bedeutung haben für die Theorie der Messungen der Maximalamplituden, haben wir schon im vorigen Abschnitte aufgestellt. Die für unsere Zwecke genügende praktische Brauchbarkeit und theoretische Durchsichtigkeit besitzen aber nur diejenigen Methoden, nach welchen man den Integraleffect der Schwingungen misst. Wir werden

deshalb erst die vollständige Theorie dieser Beobachtungsmethoden entwickeln, um zuletzt eine mehr beiläufige Theorie der Funkenmethode zu geben.

20. Eine ungeladene Electrometernadel, die wechselnder Influenz von Seiten der Resonatorpole unterworfen ist, wird einen ablenkenden Impuls erhalten proportional der Grösse

$$(13) \quad I = \int_0^{\infty} \varphi^2 dt.$$

Da selbst die kürzeste Beobachtungszeit Millionen von Schwingungen ablaufen lässt, darf man unbedenklich zur analytischen Einfachheit als obere Grenze $t = \infty$ einführen.

Nach (8) bilden wir den Ausdruck φ^2 , welcher in der folgenden Form geschrieben werden kann:

$$\varphi^2 = \frac{1}{2} M^2 - \frac{1}{2} M^2 \cos 2(m t + m').$$

Das letzte Glied auf der rechten Seite stellt eine Curve dar von genau derselben Form wie diejenigen der Fig. 1. Offenbar sind diese Curven bis auf verschwindende Correctionsglieder gleich viel positiv und negativ; ein Umstand, welcher physikalisch darin begründet ist, dass die Resonatorbewegung hauptsächlich in einer Schwingung um eine Gleichgewichtslage besteht. Wir dürfen deshalb das Integral dieses Gliedes verschwindend annehmen neben dem Integral der immer positiven Grösse M , und somit (13) ersetzen durch den einfachen annähernden Ausdruck

$$(13a) \quad I = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} M^2 dt.$$

21. Sind die magnetischen oder thermischen Wirkungen Gegenstand der Beobachtung, so hat man in (13) φ durch i zu ersetzen. Benutzt man für i den angenäherten Ausdruck (11a), so kommt man zu dem Resultate, dass der magnetische oder thermische Integraleffect I_i in der einfachen Beziehung

$$(13b) \quad I_i = k^2 m^2 I$$

zu dem electrischen Integraleffecte steht.

Eine sehr nahe Verwandtschaft der magnetischen und thermischen Messungen mit den electrischen ist hiermit nach-

gewiesen und alles auf die Berechnung des electrischen Integrall-effectes reducirt.

22. Um das Integral (13a) zu bilden, müssen wir die drei Functionen der Zeit T_1 , T_2 und T_3 von 0 bis ∞ integrieren. Man findet leicht jedes der Integrale als eine Summe von drei rationalen Brüchen. Summirt man diese drei Brüche, so scheidet sich in allen drei Fällen in den Zählern der Factor $n^2 + \nu^2$ aus, welcher mit dem entsprechenden Nennerfactor in (5) wegfällt. Die Unbestimmtheit, welche an der Formel (5) haftet, fällt also jetzt fort, und man kommt leicht zu den folgenden Resultaten.

Sieht man von den zwei Correctionsgliedern in (5) ab, so findet man als den möglichst einfachen Ausdruck des electrischen Integrall-effectes:

$$(14) \quad J = \frac{9^2 \mu}{32 m^2 (\mu^2 - \nu^2) (\mu^2 + n^2)}.$$

Nimmt man die zwei Correctionsglieder hinzu, so ist der eben gefundene Ausdruck von I mit dem folgenden Correctionsfactor zu multipliciren:

$$(14a) \quad 1 + \frac{\mu + \nu}{m} \sin 2\alpha + \frac{\mu + \nu}{\mu} \frac{n}{m} (1 + \cos 2\alpha).$$

Nehmen wir diesen Correctionsfactor hinzu, so sind die vernachlässigten Glieder von der Ordnung μ^2/m^2 und n^2/m^2 und dürfen folglich den in § 10 gemachten Voraussetzungen gemäss unberücksichtigt bleiben.

23. Kehren wir jetzt zu den Variablen a , b , α , β zurück, so bemerken wir besonders, dass innerhalb der Approximationsgrenze m^2 gleich ab gesetzt werden darf. Es wird dann das Hauptglied

$$I = \frac{9^2 (\alpha + \beta)}{16 a b \alpha \beta \{ (a - b)^2 + (\alpha + \beta)^2 \}}$$

und der Correctionsfactor

$$1 + \frac{2\alpha}{a+b} \sin 2\alpha + \frac{2\alpha}{\alpha+\beta} \frac{a-b}{a+b} (1 + \cos 2\alpha).$$

Schliesslich ersetzen wir nach den Relationen (2a) die Dämpfungsexponente α und β durch die logarithmischen Decremente γ_1 und γ_2 , und die cyklischen Schwingungszahlen a und b durch die Schwingungsdauern x_1 und x_2 . Dann wird

$$(15) \quad I = \left(\frac{\mathfrak{M}}{8\pi} \right)^2 \frac{x_1^3 x_2^3 (\gamma_1 x_2 + \gamma_2 x_1)}{\gamma_1 \gamma_2 \{ (\gamma_1 x_2 + \gamma_2 x_1)^2 + 4\pi^2 (x_1 - x_2)^2 \}}$$

und der Correctionsfactor, wo wir immer zweckmässige Vereinfachungen innerhalb der Annäherungsgrenze vornehmen dürfen:

$$(15a) \quad 1 + \frac{\gamma_1}{2\pi} \sin 2\alpha + \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1} (1 + \cos 2\alpha).$$

Die Fehler in diesem Ausdrucke von I , wenn (15a) mitgenommen wird, sind von der Ordnung

$$\left(\frac{x - X}{2X} \right)^2 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\omega}{2\pi} \right)^2,$$

welche beide Grössen wir (§ 10) neben der Einheit klein angenommen haben.

24. Mittels Gleichung (13b) können wir aus dem electrischen Integraleffect (15) den magnetischen oder den thermischen Integraleffect I_i ableiten. Derselbe wird, indem wir wieder innerhalb der Approximationsgrenze

$$m^2 = ab = \frac{4\pi^2}{x_1 x_2}$$

setzen

$$(15b) \quad I_i = k^2 \left(\frac{\mathfrak{M}}{4} \right)^2 \frac{x_1^3 x_2^3 (\gamma_1 x_2 + \gamma_2 x_1)}{\gamma_1 \gamma_2 \{ (\gamma_1 x_2 + \gamma_2 x_1)^2 + 4\pi^2 (x_1 - x_2)^2 \}},$$

während der Correctionsfactor (15a) unverändert bleibt.

Nun ist zu bemerken, dass die Gleichung (13b) nur annähernd richtig ist. Um sichere Grenzen für den Gültigkeitsbereich der Formel (15b) festzustellen oder eventuell die richtigere Formel zu finden, muss man den exacten Ausdruck von i nach (11) und nachher für I_i bilden, was ohne Schwierigkeit durchführbar ist nach dem schon gegebenen Muster für die Berechnung des electrischen Integraleffectes I . Diese Rechnungen werden wir nicht durchführen; wir beschränken uns auf eine vollständige Ausarbeitung der Theorie der electrometrischen Beobachtungsmethode. Wenn wir aber gelegentlich parallele Sätze und Formeln für andere Beobachtungsmethoden aufstellen, so geschieht es mit dem ein für allemal hier ausgesprochenen Vorbehalt, dass wir den Approximationsgrad und den Gültigkeitsbereich nicht genauer untersucht haben; wir haben nur constatirt, dass sie bei genügend kleinen Werthen der logarithmischen Decremente und des

Schwingungsdauerunterschiedes mit unbegrenzter Annäherung gelten.

25. Zur Lösung unserer Aufgabe ist jetzt der erste Schritt gethan: den Integraleffect I , wodurch die Resonatorschwingungen beobachtet werden, haben wir ausgedrückt als Function von einem bekannten Parameter und von sämtlichen gesuchten unbekannten Parametern. Zu vollständiger Lösung unserer Aufgabe fehlt noch die Untersuchung, wie man durch systematische Beobachtungen des Integraleffectes die Bestimmung der Parameter erreichen kann.

Die Bestimmung der einzelnen Parameter kann natürlich nur dadurch erzielt werden, dass man die verschiedenen Werthe von I beobachtet, welche aus systematischen Abänderungen in den Werthen der Parameter hervorgehen. Dabei wollen wir folgendermaassen verfahren:

1. Erstens setzen wir als veränderlich voraus den einzigen bekannten Parameter, die Schwingungsdauer x des veränderlichen Leiters, welche entweder mit x_1 oder mit x_2 identificirt werden darf. Dies führt auf die Theorie der „Resonanzcurve“, durch welche wir die Bestimmung von den folgenden unbekannten erreichen: von der Schwingungsdauer X ; der Scalenableung Y am Beobachtungsinstrumente, welche der Schwingungsdauer $x = X$ entspricht; und von dem Mittelwerth ω der zwei logarithmischen Decremente γ und δ .

2. Nach der Bestimmung von X sind wir im Stande, den Fall des Isochronismus $x = X$ zu realisiren, und untersuchen die *Theorie der isochronen Leiter*. Durch Abänderungen der logarithmischen Decremente unter Beibehaltung des Isochronismus lassen sich Aenderungen in der Scalenableung Y erzeugen, wodurch die vollständige Bestimmung der logarithmischen Decremente γ und δ erreicht wird.

3. Nachdem durch 1 und 2 die inneren Constanten der beiden Instrumente, Schwingungsdauer und logarithmische Decremente, gefunden sind — alles durch relative Messungen — wird eine einzige absolute Messung den Werth des Intensitätsfactors $\mathfrak{A}$ geben.

