Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades*).

Von Felix Klein in Göttingen.

Als *Coordinaten der geraden Linie im Raume* betrachtet man die relativen Werthe der aus den Coordinaten zweier Punkte oder zweier Ebenen gebildeten sechs zweigliederigen Determinanten. Zwischen denselben besteht identisch eine Relation zweiten Grades:

$$R = 0.$$

Indem sechs beliebig ausgewählte Grössen, welche diese Gleichung befriedigen, als Coordinaten einer geraden Linie angesehen werden können, ist es gestattet, von der Entstehungsweise der Liniencoordinaten aus den Coordinaten zweier Punkte oder Ebenen abzusehen, und die Liniencoordinaten als selbstständige homogene Veränderliche zu betrachten, welche einer Gleichung zweiten Grades zu genügen haben.

Eine weitere Gleichung zweiten Grades zwischen denselben:

$$\Omega = 0$$

bestimmt *einen Liniencomplex des zweiten Grades.*

Es liegt nahe, die beiden Gleichungen R und Ω durch eine lineare Substitution in solche zwei zu verwandeln, welche nur noch die Quadrate der Veränderlichen enthalten. Eine derartige Umformung ist bekanntlich immer und in einziger Weise möglich, vorausgesetzt, dass die Wurzelwerthe, welche die gleich Null gesetzte Determinante der Form $\Omega + \lambda P$ für λ ergiebt, sämmtlich von einander verschieden sind**). *Im Folgenden soll der geometrische Sinn dieser Transforma-*

---

*) Im Auszuge bereits mitgetheilt in den Gött. Nachrichten, 1869, p. 258.

**) In meiner Inaugural-Dissertation: *Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung zweiten Grades zwischen Liniencoordinaten auf eine canonische Form. Bonn,* 1868; habe ich die algebraische Durchführung dieser Transformation behandelt. Ich habe dort zugleich die im Texte ausgeschlossenen Fälle von Complexen zweiten Grades mit in Betracht gezogen und die ihnen entsprechenden canonischen Gleichungsformen aufgestellt.

tion erörtert werden. Indem wir solche Complexe zweiten Grades, bei welchen die in Rede stehende Umformung nicht möglich ist, von der Betrachtung ausschliessen, denken wir uns die beiden Formen R und Ω von vornheein in der vereinfachten Gestalt gegeben.

Es sei gleich hervorgehoben, dass diese Gleichungsform nicht nur für die Complexe zweiten Grades als solche, sondern auch für die mit diesen Complexen in enger Beziehung stehenden *Flächen vierter Ordnung und vierter Classe mit 16 Doppelebenen und 16 Doppelpunkten* von Wichtigkeit ist.

Die statt der ursprünglichen Liniencoordinaten eingeführten neuen Veränderlichen stellen, gleich Null gesetzt, lineare Complexe dar, welche in ausgezeichneter Weise zu einander gruppirt sind. In Bezug auf dieselben ordnen sich die geraden Linien des Raumes zu Systemen von 32, die Ebenen und Punkte desselben zu Systemen von 16 Ebenen und 16 Punkten zusammen. Die Beziehung der 16 Ebenen und 16 Punkte eines solchen Systems zu einander ist dieselbe, wie die der 16 Doppelebenen und 16 Doppelpunkte jener Flächen vierter Ordnung und vierter Classe.

Die fundamentale Bedeutung dieser linearen Complexe für den Complex zweiten Grades ist die, dass für alle Elemente, welche einander durch die linearen Complexe zugeordnet werden, die Beziehung zu dem Complexe zweiten Grades dieselbe ist. Ein Gleiches, wie für den Complex zweiten Grades, gilt für die durch denselben bestimmte Fläche der vierten Ordnung und vierten Classe. Es folgt hieraus eine Reihe von Theoremen sowohl für jene Complexe als für diese Flächen.

Die algebraische Darstellung der bei diesen geometrischen Betrachtungen auftretenden Gebilde gestaltet sich sehr einfach. Insbesondere stellt sich die Schaar von Complexen zweiten Grades, welche zu derselben Fläche vierter Ordnung und vierter Classe gehören, auf dieselbe Art durch einen willkürlichen Parameter dar, wie ein System confocaler Curven oder Flächen zweiten Grades.