Ehe wir aber die somit angedeuteten Untersuchungen anfangen und die zur Bestimmung der Parameter dienenden Formeln aufstellen, wollen wir erst einige allgemeine Con-

sequenzen aus den Formeln (9) und (15) ziehen, die für die Vergleichung der verschiedenen Beobachtungsmethoden Interesse haben.

VI. Allgemeine Sätze über die Beobachtung der Resonatorschwingungen.

26. Den wichtigsten Specialfall unserer Formel erhalten wir durch die Substitution $x_1 = x_2 = X$, welches also dem Falle entspricht, dass die beiden Leiter auf Isochronismus abgestimmt sind. Wenn wir von dem Correctionsfactor absehen und wenn wir γ_1 und γ_2 durch γ und δ ersetzen, erhalten wir:

$$(16a) \quad I = \left(\frac{\mathfrak{U}}{8\pi} \right)^2 \frac{X^5}{\gamma \delta (\gamma + \delta)}$$

als Ausdruck des electrischen Integraleffectes der Resonatorschwingungen. Nach (15b) leitet man den folgenden Ausdruck ab für den von der Stromintensität i abhängigen magnetischen oder thermischen Integraleffect

$$(16b) \quad I = k^2 \left(\frac{\mathfrak{U}}{4} \right)^2 \frac{X^3}{\gamma \delta (\gamma + \delta)}.$$

Das Potential der grössten Schlagweite des secundären Funkens ist endlich nach (9a):

$$M_m = \frac{\mathfrak{U}}{4\pi} \cdot \frac{X^2}{\gamma} \left(\frac{\delta}{\gamma} \right)^{\frac{\delta}{\gamma - \delta}} = \frac{\mathfrak{U}}{4\pi} \cdot \frac{X^2}{\delta} \left(\frac{\gamma}{\delta} \right)^{\frac{\gamma}{\delta - \gamma}}.$$

Betrachtet man diese Ausdrücke als Functionen der gemeinschaftlichen Schwingungsdauer der Leiter, so erhält man die folgenden Sätze über die Beobachtungsmethoden der Resonatorschwingungen, welche also für isochrone Leiter gelten:

Das secundäre Funkenpotential ist proportional dem Quadrat der Schwingungsdauer.

Der magnetische oder thermische Integraleffect ist proportional dem Kubus der Schwingungsdauer.

Der electrische Integraleffect ist proportional der fünften Potenz der Schwingungsdauer.

27. Die Bedeutung dieser Resultate für die Wahl einer zweckmässigen Beobachtungsmethode ist offenbar. Im allgemeinen sieht man ein, dass die Beobachtbarkeit der electrischen Schwingungen mit Hülfe von Resonator bei abnehmender

Schwingungsdauer rasch abnehmen muss. Diese Abnahme der Beobachtbarkeit verläuft am schnellsten für den Fall, dass man electrometrische Messungen macht; am weitesten kann man hoffen, die Beobachtbarkeit nach der Hertz'schen Funkenmethode zu treiben.

Uebrigens ist zu bemerken, dass wir hier ausdrücklich alle anderen Parameter constant vorausgesetzt haben, während doch die geometrische Aenderung, wodurch die Abnahme der Schwingungsdauer erreicht wird, im allgemeinen eine gleichzeitige Verkleinerung der Grösse $\mathfrak{A}$ zur Folge haben muss. Die Abnahme der Beobachtbarkeit wird also für alle drei Methoden noch schneller verlaufen, wenn man die Variationen von $\mathfrak{A}$ mitrechnet. Dabei wird wieder die Ueberlegenheit der Funkenmethode über die zwei anderen hervortreten, indem das secundäre Funkenpotential nur von $\mathfrak{A}$, die Integraleffecte dagegen von $\mathfrak{A}^2$ abhängen.

Die Erfahrung, dass die Beobachtung der Hertz'schen Wellen mit abnehmender Wellenlänge immer schwieriger wird, haben schon viele Physiker gemacht. Diese Erfahrung ist also eine Bestätigung der Theorie, und es ist ein Irrthum von Hrn. Zehnder, darin ein Argument gegen die gewöhnliche Hypothese (1a) über die Electricitätsbewegung im Hertz'schen Oscillator zu sehen.¹⁾

28. Betrachten wir jetzt die Integraleffecte und das secundäre Funkenpotential als Functionen der logarithmischen Decremente. In dieser Hinsicht verhalten sich der electrische und der magnetisch-thermische Effect identisch. Das secundäre Funkenpotential verhält sich dagegen wesentlich verschieden.

Setzen wir erst $\gamma = \delta$, so reducirt sich der Nenner von I und I_i auf $2\gamma^3$, der Nenner von M_m aber auf $e\gamma$ (9c). Also gelten die folgenden Sätze für den Fall, dass die isochronen Leiter auch gleiche Dämpfung haben:

Das secundäre Funkenpotential ist umgekehrt proportional der ersten Potenz des gemeinschaftlichen logarithmischen Decrementes.

Der Integraleffect ist umgekehrt proportional der dritten Potenz des gemeinschaftlichen logarithmischen Decrementes.

1) Zehnder, Wied. Ann. 52. p. 45. 1894.

Betrachten wir den entgegengesetzten Fall, dass γ und δ sehr verschieden sind, sodass man z. B. δ neben γ vernachlässigen darf, so reducirt sich M_m auf den Ausdruck (9d) und der Zähler von I oder I_i wird $\gamma^2 \delta$. Die folgenden Sätze gelten also für isochrone Leiter mit sehr verschiedener Dämpfung:

Das secundäre Funkenpotential ist umgekehrt proportional dem grössten logarithmischen Decrement, und von dem kleinsten Decrement unabhängig.

Der Integraleffect ist umgekehrt proportional dem Quadrate des grössten und der ersten Potenz des kleinsten logarithmischen Decrementes.

29. Nach diesen Sätzen beurtheilt man leicht, wie die Beobachtbarkeit der Resonatorschwingungen mit der Dämpfung der Instrumente zu- oder abnimmt. Die auf den Integraleffecten beruhenden Beobachtungsmethoden eignen sich gut für schwach gedämpfte Schwingungen; bei steigender Dämpfung werden sie aber zuletzt unbrauchbar, und für die Beobachtung stark gedämpfter Schwingungen wird die Funkenmethode die beste sein.

Die grosse Empfindlichkeit des Integraleffectes für die Aenderungen der logarithmischen Decrement macht es leicht, nach der electrometrischen, galvanometrischen oder thermischen Beobachtungsmethode die Bestimmung der logarithmischen Decrement zu erreichen, während nach der Funkenmethode selbst der qualitative Nachweis einer Veränderung der Dämpfung unmöglich sein kann. Dies erklärt, warum Hertz durch Funkenbeobachtungen ein Eingreifen der Metalleigenschaften im Verlauf der Resonatorschwingungen kaum constatiren konnte ¹⁾, während die thermischen und die electrometrischen Beobachtungen den Einfluss des Widerstandes und der Magnetisirbarkeit sofort zeigten. ²⁾

Am besten werden vielleicht diese Eigenthümlichkeiten der Beobachtungsmethoden durch den folgenden Satz illustriert, die man einerseits aus dem Ausdruck für I , andererseits aus einem Vergleich der Ausdrücke (9c) und (9d) für M_m ableitet:

1) Hertz, Ausbreitung der electrischen Kraft, p. 50.

2) Klemenčič, Wien. Ber. 24. März 1892; V. Bjerknes, Wied. Ann. 47. p. 69. 1892.

Durch Verkleinerung des kleinsten der beiden logarithmischen Decremente ins unendliche erreicht man ein unbegrenztes Ansteigen des Integraleffectes, aber ein Ansteigen des secundären Funkenpotentials auf höchstens den e-fachen oder 2,72-fachen Werth.

VII. Die Gleichung der Resonanzcurve.

30. Wir haben also jetzt zu untersuchen, wie sich der Werth des Integraleffectes I verändert, wenn der eine Leiter seine Schwingungsdauer verändert. Da die Formel (15) in Bezug auf die Parameter der zwei Leiter symmetrisch ist, brauchen wir nicht zwischen dem primären und dem secundären Leiter zu unterscheiden, sondern nur zwischen dem veränderlichen und dem constanten. Es seien x und γ Schwingungsdauer und logarithmisches Decrement des Veränderlichen, X und δ des constanten Leiters, so lässt sich (15) schreiben:

$$I = \left(\frac{\mathfrak{A}}{8\pi}\right)^2 \frac{x^3 X^3 (\gamma X + \delta x)}{\gamma \delta \{(\gamma X + \delta x)^2 + 4\pi^2(x - X)^2\}}.$$

Die an dem einen Leiter ausgeführten Veränderungen, welche zur Veränderung der Schwingungsdauer x dienen sollen, müssen im allgemeinen gleichzeitige Veränderungen des logarithmischen Decrementes γ und des Intensitätsfactors $\mathfrak{A}$ herbeiführen. Die Grössen $\mathfrak{A}$ und γ entwickeln wir deshalb nach Potenzen der Schwingungsdauerdifferenz $x \div X$, und dieselbe Entwicklung dürfen wir gleichzeitig für den im Zähler vorkommenden Factor x^3 benutzen.

Durch Einsetzen dieser Entwicklungen in den Ausdruck für I erhält man diese Grösse als Function einer einzigen unabhängigen Variablen x , und einer grösseren Anzahl Parameter, indem nicht nur die in der Einleitung definirten Fundamentalparameter vorkommen, sondern auch eine Anzahl Constanten mehr zufälliger Natur, die von den am veränderlichen Leiter ausgeführten Formänderungen abhängen.

Um eine für die Praxis brauchbare Formel zu erhalten, müssen wir versuchen die Anzahl der Parameter möglichst zu reduciren. Die Variationen der veränderlichen x sind durch die Bedingung des § 10 begrenzt, dass $(x \div X)^2$ neben $(2X)^2$ klein sein soll. Sind x_1 und x_2 die äussersten Grenzwerte, welche x annehmen darf, so ersetzen wir die vollständigen Entwicklungen durch diejenigen lineären Ausdrücke,

welche innerhalb des Intervalles von x_1 zu x_2 den besten Anschluss geben:

$$(17) \quad \begin{cases} \mathfrak{N}^2 = \mathfrak{N}_0^2 + \mathfrak{N}_1^2 \frac{x - X}{X} \\ \gamma = \gamma_0 + \gamma_1 \frac{x - X}{X} \\ x^3 = X^3 + 3 X \mathfrak{N}_1^2 (x - X) \end{cases}$$

$\mathfrak{N}_0$ ist also der Mittelwerth des Intensitätsfactors, γ_0 der Mittelwerth des logarithmischen Decrementes im Intervalle von x_1 bis x_2 ; $\mathfrak{N}_1$ und γ_1 sind Coefficienten, welche die mittleren Veränderungen des Intensitätsfactors und des logarithmischen Decrementes innerhalb dieses Gebietes angeben.

31. Nach Einsetzen dieser Ausdrücke kann I geschrieben werden als ein rationaler Bruch, dessen Zähler eine Entwicklung ersten Grades, und dessen Nenner eine Entwicklung zweiten Grades nach $x \div X$ ist:

$$(18) \quad I = I_0 \frac{\omega^2 X^2 + \pi^2 S(x - X)}{\omega^2 X^2 + 2 \omega \varepsilon X(x - X) + (\pi^2 + \varepsilon^2)(x - X)^2}.$$

Die Bedeutung der Parameter ω und ε ist folgende:

$$(18a) \quad \begin{cases} \omega = \frac{\gamma_0 + \delta}{2} \\ \varepsilon = \frac{\gamma_1 + \delta}{2} \end{cases}$$

ω ist der Mittelwerth der logarithmischen Decremente beider Leiter, also die in § 10 erwähnte Grösse. ε ist der Mittelwerth aus dem logarithmischen Decremente des constanten Leiters und dem Zuwachscoefficienten des Decrementes des veränderlichen Leiters. Diese Grösse wird im allgemeinen von derselben Grössenordnung wie ω sein; doch besteht der wichtige Unterschied, dass während ω immer positiv ist, ε positiv, null oder negativ sein kann.

I_0 und S sind Parameter, welche eine complicirtere Bedeutung haben. Nur beachten wir, dass S von der Grössenordnung $3(\omega/\pi)^2 \cdot X$ ist.

Hätten wir den Correctionsfactor (15a) berücksichtigt, so wäre der Ausdruck (18), wie man leicht sieht, in äusserer Form unverändert geblieben. Der Unterschied wäre nur eine etwas abgeänderte Bedeutung der zwei Parameter I_0 und S .

32. Bedeutet nun y die Scalenablesung an dem Instrumente, Electrometer, Galvanometer oder der Vorrichtung für das Messen der Joule'schen Wärme, wodurch man die mechanische Summenwirkung der Resonatorschwingungen misst, und setzt man Proportionalität voraus zwischen Scalenablesung und Integraleffect I , so lässt sich folgendes behaupten:

Wählt man als Abscisse die Schwingungsdauer x des variablen Leiters, als Ordinate die Scalenablesung y , so erhält man eine Curve, deren Gleichung sich folgendermaassen schreiben lässt:

$$(19) \quad y = I \frac{\omega^2 X^2 + \pi^2 S (x - X)}{\omega^2 X^2 + 2 \omega \epsilon X (x - X) + (\pi^2 + \epsilon^2) (x - X)^2}$$

33. Diese Gleichung enthält, ausser der unabhängigen Variablen x , fünf Parameter $X, Y, S, \omega, \epsilon$. Von denselben sind indess nur vier für die Form der Curve wesentlich; denn die Gleichung nimmt als Polynom geschrieben die Form an:

$$(20) \quad x^2 y - A x y - B x + C y + D = 0,$$

worin nur die vier Parameter A, B, C, D vorkommen.

Ist eine genügende Anzahl Punkte der Resonanzcurve durch Versuche gefunden, so kann man die Werthe von A, B, C, D durch Auflösung von linearen Gleichungen finden — eventuell unter Zuhülfenahme der Methode der kleinsten Quadrate. Nachher hat man zur Bestimmung der fünf Parameter nur vier Relationen. Die Untersuchung der Resonanzcurve hat also noch nicht zu dem erwünschten Ziele geführt: in der Form (19) oder (20) führt sie nicht zu der Bestimmung eines einzigen der für Oscillator und Resonator charakteristischen Parameter; sie gibt nur Relationen zwischen denselben.

VIII. Graphische Untersuchung der Resonanzcurve.

34. Um aus der Resonanzcurve die expliciten Werthe der Parameter unserer Leiter ableiten zu können, ohne fremde Versuche oder besondere aus theoretischen Betrachtungen abgeleitete Relationen zu Hülfe zu nehmen, ist es also nothwendig einen Parameter zu entfernen. Dies kann aber nur erreicht werden durch eine Vernachlässigung, welche Fehler erster Ordnung in den Werthen von y verursachen darf, während alle früher gemachten Vernachlässigungen zweiter Ordnung gewesen sind. Es fragt sich aber dann, wie stark dieser

eventuelle Fehler erster Ordnung in die Werthe der zu bestimmenden Parametern eingreifen wird. Dies werden wir leicht übersehen können, nachdem wir einige einfache geometrische Eigenschaften unserer Curve abgeleitet haben.

Wie die Gleichung (20) zeigt, ist die Resonanzcurve eine algebraische Curve dritten Grades, und den Verlauf derselben ersieht man aus der Fig. 2: Die Curve schmiegt sich asymptotisch an die X -Axe an, und in der Gegend des Abscissenwerthes $x = X$ hat sie ein ausgeprägtes Maximum. Nur in dieser Gegend hat sie physikalische Bedeutung.

Schreiben wir erst die Gleichung in der Form eines nach Potenzen von $x \div X$ geordneten Polynomes:

$$(21) \quad (x-X)^2 - \left(\frac{\pi^2}{\pi^2 + \varepsilon^2} S \frac{Y}{y} - \frac{2\omega\varepsilon}{\pi^2 + \varepsilon^2} X \right) (x-X) + \frac{\omega^2}{\pi^2 + \varepsilon^2} X^2 \frac{y-Y}{y} = 0.$$

Man sieht aus der Gleichungsform sofort, dass der Punkt

$$(21a) \quad x = X, \quad y = Y$$

der Curve angehört; nennen wir diesen Punkt den *Isochronitätspunkt*.

Dieser Punkt liegt

in der Nähe des Maximums, fällt aber im allgemeinen nicht mit demselben zusammen. Substituirt man $y = Y$, so ergibt sich

$$(21b) \quad x - X = S' = \frac{\pi^2}{\pi^2 + \varepsilon^2} S - \frac{2\omega\varepsilon}{\pi^2 + \varepsilon^2} X.$$

Dieser Ausdruck repräsentirt also *die Länge einer horizontalen Sehne durch den Isochronitätspunkt*. Da der Isochronitätspunkt immer sehr nahe dem Maximum fällt, kann man sagen, dass $S'/2$ annähernd der Abscissenabstand dieser Punkte darstellt.

35. Schneiden wir die Curve durch eine beliebige horizontale Sehne, $y = \text{const.}$ Die Abscissen der Schnittpunkte dieser Sehne mit der Curve seien x_1 und x_2 . Dann müssen $x_1 \div X$ und $x_2 \div X$ Wurzeln der Gleichung (21) sein, und die bekannten Relationen zwischen den Coefficienten und den Wurzeln einer Gleichung geben:

Fig. 2.

$$(22) \quad \begin{cases} x_1 - X + x_2 - X = \frac{\pi^2}{\pi^2 + \varepsilon^2} S \frac{Y}{y} - \frac{2 \omega \varepsilon}{\pi^2 + \varepsilon^2} X \\ (x_1 - X)(x_2 - X) = \frac{\omega^2}{\pi^2 + \varepsilon^2} X^2 \frac{y - Y}{y} \end{cases}$$

Dividirt man die erste Gleichung durch 2, so bedeutet das Glied links den Abstand zweier Punkte der Sehne, nämlich zwischen seinen Mittelpunkt

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

und seinen Schnittpunkt mit der Isochronitätsordinate $x = X$. Bezeichnen wir den Abstand dieser Punkte mit ξ , so lässt sich die erste Gleichung (22) schreiben:

$$(22a) \quad \xi y + \frac{\omega \varepsilon}{\pi^2 + \varepsilon^2} X y = \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{\pi^2 + \varepsilon^2} S Y.$$

Die Resonanzcurve hat also die folgende Eigenschaft:

Der geometrische Ort der Mittelpunkte von Sehnen parallel zur X-Axe ist eine gleichschenklige Hyperbel.