Es sei noch bemerkt, dass wir von zwei einander reciprok entgegengesetzten Sätzen meistens nur den einen aufgenommen haben, ohne ausdrücklich auf den anderen hinzuweisen.

I.

Vorbereitende Betrachtungen.

1. Die Coordinaten zweier Punkte einer geraden Linie seien durch:

$$x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ x_4\ ,$$
$$y_1\ ,\ y_2\ ,\ y_3\ ,\ y_4\ ,$$

die Coordinaten zweier Ebenen derselben geraden Linie durch:

$$u_1\ ,\ u_2\ ,\ u_3\ ,\ u_4\ ,$$
$$v_1\ ,\ v_2\ ,\ v_3\ ,\ v_4\ ,$$

bezeichnet. Als Coordinaten der geraden Linie sind dann die Determinanten:

$$p_{ik} = x_i\, y_k - y_i\, x_k\ ,$$

oder die Determinanten:

$$q_{ik} = u_i\, v_k - v_i\, u_k$$

zu betrachten. Dabei ist:

$$p_{ik} + p_{ki} = 0 \quad , \quad q_{ik} + q_{ki} = 0\,.$$

Nach Plücker nennt man die Coordinaten p_{ik} *Strahlencoordinaten*, die Coordinaten q_{ik} *Axencoordinaten.*

Unter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Zahlen $1, 2, 3, 4$ in beliebiger Reihenfolge verstanden, hat man die folgenden Identitäten:

$$P \equiv p_{\alpha\beta}\, p_{\gamma\delta} + p_{\alpha\gamma}\, p_{\delta\beta} + p_{\alpha\delta}\, p_{\beta\gamma} = 0\,,$$
$$Q \equiv q_{\alpha\beta}\, q_{\gamma\delta} + q_{\alpha\gamma}\, q_{\delta\beta} + q_{\alpha\delta}\, q_{\beta\gamma} = 0\,,$$

die gemeinsam durch das Symbol:

$$R = 0$$

bezeichnet sein mögen.

In dieser Bezeichnung ist:

$$\varrho\, p_{ik} = \frac{\partial Q}{\partial q_{ik}} \quad , \quad q_{ik} = \varrho\, \frac{\partial P}{\partial p_{ik}}\,,$$

wo ϱ einen Proportionalitätsfactor bedeutet.

Eine gerade Linie, deren Coordinaten $p_{ik}^{(\alpha)}$, $q_{ik}^{(\alpha)}$ sind, werde im Folgenden durch $(r^{(\alpha)})$ bezeichnet. Statt $p_{ik}^{(\alpha)}$, $q_{ik}^{(\alpha)}$ werde in solchen Fällen, in welchen die Unterscheidung zwischen Strahlen- und Axencoordinaten unnöthig ist, $r_{ik}^{(\alpha)}$ geschrieben.

2. Diese Bezeichnungsweise vorausgesetzt, schreibt sich die Bedingung dafür, dass zwei gerade Linien $(r), (r')$ sich schneiden, unter den folgenden Formen:

$$\Sigma\, p_{ik}\, \frac{\partial P'}{\partial p'_{ik}} = 0 \quad , \quad \Sigma\, p'_{ik}\, \frac{\partial P}{\partial p_{ik}} = 0\,,$$
$$\Sigma\, q_{ik}\, \frac{\partial Q'}{\partial q'_{ik}} = 0 \quad , \quad \Sigma\, q'_{ik}\, \frac{\partial Q}{\partial q_{ik}} = 0\,,$$
$$\Sigma\, p_{ik}\, q'_{ik} = 0 \quad , \quad \Sigma\, p'_{ik}\, q_{ik} = 0\,.$$