Die Asymptoten dieser Hyperbel sind die X-Axe und die Gerade

$$\xi = \frac{\omega \varepsilon}{\pi^2 + \varepsilon^2} X,$$

oder

$$(22b) \quad x = X \left(1 - \frac{\omega \varepsilon}{\pi^2 + \varepsilon^2} \right).$$

Die in die zweite Gleichung (22) eingehenden Ausdrücke $x_1 \div X$, $x_2 \div X$, y , $y \div Y$ repräsentiren die Längen der vier Segmente, in welche die horizontale Sehne und die Ordinate Y des Isochronitätspunktes sich gegenseitig theilen. *Bezeichnen wir diese Segmente der Reihe nach mit a , b , c , d , wobei d dasjenige Segment ist, welches den Isochronitätspunkt als Endpunkt hat, so besteht die Beziehung:*

$$(22c) \quad \omega^2 = \frac{a b c}{d} \frac{\pi^2 + \varepsilon^2}{X^2}.$$

36. Da ω und ε Grössen derselben Ordnung sind, so wird das Nennerglied $2 \omega \varepsilon X(x - X)$ nur um eine Ordnungsstufe kleiner als die zwei anderen Nennerglieder (19), und die Vernachlässigung dieses Gliedes wird deshalb, wie schon angedeutet, Fehler erster Ordnung in die Werthe von y ver-

ursachen können. Substituiren wir aber doch in unsere Formeln $\epsilon = 0$. Die Gleichung der Resonanzcurve wird dann:

$$(23) \quad y = I \frac{\omega^2 X^2 + \pi^2 S (x - X)}{\omega^2 X^2 + \pi^2 (x - X)^2}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass die Gleichung, welche ich früher unter specielleren Voraussetzungen für die Resonanzcurve aufgestellt habe¹⁾, nach der Vernachlässigung einiger Glieder höherer Ordnung als Specialfall in diese Gleichung (23) eingeht. Nach meinen damaligen Voraussetzungen über die Kleinheit des Resonatordecrementes dürfen wir nämlich γ mit 2ω identificiren; zu speciell war diese ältere Gleichung dadurch geworden, dass ich fehlerhaft S als eine Constante, statt als einen Parameter auffasste. Hierin liegt die Ursache des „systematischen Fehlers“, dem ich damals (l. c. p. 86, § 18) begegnete.

Die Isochronitätssehne S' (21b) wird nun einfach S , und die Gleichung der Hyperbel durch die Mittelpunkte der Sehnen vereinfacht sich auf

$$(23a) \quad \xi y = \frac{1}{2} S Y,$$

die Asymptote wird einfach

$$(23b) \quad x = X$$

und der Ausdruck des mittleren logarithmischen Debrementes

$$(23c) \quad \omega = \frac{\pi}{X} \sqrt{\frac{a b c}{d}}.$$

Die vier Parameter X , Y , S , ω der Gleichung (23) können explicite bestimmt werden, wenn die Form der Resonanzcurve durch Versuche gefunden ist. Dies kann durch Rechnung geschehen nach dem im § 33 angedeuteten Schema, oder einfacher graphisch mit Hülfe der in den Gleichungen (23a), (23b), (23c) enthaltenen geometrischen Eigenschaften der Curve. Die Fehler in den gefundenen Werthen bestimmen wir durch Vergleichung der Formeln (23) mit den früheren genaueren Formeln, welche wir dabei zweckmässig vereinfachen unter Beachtung der Kleinheit von ϵ . Sind X , Y , S , ω aus (23) erhalten, so werden die verbesserten Werthe, welche der genaueren Gleichung (19) genügen:

1) V. Bjerknes, Wied. Ann. **44**. p. 85. 1891.

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_c = X \left(1 + \frac{\varepsilon \omega}{\pi^2} \right) \\ Y_c = Y \left(1 + \frac{\varepsilon}{\omega} \frac{S}{X} \right) \\ S_c = S \left(1 - 2 \frac{\omega \varepsilon}{\pi^2} \frac{X}{S} \right) \\ \omega_c = \omega \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{\pi^2} \right) \end{array} \right.$$

Bemerken wir nun, dass die Sehne S von der Grössenordnung $3 (\omega/\pi)^2$ ist, so ersehen wir, dass die Fehler, welche die Substitution $\varepsilon = 0$ in den Werthen der Grössen X , Y , ω erzeugt, zweiter Ordnung sind, und nicht erster Ordnung, wie die Fehler in gewissen Ordinatenwerthen y . Der Werth der Grösse S dagegen, welcher selbst zweiter Ordnung ist, wird sehr unsicher. Diese Unsicherheit hat jedoch wenig Bedeutung, da die genaue Kenntniss von S wegen der complicirten physikalischen Bedeutung dieser Grösse keinen grösseren Nutzen haben kann.

37. Die Frage nach der Brauchbarkeit der Resonanzcurve für die Bestimmung der Parameter des Oscillators und des Resonators haben wir dadurch vollständig erledigt und die Resultate sind also die folgenden:

Das Ausmessen einer experimentell gefundenen Resonanzcurve gestattet die annähernde Bestimmung der drei Parameter X , Y , ω , von einem unbekannten Fehler zweiter Ordnung abgesehen; der vierte Parameter S wird mit grösserem Fehler behaftet sein.

Von diesen Parametern ist X eine der Grössen, welche wir suchen, nämlich die Schwingungsdauer des Isochronismus oder die Schwingungsdauer des constanten Leiters, ω ist der Mittelwerth von zwei gesuchten Grössen, der logarithmischen Decremente γ und δ und somit für die definitive Bestimmung dieser Grössen nützlich. Die Grösse Y endlich, der Electrometerausschlag bei Isochronismus, ist die Grösse, welche in der folgenden Vollendung der Theorie die wichtigste Rolle spielt.

Um aus einer experimentell gefundenen Resonanzcurve die approximativen Werthe dieser Parameter abzuleiten, kann man folgendermaassen verfahren:

Man zeichnet in der Curve (Fig. 3) eine Anzahl Sehnen parallel der X-Axe, und sucht die Mittelpunkte dieser Sehnen; diese Mittelpunkte bestimmen eine Hyperbel (23a), deren Asymptote (23b) man construirt. Diese Asymptote schneidet die Resonanzcurve in dem Isochronitätspunkte: die Abscisse dieses Punktes ist das gesuchte X , die Ordinate dieses Punktes ist das gesuchte Y , die horizontale Sehne durch diesen Punkt ist das gesuchte S .

Man misst so die vier Segmente a, b, c, d ab, worin sich die Ordinate Y und eine beliebige der Sehnen theilen, und bestimmt das mittlere logarithmische Decrement nach der Formel (23c).

Verbesserungen der in dieser Weise gefundenen Werthe können nachträglich geschehen, wenn man durch andere Versuche das logarithmische Decrement δ des constanten Leiters und den Zuwachscoefficienten γ_1 des logarithmischen Decrementes des veränderlichen Leiters gefunden hat und somit das in den Formeln (24) vorkommende ϵ kennt.

Fig. 3.

38. Die Brauchbarkeit der obigen Methode der Resonanzcurve ist nur durch die zwei Bedingungen des § 10 und durch die Vernachlässigung der höheren Glieder in den Entwicklungen (17) beschränkt.

Die letzterwähnten Vernachlässigungen können Zweifel über die Ausdehnung des Abscissenbereiches veranlassen, innerhalb welches unsere Sätze gültig sind. Praktische Bedeutung hat jedoch dieser Zweifel nicht, da man immer die Untersuchung der Resonanzcurve mit kurzen Sehnen in der Nähe vom Isochronitätspunkte anfangen kann und nur mit grösseren Sehnen solange fortsetzt, als sich keine systematischen Abweichungen in die erhaltenen Werthe der Parameter zeigen.

Um den Inhalt der Beschränkung in Bezug auf die Werthe von ω beurtheilen zu können, zeichnen wir (Fig. 4) eine Anzahl Resonanzcurven mit verschiedenen Werthen dieses Parameters

von $\omega=0,1$ zu $\omega=2$. Dabei haben wir S den Durchschnittswerth

$$S = 3 \left(\frac{\omega}{\pi} \right)^2 X$$

gegeben; die Werthe von x sind zwischen $1,2 X$ und $0,8 X$ gewählt, sodass an der Intervallgrenze

$$\left(\frac{x - X}{2 X} \right)^2 = \frac{1}{100}.$$

Wenn $\omega = 2$ ist, wird der Fehler $(\omega/2\pi)^2$ etwa $1/10$ betragen. In diesem Falle fällt

Fig. 4.

das Maximum der Curve weit ausserhalb der Schwingungsdauer $x = 1,2 X$. Das eigentlich charakteristische der Resonanzerscheinung, nämlich ein maximales Ansprechen des Resonators bei ungefähr gleicher Schwingungsdauer der zwei Instrumente, scheint fast vollständig verschwunden, und quantitative Verwendungen sind, wenn auch formell möglich, doch wenig empfehlenswerth.

Bei $\omega = 1$ ist der Factor $(\omega/2\pi)^2$ etwa $1/40$. Das Maximum der Curve ist noch um mehr als 10 Proc. von dem Isochronismus entfernt, sodass die Resonanz, obwohl

erkennbar, doch wenig charakteristisch ist, und die quantitative Verwendung noch wenig empfehlenswerth. Unsere Methode wird also schon in diesem Falle formell eine vier- bis fünfprocentige Genauigkeit geben.

Bei abnehmenden Werthen von ω wird die Resonanz immer mehr charakteristisch, und gleichzeitig nimmt die Genauigkeit unserer Formeln rasch zu. Wir dürfen deshalb folgendes aussagen:

Die Resonanzerscheinung wird sich im allgemeinen nur dann für quantitative Untersuchungen eignen, wenn der Mittelwerth der logarithmischen Decremente der zwei Leiter kleiner als 1 ist.

Da unsere Formeln noch bis zu diesem Grenzwerthe eine wenn auch rohe Brauchbarkeit haben, dürfen wir in den Bedingungen des § 10 keine wesentliche Beschränkung sehen.

IX. Theorie der isochronen Leiter.

39. Die Resonanzcurvenmethode gestattete also die approximative Bestimmung erstens der Schwingungsdauer X des Isochronismus, zweitens des Mittelwerthes ω der logarithmischen Decremente beider Leiter. Der nächste Schritt wird sein, die Einzelwerthe γ und δ der logarithmischen Decremente zu bestimmen. Dies wird man in verschiedener Weise durch Versuche mit isochronen Leitern erreichen können.

Die Theorie der isochronen Leiter ist in dem Specialfalle (16a) und (16b) unserer Hauptformel enthalten. Ersetzen wir den Ausdruck $(\mathfrak{A}/8\pi)^2 X^5$ durch K , so wird:

$$(25a) \quad I\gamma\delta(\gamma + \delta) = K.$$

Bei isochronen Leitern bleibt der Integraleffect der Resonatorschwingungen multiplicirt mit der Summe und dem Product der logarithmischen Decremente der beiden Leiter constant.

Diese Eigenschaft benutzen wir in folgender Weise:

Es sei wieder Y die Scalablesung, welche dem Integraleffecte der Resonatorschwingungen proportional ist. Wird die geometrische Configuration der beiden Leiter und die Intensität der Oscillatorerregungen ungeändert gelassen, während man das logarithmische Decrement des einen Leiters von δ zu δ_1 verändert, und beobachtet man dabei die Scalablesungen Y und Y_1 , so besteht die Relation:

$$(25b) \quad Y\gamma\delta(\gamma + \delta) = Y_1\gamma\delta_1(\gamma + \delta_1).$$

40. Die erwünschte Aenderung der Dämpfung ohne Configurationsveränderung des Leiters erreicht man leicht durch Austausch des Leitungsdrahtes des Leiters mit einem zweiten von gleichen Dimensionen, welcher anderen Widerstand oder andere Magnetisirbarkeit hat. Dabei tritt allerdings immer noch eine kleine Aenderung der Schwingungsdauer ein. Am besten benutzt man nur Versuche, wo diese Aenderung

unmerkbar ist. Liegt aber eine merkbare Aenderung der Schwingungsdauer vor, sodass der veränderliche Leiter von der Schwingungsdauer X auf die Schwingungsdauer X_1 zur Wiederherstellung des Isochronismus verstellt werden muss, so kann man nach den Sätzen des § 26 zu der Schwingungsdauer X zurückcorrigiren. Ist Y_1 die Ablesung bei der zu grossen Schwingungsdauer X_1 , so ist das corrigirte Y , welches in (25b) einzuführen ist:

$$(26a) \quad Y = Y_1 \left(1 - 5 \frac{X_1 - X}{X} \right)$$

im Falle der electrometrischen Messungen, und

$$(26b) \quad Y = Y_1 \left(1 - 3 \frac{X_1 - X}{X} \right)$$

im Falle der magnetischen oder thermischen Messungen.

41. Bei der Aufstellung der Gleichung (25a) ist der Correctionsfactor (15a)

$$1 + \frac{\gamma}{2\pi} \sin 2\alpha$$

nicht berücksichtigt. Hier ist γ das logarithmische Decrement des primären Leiters, woraus folgt, dass die Vernachlässigung keinen Einfluss hat, wenn man γ constant lässt, und also die Aenderungen der Dämpfung im secundären Leiter vornimmt. Macht man die Aenderung im primären Leiter, so hängt es von dem Werth der unbekannten Grösse α ab, inwieweit der Correctionsfactor Bedeutung erhält oder nicht. Setzen wir den ungünstigsten Fall voraus, dass $\alpha = \pi/4$, so muss der Zuwachs des logarithmischen Decrementes dividirt durch 2π neben der Einheit eine kleine Grösse sein.

Die Gleichungen (25) für isochrone Leiter sind also gültig unter den folgenden Bedingungen:

Werden die Abänderungen der Dämpfung im Resonator vorgenommen, so gilt die Gleichung, so lange $(\omega/2\pi)^2$ neben der Einheit klein ist.

Werden die Abänderungen im primären Leiter vorgenommen, so muss ausserdem beachtet werden, dass

$$\frac{\gamma_1 - \gamma}{2\pi} \sin 2\alpha$$

neben der Einheit klein ist, wo $\gamma_1 - \gamma$ den Zusatz zum logarithmischen Decrement des Oscillators bedeutet.

42. Beachtet man die so erwähnten Vorsichtsmaasregeln, so kann man durch successive Aenderungen der Decremente γ und δ beliebig viele Gleichungen von der Form (25b) erhalten. Dabei muss man aber genau beachten, ob alle Gleichungen voneinander unabhängig sind: man wird immer finden, dass im günstigsten Falle die Zahl der unbekannten Grössen um eins die Zahl der voneinander unabhängigen Gleichungen übersteigt.

Die Versuche mit isochronen Leitern genügen also auch nicht allein für die Bestimmung der logarithmischen Decremente der Leiter: zu den Gleichungen der Form (25) muss immer wenigstens eine in anderer Weise gefundene Beziehung gefügt werden. Man kann in mehrfacher Weise diese Beziehungen erhalten und somit eine grössere Anzahl mehr oder weniger verwandter Methoden zur Bestimmung der logarithmischen Decremente ausbilden.

X. Bestimmung der logarithmischen Decremente ausschliesslich durch Resonanzversuche.

43. Die in theoretischer Hinsicht allgemeinste Methode zur Bestimmung der logarithmischen Decremente ergibt sich aus der Combination der Resonanzcurvenversuche und der Versuche mit isochronen Leitern.

Man mache also folgende Versuche: Man bestimme die Resonanzcurve (0) Fig. 5, welche zwei Leiter geben, deren logarithmische Decremente γ und δ sein sollen. Man vergrössert die Dämpfung des einen Leiters von δ auf δ_1 und bestimmt die neue Resonanzcurve (1), welche immer kleinere Ordinaten als (0) haben wird. Nach den Regeln des § 37 bestimmt man die Parameter X , Y , ω , X_1 , Y_1 , ω_1 der beiden Curven (0) und (1). Eventuell wird man X_1 ein wenig grösser als X finden und führt deshalb nach einer der Formeln (26) die entsprechende Correction an Y_1 aus. Da es auf die relativen Höhen der Ordinaten Y und Y_1 besonders ankommt, so ist ein Vergleich derselben durch nachträgliche Versuche, sobald die gehörigen Schwingungsdauern X und X_1 bestimmt sind, besonders zu

Fig. 5.

empfehlen. Zur Bestimmung der zwei logarithmischen Decremente γ und δ und des Hilfsdecrementes δ_1 ergeben sich dann die drei folgenden linearen Gleichungen, deren letzte aus der Gleichung (25 b) der isochronen Leiter hervorgegangen ist:

$$(27a) \quad \begin{cases} \gamma + \delta = 2\omega \\ \gamma + \delta_1 = 2\omega_1 \\ Y\omega\delta = Y_1\omega_1\delta_1 \end{cases}$$

Diese Gleichungen geben durch Auflösung:

$$(27b) \quad \begin{cases} \gamma = 2 \frac{Y\omega^2 - Y_1\omega_1^2}{Y\omega - Y_1\omega_1} \\ \delta = 2 Y_1\omega_1 \frac{\omega_2 - \omega_1}{Y\omega - Y_1\omega_1} \\ \delta_1 = 2 Y\omega \frac{\omega_2 - \omega_1}{Y\omega - Y_1\omega_1} \end{cases}$$

44. Diese Methode ist am zuverlässigsten, wenn γ und δ ungefähr von derselben Grössenordnung sind. Man braucht dann nur dafür zu sorgen, dass die Differenz $\omega_1 - \omega$ nicht allzu klein neben ω sei, oder dass die Vergrösserung $\delta_1 - \delta$ von der Grössenordnung ω sei.

Ist aber δ sehr klein neben γ , so kann man δ auf den vielfachen Werth δ_1 vergrössern und folglich Y auf den vielmal kleineren Werth Y_1 verkleinern, ohne eine erhebliche Differenz $\omega_1 - \omega$ zu erhalten. Sind somit ω_1 und ω innerhalb der Fehlergrenze gleich, so besagen die Gleichungen (27 b), dass man innerhalb der Fehlergrenze $\gamma = 2\omega$ setzen darf, und dass δ und δ_1 unbestimmbare, aber neben γ klein sind. Ob dieser Fall vorliegt, lässt sich sofort aus der Form der Resonanzcurven ersehen. Reducirt man nämlich die Ordinaten der einen Curve, sodass sie, wie die Curven der Fig. 4, gleich hohe Isochronitätsordinaten erhalten, so gibt sich dieser Fall dadurch zu erkennen, dass beide Curven (0) und (1) gleich stumpf sind.

Ist umgekehrt δ sehr gross neben γ , und δ_1 durch Vergrösserung von δ entstanden, so erreicht man leicht eine messbare Differenz $\omega_1 - \omega$. In diesem Falle wird sich aber die dritte Gleichung (27 a) auf $Y\omega^2 = Y_1\omega_1^2$ reduciren, wonach die erste Gleichung (27 b) $\gamma = 0$ gibt; das heisst: γ ist neben δ und δ_1 klein und unbestimmbare, während die zwei ersten

Gleichungen (27a) die Näherungswerthe $\delta = 2\omega$, $\delta_1 = 2\omega_1$ für die zwei grossen Decremente geben.

Diese zwei illusorischen Fälle müssen natürlich vor allem vermieden werden, was immer gelingen wird, wenn man nach der folgenden Regel fortgeht:

Man bildet das Hilfsdecrement δ_1 durch Vergrösserung des kleinsten oder durch Verkleinerung des grössten Decrementes um einen Betrag von der Grössenordnung ω .