Drei gerade Linien (r), (r'), (r''), die sich gegenseitig schneiden, haben entweder einen Punkt oder eine Ebene gemeinsam. Je nachdem das Eine oder das Andere stattfindet, verschwindet der erste oder der zweite Factor der vier Producte:

$$\Sigma \pm p_{\alpha\beta}\, p'_{\alpha\gamma}\, p''_{\alpha\delta} \cdot \Sigma \pm p_{\gamma\delta}\, p'_{\delta\beta}\, p''_{\beta\gamma}\,,$$

die sich auch unter einer der folgenden Formen darstellen lassen:

$$\Sigma \pm p_{\alpha\beta}\, p'_{\alpha\gamma}\, p''_{\alpha\delta} \;\cdot\; \Sigma \pm q_{\alpha\beta}\, q'_{\alpha\gamma}\, q''_{\alpha\delta},$$
$$\Sigma \pm q_{\gamma\delta}\, q'_{\delta\beta}\, q''_{\beta\gamma} \;\cdot\; \Sigma \pm q_{\alpha\beta}\, q'_{\alpha\gamma}\, q''_{\alpha\delta},$$
$$\Sigma \pm q_{\gamma\delta}\, q'_{\delta\beta}\, q''_{\beta\gamma} \;\cdot\; \Sigma \pm p_{\gamma\delta}\, p'_{\delta\beta}\, p''_{\beta\gamma}.$$

Sind (r), (r'), (r'') gerade Linien, welche innerhalb derselben Ebene durch einen Punkt hindurchgehen, so verschwinden sämmtliche aus den Coordinaten derselben gebildete dreigliederige Determinanten, und man kann setzen:

$$r_{ik} = \lambda r'_{ik} + \mu r''_{ik}.$$

Es seien (r'), (r''), (r''') gerade Linien, welche in einer Ebene liegen oder durch einen Punkt hindurchgehen. Dann sind die Coordinaten einer beliebigen geraden Linie (r), welche in derselben Ebene liegt, bezüglich durch denselben Punkt hindurchgeht, darstellbar durch

$$r_{ik} = \lambda r'_{ik} + \mu r''_{ik} + \nu r'''_{ik}.$$

3. Wenn in den Ausdruck R an Stelle der Coordinaten einer geraden Linie die in die Gleichung eines Complexes ersten Grades eingehenden Constanten gesetzt werden, entsteht ein im Allgemeinen nicht verschwindender Ausdruck, welcher *die Invariante des Complexes* genannt werden mag. Das Verschwinden derselben sagt aus, dass der Complex die Gesammtheit aller gerader Linien umfasst, welche eine feste gerade Linie schneiden, deren Coordinaten die Constanten des Complexes sind, dass der Complex ein sogenannter *specieller* Complex ist.

Als *simultane Invariante zweier linearer Complexe* sei der Ausdruck bezeichnet, welcher entsteht, wenn man in den bilinear geschriebenen Ausdruck R die Constanten zweier linearer Complexe einträgt.

Das Verschwinden der simultanen Invariante zweier Complexe drückt eine Beziehung zwischen denselben aus, welche als *Involution* bezeichnet werden mag.

Sind beide lineare Complexe specielle, so ist das Verschwinden der simultanen Invariante die Bedingung dafür, dass sich die durch dieselben dargestellten geraden Linien schneiden. Ist nur einer der beiden Complexe ein specieller, so sagt das Verschwinden der simultanen Invariante aus, dass die durch denselben dargestellte gerade Linie dem anderen Complexe angehört.

In dem Folgenden sei angenommen, dass keiner der zu betrachtenden Complexe ein specieller sei.

Alle geraden Linien, welche zwei linearen Complexen gemeinschaftlich angehören, schneiden zwei feste gerade Linien, *die Directricen der durch die beiden Complexe bestimmten Congruenz.* Liegen die beiden Complexe in Involution, so sind diejenigen beiden Punkte, welche in ihnen einer beliebigen Ebene entsprechen, harmonisch zu denjenigen beiden Punkten, in welchen die Ebene von den beiden Directricen geschnitten wird. Lässt man sich eine Ebene um eine beiden Complexen gemeinsame gerade Linie drehen, so sind die Punktenpaare, welche der Ebene in ihren verschiedenen Lagen entsprechen, auf dieser geraden Linie in Involution. Einem jeden der beiden Punkte, welche durch die beiden Complexe in einer beliebigen Ebene bestimmt werden, entspricht in denselben noch eine zweite Ebene. Diese Ebene ist für beide Punkte dieselbe.