XI. Bestimmung der logarithmischen Decremente durch Messung der Widerstände der Leitungsdrähte und Resonanzversuche mit isochronen Leitern.

45. Unter den Ursachen der Dämpfung gibt es eine, deren Gesetze schon nach der alten Electrodynamik bekannt sind: die Umwandlung der electromagnetischen Energie in Joule'sche Wärme. Erreicht man die Abänderung der Dämpfung durch Austausch von Drähten mit bekannten Widerständen, so kann man die Dämpfungsdifferenzen berechnen nach den bekannten Formeln der alten Electrodynamik, und dadurch die nothwendigen supplementären Relationen zu den Gleichungen der isochronen Leiter hinzufügen.

Bezeichnen wir durch Index I denjenigen Theil des Decrementes, welcher durch die Entwicklung Joule'scher Wärme bedingt ist, durch Index H denjenigen Theil, welcher auf andere Ursachen, wie das Ausstrahlen von Hertz'schen Wellen, zurückzuführen ist. Dann ist

$$\delta = \delta_H + \delta_I.$$

Sind alle secundären Ursachen der Dämpfung vermieden, wie z. B. Entladungen in der Luft oder Bildung von Kathodenstrahlen, so wird δ_H das in § 3 erwähnte Hertz'sche *Decrement*. Ist nun der Zuwachs beim Uebergang zum Decremente δ_1 nur auf einen Zuwachs des Joule'schen Decrementes zu schreiben, so ist

$$\delta_1 = \delta_H + \delta'_I$$

und also wird die Differenz

$$(28a) \quad \eta = \delta_1 - \delta = \delta'_I - \delta_I$$

der Berechnung zugänglich, wenn man die Joule'schen Decremente δ_I und δ'_I berechnen kann.

46. Was die Berechnung der Joule'schen Decremente betrifft, werden wir nur die Formeln citiren, welche in den einfachsten Fällen zur Verwendung kommen.

Besteht der Leiter aus zwei durch eine lineare Leitung verbundenen Armaturen, so gibt die Thomson'sche Theorie der electrischen Schwingungen den folgenden Werth des Joule'schen Decrementes

$$(29a) \quad \delta_l = \frac{R X}{2 L},$$

wo X wie oben die Schwingungsdauer, L der Selbstinductionscoefficient und R der Widerstand des Drahtes sind.¹⁾ Durch die Formel $X = 2\pi \sqrt{LC}$, wo C die Capacität bedeutet, kann man eine der Grössen L oder X eliminiren, um nur die eventuell bekannten oder leicht bestimmbaren Grössen in den Formeln zu haben.

47. Behalten wir die Form (29a) bei, so muss erst der Selbstinductionscoefficient berechnet werden. Diese Berechnung vereinfacht sich dadurch, dass man meistens den Strom als vollkommen oberflächlich ansehen darf. Die Berechnung scheint aber mit unseren jetzigen Kenntnissen nur praktisch durchführbar, wenn der Stromkreis fast geschlossen ist, weil nur dann der Einfluss der Verschiebungsströme im Dielectricum vernachlässigt werden darf.²⁾ Die fast geschlossene Form, die man meistens dem secundären und jetzt auch mehr und mehr dem primären Leiter gibt, ist also in diesem Falle vortheilhaft.

Ist diese Bedingung erfüllt, so ist die Berechnung des Selbstinductionscoefficienten exact oder in beliebiger Annäherung durchführbar. Hat z. B. die Drahtleitung die Form eines ebenen Polygon, so führt die Berechnung des Kraft-

1) Hr. Drude gibt diese Formel, nach Einsetzen der Werthe von R und L als das logarithmische Decrement eines geschlossenen Resonators an, indem er das Hertz'sche Decrement verschwindend annimmt (Physik des Aethers p. 477; Wied. Ann. 153. p. 427. 1894). Dies ist jedoch, wie in der Einleitung bemerkt, nur dann richtig, wenn der Resonatordraht sehr grossen Widerstand hat. Die Uebereinstimmung der Drude'schen Formel mit dem unrichtigen, von mir früher angegebenen Decrement 0,002 beruht auf einem sonderbaren Zufall.

2) Vgl. Poincare, Les oscillations électriques, Chap. II.

stromes durch die vom Polygon begrenzte Fläche auf äusserst einfache Integrale; und die Berechnung für den Fall einer beliebigen ebenen krummlinigen Drahtleitung ist mit beliebiger Annäherung durchführbar. Ist der Leitungsdraht kreisförmig, der Fall, welcher natürlich das grösste Interesse darbietet, so ist nach Stefan ¹⁾

$$(29b) \quad L = 2l \log \text{nat} \frac{4}{\pi e^2} \frac{l}{\varrho},$$

wo l die Drahtlänge ist, ϱ der Radius des Drahtquerschnittes und π und e die zwei transcendenten Zahlen.

48. Bei unendlichen Schwingungszahlen ist der Strom streng oberflächlich, der Widerstand unendlich. Die Veränderungen, welche die Werthe der Selbstinductionen und des Widerstandes infolge eines endlichen aber kleinen Eindringens des Stromes erleiden, kann man nach Formeln von Lord Rayleigh und Stefan berechnen. Nach Lord Rayleigh berechnen wir erst die Grösse ²⁾

$$(29c) \quad P = \sqrt{\pi r \mu l X}$$

wo r der Widerstand gegen constanten Strom, μ die magnetische Permeabilität, l die Länge des Drahtes und X die Schwingungsdauer ist.

Ist nun L der Grenzwert des Selbstinductionscoefficienten bei streng oberflächlicher Stromvertheilung, so wird der corrigirte Werth L_c

$$(29d) \quad L_c = L + \frac{1}{2\pi} P.$$

Und der Widerstand des Drahtes wird:

$$(29e) \quad R = \frac{P}{X} + \frac{r}{4}.$$

Das letzte Glied $r/4$, wodurch Stefan ³⁾ die ursprüngliche Formel von Lord Rayleigh ergänzt hat, erweitert bedeutend das Gültigkeitsbereich der Formel für den Fall, dass X oder r sehr gross, oder der Drahtdurchmesser ϱ sehr klein ist.

In diesen Formeln ist die Anwendung des absoluten Maass-

1) Stefan, Wied. Ann. 41. p. 405. 1890.

2) Rayleigh, Philosophical Magazine 21. p. 390. 1886.

3) Stefan, Wied. Ann. 41. p. 411. 1890.

systemes voraussetzt. Als eine praktische Regel, um das Rechnen mit Potenzen von 10 zu vermeiden, kann man aber in den Formeln (29) r und R nach Ohm und X nach Tausend-milliontelsecunden rechnen.

49. Hat man somit nach (29a) drei Joule'sche Decremente δ_I , δ'_I und δ''_I berechnet, und die Differenzen derselben η und η_1 (28b), und hat man die drei entsprechenden Versuche mit isochronen Leitern gemacht, so bestehen die folgenden vier Gleichungen

$$(30) \quad \begin{cases} Y\delta(\gamma + \delta) = Y_1\delta_1(\gamma + \delta_1) = Y_2\delta_2(\gamma + \delta_2) \\ \delta_1 - \delta = \eta_1 \quad \delta_2 - \delta = \eta_2, \end{cases}$$

woraus man die zwei ursprünglichen Decremente γ und δ , und die zwei Hilfsdecremente δ_1 und δ_2 findet.

Eine Discussion wie diejenige des § 54 wird zeigen, dass die Gleichungen (30) illusorische Resultate geben, wenn die drei Decremente δ einer anderen Grössenordnung angehören als das γ . Also:

Will man nach (30) die Bestimmung aller Decremente erreichen, so muss man die Regel des § 44 befolgen.

50. Ein wichtiger Gegensatz besteht aber zwischen den Gleichungssystemen (27) und (30). In (27) war es das kleine Decrement, welches sich der Bestimmung entzog, und man fand einfach das grosse als

$$(31a) \quad \gamma = 2\omega.$$

Setzen wir aber in (30) voraus, dass sowohl δ als δ_1 neben γ klein sind, so reducirt sich die erste Gleichung angenähert auf $Y\delta = Y_1\delta_1$, und durch Einführung von $\delta_1 = \delta + \eta$ findet man:

$$(31b) \quad \delta = \eta \frac{Y_1}{Y - Y_1}.$$

Hier fällt also das grosse Decrement aus den Gleichungen fort, und man erreicht die Bestimmung des kleinsten Decrementes in äusserst einfacher Weise. Also: *Sind die zwei Leiter an Dämpfung sehr verschieden, so bestimmt man am einfachsten das grosse Decrement aus einer einzigen Resonanzcurve (31a) das kleine mittelst Formel (31b) nach der Widerstandsmethode.*

XII. Symmetrische Resonanzversuche.

51. Oben sind die zwei einfachsten Methoden beschrieben, welche jede für sich oder beide combinirt zu der Bestimmung der logarithmischen Decremente der zwei Leiter führen können. Wenn es darauf ankommt möglichst sichere und scharfe Bestimmungen zu erhalten, empfiehlt es sich diese Versuche in symmetrischer Weise auszuführen.