Die Ebenen und Punkte des Raumes ordnen sich mit Bezug auf zwei lineare Complexe, welche in Involution liegen, in Gruppen von zwei Ebenen und zwei auf der Durchschnittslinie derselben liegenden Punkten.

Mit Bezug auf drei gegenseitig in Involution liegende lineare Complexe ordnen sich die Ebenen und Punkte des Raumes zu Tetraedern zusammen, welche sich in Bezug auf die durch die drei linearen Complexe bestimmte Fläche zweiten Grades conjugirt sind. Die drei Punkte, welche einer Seitenfläche eines solchen Tetraeders in den drei Complexen entsprechen, sind die drei in derselben liegenden Eckpunkte des Tetraeders; umgekehrt sind die drei Ebenen, welche einem Eckpunkte entsprechen, die drei durch denselben hindurchgehenden Seitenflächen.

4. Die Liniencoordinaten r_{ik} stellen die mit gewissen (nicht vollständig willkürlichen) Constanten multiplicirten Momente der zu bestimmenden geraden Linie mit Bezug auf die sechs Kanten des Coordinatentetraeders dar. Wir fragen nach der Bedeutung einer allgemeinen linearen Transformation der Liniencoordinaten.

Werden in die Gleichung eines linearen Complexes die Coordinaten einer gegebenen geraden Linie eingesetzt, so ist der resultirende Ausdruck dem Momente der gegebenen geraden Linie in Bezug auf diejenige gerade Linie, welche derselben in dem linearen Complexe conjugirt ist, proportional.

Die Einführung linearer Functionen der Liniencoordinaten an Stelle dieser Coordinaten kommt darauf hinaus, als Bestimmungsstücke der geraden Linie die mit willkürlichen Constanten multiplicirten Momente derselben in Bezug auf die ihr in sechs gegebenen linearen Complexen conjugirten geraden Linien zu betrachten.

Wenn man die durch eine lineare Substitution eingeführten neuen Veränderlichen in die zwischen den ursprünglichen Liniencoordinaten bestehende Identität einführt, erhält man einen Ausdruck des zweiten Grades in diesen Veränderlichen, der wieder mit R bezeichnet sein mag, dessen Verschwinden die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass sechs, sonst beliebig gegebene Werthe der Veränderlichen auf eine gerade Linie bezogen werden können.

Dieser Ausdruck R hat ganz dieselbe Bedeutung, wie der aus den früheren Coordinaten gebildete. So wie sich früher Strahlen- und Axencoordinaten entsprachen, entsprechen sich jetzt die neuen Coordinaten und die nach denselben genommenen partiellen Differentialquotienten von R.

Die Form von R giebt sofort Aufschluss über die Art und die gegenseitige Lage der für die Coordinatenbestimmung zu Grunde gelegten Complexe.

Insbesondere ist klar, dass, wenn R, wie es bei den ursprünglichen Coordinaten der Fall war, nur drei Glieder enthält, die neuen Veränderlichen wiederum die Momente der zu bestimmenden geraden Linie in Bezug auf die Kanten eines Tetraeders sind.

II.

Das System der sechs Fundamentalcomplexe.

5. Die eingehends erwähnte Normal-Gleichungsform für Complexe des zweiten Grades führt zur Untersuchung solcher linearer Functionen der Liniencoordinaten, in welchen sich die Bedingungsgleichung $R = 0$ als Summe der mit passenden Constanten multiplicirten Quadrate schreibt. Gleich Null gesetzt, stellen dieselbe sechs lineare Complexe dar, welche *die sechs Fundamentalcomplexe* genannt werden sollen.

Dieselben seien durch:

$$x_1 = 0 \ , \ x_2 = 0 \ , \ x_3 = 0 \ , \ x_4 = 0 \ , \ x_5 = 0 \ , \ x_6 = 0$$

bezeichnet und die Symbole x gleich mit solchen Constanten multiplicirt gedacht, dass sich die Bedingungsgleichung unter der folgenden Form schreibt:

$$(1) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0.$$

Das System dieser Veränderlichen hängt von 15 Constanten ab.

Die Invariante eines linearen Complexes:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_6 x_6 = 0$$

ist in demselben dargestellt durch:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_6^2,$$

und die simultane Invariante zweier lineare Complexe:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_6 x_6 = 0,$$
$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_6 x_6 = 0,$$

durch:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_6 b_6 .$$

Es folgt hieraus zunächst, dass die Multipla der x so gewählt sind, dass die Invarianten sämmtlicher Fundamentalcomplexe der positiven Einheit gleich werden. Ferner folgt, dass die simultane Invariante zweier beliebiger Fundamentalcomplexe verschwindet.

Je zwei der sechs Fundamentalcomplexe liegen in Involution.

Die Bedingungsgleichung:

$$R = 0,$$

wie sie zwischen den ursprünglichen Liniencoordinaten stattfand, umfasste die drei Producte von jedesmal zwei der paarweise gruppirten sechs Veränderlichen. Wenn dieselbe also durch eine *reelle* lineare Substitution in der Art transformirt wird, dass sie nur die Quadrate der Variabeln enthält, so müssen sich unter diesen Quadraten gleich viele positive und negative finden. Indem ferner die Summe der Quadrate zweier conjugirt imaginärer Ausdrücke gleichwerthig ist der Summe eines positiven und eines negativen reellen Quadrates, ergiebt sich das Folgende:

Es kann eine beliebige (gerade) Anzahl der sechs Fundamentalcomplexe imaginär sein.

Die Symbole x, welche reellen Fundamentalcomplexen entsprechen, sind so gewählt, dass die Hälfte von ihnen reelle, die andere Hälfte rein imaginäre Coëfficienten enthält.

Und hieraus:

Die reellen Fundamentalcomplexe sondern sich in zwei gleich zahlreiche Gruppen. Die Complexe der einen Gruppe sind rechts-, die der anderen sind linksgewunden).*

Die sechs Fundamentalcomplexe mögen im Folgenden einfach durch die Zahlen $1, 2, \ldots, 6$ bezeichnet sein, und es bleibe unberücksichtigt, ob sich unter denselben imaginäre finden oder nicht.

6. Die Directricen der Congruenz der beiden Fundamentalcomplexe $(1, 2)$ haben offenbar als Coordinaten:

$$\varrho x_1 = 1\ ,\ \varrho x_2 = \pm\, i\ ,\ \varrho x_3 = 0\ ,\ \varrho x_4 = 0\ ,\ \varrho x_5 = 0\ ,\ \varrho x_6 = 0.$$

Die Directricen der Congruenz zweier Fundamentalcomplexe gehören den übrigen vier Fundamentalcomplexen an.

Die Gesammtheit der geraden Linien, welche eine der beiden Directricen schneiden, ist dargestellt durch:

$$x_1^2 + x_2^2 = 0,$$

oder, was dasselbe ist, durch:

$$x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0.$$

Die sechs Fundamentalcomplexe bestimmen $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ lineare Congruenzen, deren 30 Directricen in ausgezeichneter Weise gruppirt sind.

*) Plücker. Neue Geometrie n. 47.

Indem die Directricen der Congruenz (1, 2) den Complexen 3, 4, 5, 6 angehören, werden sie von den 12 Directricen der $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ durch dieselben bestimmten Congruenzen geschnitten.

Je zwei zusammengehörige der 30 Directricen werden von 12 der übrigen geschnitten.

Von den Directricen einer der drei Congruenzen (1 , 2), (3 , 4), (5 , 6) schneidet jede die Directricen der anderen beiden Congruenzen.

Die Directricen solcher drei Congruenzen, welche zusammen von sämmtlichen sechs Fundamentalcomplexen abhängen, bilden die Kanten eines Tetraeders.