Die einfachste Gruppe symmetrischer Versuche mit isochronen Leitern ist die folgende: die Leiter haben ursprünglich die zwei Decremente γ und δ und der dabei erhaltene Electrometerausschlag sei I_{00} ; man behält γ unverändert, vergrößert das Decrement δ auf δ_1 , und findet den Electrometerausschlag I_{01} ; man lässt umgekehrt δ ungeändert, verändert γ auf γ_1 und findet den Electrometerausschlag I_{10} ; endlich vergrößert man die beiden Decremente auf γ_1 und δ_1 und findet den Ausschlag I_{11} . Die Gleichung der isochronen Leiter gibt dann für diese Versuchsreihe

$$(32a) \quad \begin{cases} I_{00} \gamma \delta (\gamma + \delta) = I_{01} \gamma \delta_1 (\gamma + \delta_1) = I_{10} \gamma_1 \delta (\gamma_1 + \delta) \\ \quad \quad \quad = I_{11} \gamma_1 \delta_1 (\gamma_1 + \delta_1). \end{cases}$$

Dies gibt drei Gleichungen zwischen den vier unbekannten. Durch zweckmässige Elimination kann man drei Gleichungen vierten Grades ableiten zur Bestimmung bez. der Verhältnisse γ/γ_1 , δ/δ_1 und γ/δ .

Zur Bestimmung sämtlicher unbekannten ist nur eine Hülfs Gleichung nothwendig. Durch eine durchgeführte Symmetrie der Versuche kann man leicht weiter erreichen, dass der Zuwachs $\gamma_1 - \gamma$ gleich $\delta_1 - \delta$ ist also

$$(32b) \quad \gamma_1 - \gamma = \delta_1 - \delta.$$

Schon die vier Gleichungen (32a) und (32b) genügen also zu der Bestimmung der vier Unbekannten. Nur insofern wird diese Bestimmung etwas beschwerlich, als sie auf der Auflösung von Gleichungen höheren Grades führt, welche jedoch leicht gelingt, wenn man nach Einsetzen der Zahlenwerthe der Grössen I , die bekannten Regeln für das Auflösen numerischer Gleichungen anwendet.

52. Denken wir uns nun weiter die Versuche insofern vervollständigt, dass die vier den Combinationen $\gamma \delta$, $\gamma \delta_1$, $\gamma_1 \delta$,

$\gamma_1 \delta_1$ entsprechenden Resonanzcurven experimentell bestimmt sind, und durch Ausmessen derselben die vier mittleren logarithmischen Decremente ω_{00} , ω_{01} , ω_{10} , ω_{11} gefunden. Wir können dann die folgenden vier Gleichungen aufschreiben

$$(32c) \quad \begin{cases} \gamma + \delta = 2 \omega_{00} \\ \gamma + \delta_1 = 2 \omega_{01} \\ \gamma_1 + \delta = 2 \omega_{10} \\ \gamma_1 + \delta_1 = 2 \omega_{11}. \end{cases}$$

Sehen wir vorläufig von der Symmetriegleichung (32b) ab, so stellen (32a) und (32c) sieben Gleichungen dar zwischen unseren vier Unbekannten. Von diesen sieben Gleichungen sind aber nur fünf voneinander unabhängig. Man kann zwei Beziehungen zwischen bekannten Grössen ableiten, nämlich

$$(33a) \quad \begin{aligned} \omega_{00} + \omega_{11} &= \omega_{01} + \omega_{10} \\ Y_{00} Y_{11} \omega_{00} \omega_{11} &= Y_{01} Y_{10} \omega_{01} \omega_{10} \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind in zwei Beziehungen wichtig: Sie geben vorerst ein werthvolles Kriterium dafür ab, ob die hier entwickelte Theorie mit der Erfahrung übereinstimmt. Ist diese Uebereinstimmung einmal bestätigt, so haben die Gleichungen (33a) dadurch eine grosse praktische Bedeutung, dass man sie verwenden kann, um das Beobachtungsmaterial zu verbessern, ehe man die Werthe der beobachteten Grössen in diejenigen Gleichungen einführt, welche zur Bestimmung der Unbekannten verwendet werden.

Besteht nun zugleich die Symmetriebeziehung (32b), so findet man noch eine Beziehung zwischen bekannten Grössen, nämlich

$$(33b) \quad \omega_{01} = \omega_{10}.$$

Endlich kann man noch die Versuche in der Weise vervollständigen, dass man durch Messung der Widerstände die Differenzen $\gamma_1 - \gamma$ und $\delta_1 - \delta$ bestimmt, sodass man zu den vorhergehenden Gleichungen noch die zwei folgenden fügen kann

$$(32d) \quad \begin{cases} \gamma_1 - \gamma = \eta \\ \delta_1 - \delta = \zeta. \end{cases}$$

wo, je nachdem die Symmetriebedingung (32b) erfüllt ist oder nicht, η und ζ einander gleich oder ungleich sind.

53. Führt man die Versuche nach diesem Plane aus, so wird man einerseits eine scharfe Prüfung der Uebereinstimmung der hier vorgeschlagenen Theorie mit der Erfahrung erreichen können. Andererseits wird die Combination aller dieser Versuche als Resultat die möglichst wahrscheinlichen Werthe von den gesuchten logarithmischen Decrementen geben. In der Berechnung verfolgt man am besten den folgenden Weg:

Erst benutzt man alle zwischen bekannten Grössen bestehenden Gleichungen zu einer Verbesserung des Beobachtungsmaterials. Dann kann man aus den voneinander unabhängigen Gleichungen vier auswählen, welche nach den gesuchten unbekannten linear sind, wie es nach den Vorgängen in den Abschnitten X oder XI immer möglich ist. Diese Gleichungen geben dann Annäherungswerthe für die vier unbekannten. Die Verbesserung dieser Annäherungswerthe bei der gleichzeitigen Berücksichtigung sämmtlicher voneinander unabhängigen Gleichungen kann nachher in bekannter Weise auf die Auflösung von nur linearen Gleichungen zurückgeführt werden.

XII. Absolute Messungen.

54. Alle oben entwickelte Methoden beruhen auf der Vergleichung von Electrometerausschlägen untereinander, also auf relativen Messungen. Dadurch haben wir angenäherte Bestimmungen sämmtlicher innerer Constanten unserer Leiter gewonnen. Es fehlt nur die Bestimmung der zwei äusseren Constanten $\mathfrak{M}$ und α , von welchen uns nur $\mathfrak{M}$ interessirt. Die Bestimmung dieses Parameters, des Intenitätsfactors, lässt sich erst durchführen, wenn man den absoluten Werth der Ausschläge des Electrometers oder des benutzten Messinstrumentes kennt.

Es sei c die Electrometerconstante; da wir das Instrument als ein idiostatisches Electrometer benutzen, so ist die Beziehung zwischen dem constanten Potentialunterschied V und dem Electrometerausschlag y

$$V^2 = c y.$$

Nun wird bei unseren Versuchen der Electrometerausschlag y durch den Impuls I des schwankenden Potentialunterschiedes

φ erzeugt; die Constante c kommt aber ausserhalb des Integralzeichens, sodass wir die Beziehung

$$I = c y$$

erhalten zwischen dem Integraleffect und dem Electrometerausschlag. Meistens beobachtet man in der Praxis nicht den Ausschlag für einen einzigen Integraleffect, sondern für eine Anzahl p solcher Effecte in der Stunde — einen für jeden primären Funken. Schreiben wir also $C = c/p$, so ist

$$(34a) \quad I = C y,$$

wo C die Electrometerconstante dividirt durch die Anzahl der Erregungen des Oscillators in der Secunde ist. Kennt man den Werth von C und hat man nach den oben gegebenen Methoden alle Grössen bestimmt, welche in den Ausdruck von I eingehen, bis auf den Intensitätsfactor $\mathfrak{A}$, so gestattet diese Gleichung die Bestimmung von $\mathfrak{A}$.

Am einfachsten benutzt man den Fall des Isochronismus. Man findet dann, indem man nach $\mathfrak{A}$ auflöst:

$$(34b) \quad \mathfrak{A} = 8\pi \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\pi} \sin 2\alpha\right) \sqrt{\gamma \delta (\gamma + \delta) C \bar{F}} \cdot X^{-\frac{1}{2}}.$$

Dieser Fall ist der einzige, dem wir begegnet sind, wo der unbekannte Parameter α grössere Bedeutung erhält, indem die Vernachlässigung desselben Fehler erster Ordnung in dem Werth von $\mathfrak{A}$ hervorbringen mag. In diesem Falle wird es deshalb besonders vortheilhaft sein, eine solche Aufstellung zu wählen, dass man den Werth von α voraussehen kann. Dies ist in zwei Fällen möglich: in genügender Nähe des Oscillators muss $\alpha = \pi/2$ sein, wie es die Thomson'sche Theorie der electrischen Schwingungen lehrt. In genügend grossem Abstand vom Oscillator darf man dagegen $\alpha = 0$ setzen. Ist einer von diesen Fällen realisirt, so ist einfach

$$(34c) \quad \mathfrak{A} = 8\pi \sqrt{\gamma \delta (\gamma + \delta) C \bar{F}} \cdot X^{-\frac{1}{2}}$$

wo rechts nur bekannte Grössen vorkommen.

XIV. Zur Theorie der Funkenbeobachtungen.

55. Man sieht sofort ein, dass man mit Hülfe der Formel (9a) eine Gleichung aufstellen kann, welche der Gleichung (25b) analog ist, und welche die Gleichung der isochronen Leiter

für den Fall der Funkenbeobachtungen darstellt. Durch Funkenmessungen bei Resonanz in Verbindung mit Widerstandsmessungen wird man deshalb, nach Analogie mit der in Abschnitt XI dargestellten Methode, die Bestimmung der logarithmischen Decremente beider Leiter erreichen können, obwohl man auf mathematisch weniger bequeme Gleichungen kommt.

56. Schwieriger ist aber die Theorie der Resonanzcurve. Um diese Theorie möglichst analog der electrometrischen Resonanzcurventheorie zu erhalten, wollen wir als Ordinaten die *Quadrate* der Funkenpotentiale wählen.