Hiermit in Uebereinstimmung schreibt sich die Bedingungsgleichung:

$$R = 0$$

in den folgenden Veränderlichen:

$$y_1 = x_1 + ix_2 \quad , \quad y_3 = x_3 + ix_4 \quad , \quad y_5 = x_5 + ix_6 ,$$
$$y_2 = x_1 - ix_2 \quad , \quad y_4 = x_3 - ix_4 \quad , \quad y_6 = x_5 - ix_6 ,$$

welche, gleich Null gesetzt, die betreffenden Directricen darstellen, in der für die Kanten eines Tetraeders charakteristischen Form:

$$y_1 y_2 + y_3 y_4 + y_5 y_6 = 0.$$

Die Gesammtheit der geraden Linien, welche in einer Seitenfläche des Tetraeders liegen oder durch einen Eckpunkt desselben gehen, ist dargestellt durch:

$$x_1^2 + x_2^2 = 0,$$
$$x_3^2 + x_4^2 = 0,$$
$$x_5^2 + x_6^2 = 0.$$

Indem sich sechs Elemente auf 15 verschiedene Weisen in drei Gruppen von zwei theilen lassen, bilden die 30 Directricen die Kanten von 15 Tetraedern. Diese Tetraeder mögen *die Fundamentaltetraeder* heissen. Die Eckpunkte und Seitenflächen dieser Tetraeder sind sämmtlich verschieden.

Je zwei zusammengehörige Directricen gehören als gegenüberstehende Kanten dreien der Fundamentaltetraeder an. Die zwölf Directricen, welche die angenommenen beiden schneiden, sind die noch übrigen 3 . 4 Kanten dieser Tetrader. Die drei Tetraeder bestimmen auf jeder der beiden Directricen sechs paarweise zusammengehörige Punkte. Indem die Fundamentalcomplexe gegenseitig in Involution liegen, sind zwei beliebige der drei Paare gegen einander harmonisch. Ein Gleiches gilt für die sechs Seitenflächen der Tetraeder, die sich nach einer beliebigen der beiden Directricen schneiden*).

*) Es geht hieraus hervor, dass die drei Tetraeder, welche zwei gegenüber-

Mit Bezug auf ein beliebiges der fünfzehn Fundamentaltetraeder theilen sich die vierzehn übrigen in zwei Gruppen von 6 und 8. Die Tetraeder der ersten Gruppe haben mit dem gegebenen zwei gegenüberstehende Kanten gemein, die der zweiten Gruppe nicht.

7. Die sechs Directricen (1 , 2), (3 , 4), (5 , 6), welche ein Tetraeder bilden, haben die folgenden Coordinaten:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
(1 , 2)	I	1	i	0	0	0	0
	II	1	$-i$	0	0	0	0
(3 , 4)	III	0	0	1	i	0	0
	IV	0	0	1	$-i$	0	0
(5 , 6)	V	0	0	0	0	1	i
	VI	0	0	0	0	1	$-i$.

Welche von drei sich schneidenden dieser Directricen einen Punkt, welche eine Ebene gemeinschaftlich haben, kann nur dann entschieden werden, wenn der explicite Ausdruck der Veränderlichen $x_1, \ldots, x_6$ in den ursprünglichen Liniencoordinaten gegeben ist. Es mögen I, III, V durch einen Eckpunkt des Tetraeders gehen, dann liegen II, IV, VI in der gegenüberstehenden Seitenfläche. Ob drei sich gegenseitig schneidende gerade Linien (x, x', x'') einen Punkt oder eine Ebene gemeinschaftlich haben, bestimmt sich dann, gemäss dem Obigen, danach, ob der erste oder der zweite der folgenden beiden Ausdrücke verschwindet:

$$\begin{vmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 + ix_4 & x_5 + ix_6 \\ x_1' + ix_2' & x_3' + ix_4' & x_5' + ix_6' \\ x_1'' + ix_2'' & x_3'' + ix_4'' & x_5'' + ix_6'' \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} x_1 - ix_2 & x_3 - ix_4 & x_5 - ix_6 \\ x_1' - ix_2' & x_3' - ix_4' & x_5' - ix_6' \\ x_1'' - ix_2'' & x_3'' - ix_4'' & x_5'' - ix_6'' \end{vmatrix}.$$

Es ist dabei gestattet, das Vorzeichen von i in zwei beliebigen Verticalreihen gleichzeitig zu ändern.