Betrachten wir erst den Fall, dass die beiden Dämpfungen gleich sind. Die Formel (10) gibt dann den Werth des Funkenpotentials M_m . In der Nähe des Isochronismus kann der Ausdruck von M_m^2 einigermaassen angenähert durch die folgende einfachere Formel dargestellt werden.

$$(35) \quad M_m^2 = \frac{\mathfrak{A}^2}{4} \frac{1}{m^2} \frac{1}{e^2} \frac{1}{(\theta \mu)^2 + n^2},$$

wo θ eine Constante ist, welcher man etwa den Werth 1.8 geben kann. Die Formel (35) hat, als Function von n betrachtet, dieselbe Form als die Formel (14). Behandeln wir deshalb (35) nach demselben Schema wie früher die Formel (14), so werden wir erst zu einer Gleichung von der Form (19) und später durch fortgesetzte Vereinfachung zu einer Gleichung von der Form (23) kommen, nur das überall ω durch $\theta \omega$ zu ersetzen ist.

Wir können also behaupten, dass die Gleichung der eben definirten Resonanzcurve angenähert in der Form

$$y = I \frac{(\theta \omega)^2 X^2 + \pi^2 S(x - X)}{(\theta \omega)^2 X^2 + \pi^2 (x - X)^2}$$

geschrieben werden kann, und dass die Bestimmung der Parameter X , I , ω nach der graphischen Methode des § 37 geschehen kann, nur dass die Formel (23c) durch

$$(36a) \quad \omega = \frac{\pi}{\theta X} \sqrt{\frac{a b c}{d}}$$

zu ersetzen ist.

Die Curve (36) ist stumpfer als die entsprechende electrometrische Curve mit demselben Werth von ω . Die Ursache dieses charakteristischen Unterschiedes ist offenbar in der Er-

scheinung der Schwebungen zu suchen. Verlassen wir nun den Fall der gleichen Dämpfung unter Beibehaltung des Werthes von ω , so werden die Schwebungen schwächer, die Curve wird spitzer und man muss in (36) kleinere Werthe von θ wählen, doch nie kleinere als 1, welches dem Falle der electrometrischen Resonanz entspricht. Durch numerische Rechnungen wird man sich überzeugen können, dass man die untere Grenze von θ noch etwa bis zu 1,1 erhöhen kann.

Wir schliessen also folgendes:

Die Gleichung der Resonanzcurve, für die als Ordinaten die Quadrate der secundären Funkenpotentiale verzeichnet werden, kann beiläufig in der Form (36) geschrieben und nach der Regel für die electrometrische Resonanzcurve behandelt werden. Die Grösse θ hängt von dem Unterschied der zwei logarithmischen Decremente ab und liegt etwa zwischen den Grenzen 1,8 und 1,1, wo die obere Grenze im Falle gleicher die untere im Falle sehr verschiedener Dämpfung zu benutzen ist.

57. Verwenden wir diesen Satz auf die von Hertz in seiner ersten Arbeit „Ueber sehr schnelle electrische Schwingungen“, Fig 10a¹⁾ gegebenen Resonanzcurve. Die Schwingungsdauer des Resonators setzen wir proportional der Drahtlänge, und die Funkenpotentiale nehmen wir proportional der Funkenlänge an. Wir zeichnen dann eine neue Curve, deren Ordinaten die Quadrate der Ordinaten der von Hertz angegebenen Curve sind, und finden nach unserer Regel

$$\omega = \frac{1}{\theta} 0,54,$$

welches für $\theta = 1,1$, $\omega = 0,5$, für $\theta = 1,8$, $\omega = 0,3$ gibt. Das mittlere logarithmische Decrement der damaligen Hertz'schen Instrumente ist, also zwischen diesen Grenzwerten und wahrscheinlich in der Nähe von 0,4 gewesen.

Später erwähnt Hertz, dass Vergrösserung des Widerstandes des Resonators bis auf das hundertfache die Funkenlänge nur sehr wenig beeinflusst hat. Vergleicht man diese Aussage mit den Funkenformeln (9), so schliesst man leicht,

1) Ausbreitung der electrischen Kraft p. 49.

dass das Oscillatordecrement γ gegenüber dem Resonatordecrement δ gross gewesen ist, sodass man γ mit 2ω identificiren und

$$\gamma = 0,8$$

als den wahrscheinlichsten Werth des logarithmischen Decrementes des damals von Hertz benutzten Oscillators annehmen kann.

Nimmt man endlich das hundertfache als eine quantitative Angabe an, und setzt man eine zehn- oder zwanzigprocentige Abnahme der Funkenlänge infolge der Widerstandsvergrösserung voraus, so kommt man auf eine untere Grenze des ursprünglichen Resonatordecrementes von der Ordnung 0,01, während wir als obere Grenze haben, dass δ neben γ klein sein soll und somit höchstens etwa $\gamma/10$ oder 0,08. Das Resonatordecrement hat somit wahrscheinlich nach Hundertsteln gezählt.

58. Funkenbeobachtungen können somit zur Orientirung über die Parameter der Instrumente dienen. Für das Gewinnen quantitativer Resultate werden jedoch im allgemeinen die electrometrischen oder die damit verwandten Methoden, deren Theorie wir oben entwickelt haben, vorzuziehen sein, und zwar sowohl aus mathematischen als aus physikalischen Gründen.

Vor allem muss man mit der Verwendung der Funkenmessungen deshalb vorsichtig sein, weil in die Formeln die *Funkenpotentiale* eingehen, während die *Funkenlängen* Gegenstand der Messung sind. Wenn wir wie oben nur die relativen Werthe der Funkenpotentiale brauchen, können grössere Fehler wahrscheinlich nicht verursacht werden. Die absolute Beziehung zwischen Funkenlänge und Potential ist aber nur unter statischen Verhältnissen und nicht für den Fall der secundären Hertz'schen Funken bekannt.¹⁾

1) *Anmerkung bei der Correctur.* — Nach den sehr bemerkenswerthen Arbeiten des Hrn. Jaumann (Wiener Berichte 97. p. 765. 1888 und 104 Abth. 2a. p. 7. 1895) auf welche ich eben aufmerksam gemacht worden bin, sind die Eigenschaften der Funken noch viel complicirter, als man sich bis jetzt vorgestellt hat, und die Funkenpotentiale sind nicht einmal unter statischen Verhältnissen sicher bekannt. Um so weniger darf es überraschen, dass die Funkenmessungen unter Benutzung der gewöhnlichen Tabellen der Funkenpotentiale so unrichtige Werthe der Resonatordecrement gegeben haben (vgl. Einleitung § 3).

Die wichtigste Verwendung unserer Funkenformeln wird deshalb die Aufsuchung dieser Beziehung sein: wenn man nach der electrometrischen Methode sämtliche Parameter des Oscillators und des Resonators bestimmt hat, inclusive des Intensitätsfactors $\mathfrak{A}$, werden die Formeln (9) unmittelbar die Funkenpotentiale geben. Die in der Einleitung erwähnte *Funkenfähigkeit* wird man in dieser Weise erschöpfend untersuchen können.

XV. Schluss.

Die Aufgabe, welche wir uns in der Einleitung gestellt, ist also mit Hülfe von Funkenmessungen schwer durchführbar. Für den Fall der electrometrischen oder verwandten Beobachtungsmethoden ist sie aber vollständig gelöst, und zwar genügen, glaube ich, die gegebenen Methoden, die Parameter der Hertz'schen Leiter zu finden, allen Ansprüchen, welche man an Einfachheit stellen kann. Die auszuführenden physikalischen und mathematischen Operationen sind die folgenden:

1. Als einziger vorbereitender Versuch calibriert man den einen Leiter, welcher an Form veränderlich ist, in Bezug auf die Schwingungsdauer durch Messen von Wellenlängen.

2. Man misst den Electrometerausschlag im Resonator bei verschiedenen Schwingungsdauern des veränderlichen Leiters (welcher der Resonator selbst oder der Oscillator sein kann). Man verzeichnet die Schwingungsdauern als Abscissen und die Electrometerausschläge als Ordinaten und findet durch die in § 37 angegebene Construction die Schwingungsdauer X des constanten Leiters, den entsprechenden Electrometerausschlag Y und den Mittelwerth ω der logarithmischen Decremente beider Leiter.

3. Man wiederholt diesen Versuch, nachdem man in dem einen Leiter den Leitungsdraht durch einen Draht von gleichen Dimensionen aber aus einem anderen Metalle ersetzt hat, und leitet aus der neuen Resonanzcurve angenähert dasselbe X , aber ein neues Y und ω ab. Durch Einsetzen dieser Werthe in die Gleichung (27) findet man die gesuchten logarithmischen Decremente γ und δ sammt dem Hilfsdecrement δ_1 .

4. Man kann nacheinander drei Leitungsdrähte von gleichen Dimensionen benutzen, aus den Formeln (29) die durch Wärmeentwicklung verursachten Decremente berechnen und drei Electrometerausschläge Y , Y_1 , Y_2 bei Isochronismus abmessen. Durch Einsetzen dieser Grössen in die Gleichungen (30) findet man die logarithmischen Decremente γ und δ , und die zwei Hilfsdecremente δ_1 und δ_2 .

5. Sind die zwei Decremente sehr verschieden, so kann man das grössere aus einer einzigen Resonanzcurve finden, Formel (31 a), das kleinere aus einem einzigen Specialfall der Methode 4, Formel (31 b).

6. Nachdem X , γ und δ gefunden sind, findet man aus einem der gemessenen Electrometerausschläge Y den Werth des Intensitätsfactors $\mathfrak{U}$ nach Formel (34 c), sofern man die Electrometerconstante C bestimmt hat.