---

stehende Kanten gemein haben, nie zugleich reell sein können. Bezüglich der Realität der hier vorkommenden Gebilde ist überhaupt das Folgende zu bemerken. Die sechs Fundamentalcomplexe sind entweder alle reell, oder es sind zwei, oder vier, oder alle imaginär. Diesen Annahmen entsprechend sind

18 , 10 , 6 , 6

der 30 Directricen und

6 , 2 , 1 , 1

der 15 Fundamentaltetraeder reell.

Aehnliche Kriterien erhält man in Bezug auf jedes der vierzehn übrigen Fundamentaltetraeder.

8. Durch einen jeden der 60 Eckpunkte der 15 Fundamentaltetraeder gehen ausser den drei zugehörigen noch weitere 12 der 60 Seitenflächen, die in drei Gruppen von je vier gesondert sind, welche sich bezüglich nach einer der drei durch den Eckpunkt hindurchgehenden Directricen schneiden. Eine jede derselben schneidet eine beliebige der drei zu dem Eckpunkte zugehörigen Seitenflächen in einer neuen geraden Linie. Der Punkt, in welchem dieselbe der dritten in dieser Seitenfläche liegenden Directrix begegnet, ist einer der 59 weiteren Eckpunkte.

Eine derartige Linie ist die folgende:

$$\frac{x_1}{0} \quad \frac{x_2}{0} \quad \frac{x_3}{1} \quad \frac{x_4}{i} \quad \frac{x_5}{1} \quad \frac{x_6}{i}$$

Dieselbe ist die Verbindungslinie der beiden Eckpunkte:

$$(x_1 + ix_2 \;,\; x_3 + ix_4 \;,\; x_5 + ix_6),$$
$$(x_1 - ix_2 \;,\; x_3 + ix_6 \;,\; x_5 + ix_4),$$

und die Durchschnittslinie der beiden Seitenebenen:

$$(x_1 - ix_2 \;,\; x_3 + ix_4 \;,\; x_5 + ix_6),$$
$$(x_1 + ix_2 \;,\; x_3 + ix_6 \;,\; x_5 + ix_4).$$

Solcher geraden Linien gehen durch den angenommenen Eckpunkt 12. Es giebt ihrer im Ganzen

$$\frac{12 \cdot 60}{2} = 360.$$

Die 12 Seitenflächen, welche ausser den drei zugehörigen durch einen Eckpunkt hindurchgehen und die in drei Büschel von vier vertheilt sind, schneiden sich zu je drei nach 16 weiteren Linien, deren jede ausser dem angenommenen Eckpunkte zwei weitere enthält. In der That, die gerade Linie:

$$\frac{x_1}{1} \quad \frac{x_2}{i} \quad \frac{x_3}{1} \quad \frac{x_4}{i} \quad \frac{x_5}{1} \quad \frac{x_6}{i}$$

enthält die drei Eckpunkte:

$$(x_1 + ix_2 \;,\; x_3 + ix_4 \;,\; x_5 + ix_6)$$
$$(x_1 + ix_4 \;,\; x_3 + ix_6 \;,\; x_5 + ix_2)$$
$$(x_1 + ix_6 \;,\; x_3 + ix_2 \;,\; x_5 + ix_4),$$

und liegt in den drei Seitenflächen:

$$(x_1 + ix_2 \;,\; x_3 + ix_6 \;,\; x_5 + ix_4),$$
$$(x_1 + ix_4 \;,\; x_3 + ix_2 \;,\; x_5 + ix_6),$$
$$(x_1 + ix_6 \;,\; x_3 + ix_4 \;,\; x_5 + ix_2).$$

Solcher gerader Linien giebt es $\frac{16 \cdot 60}{3} = 320.$

In den vorstehenden Betrachtungen können überall die Worte Eckpunkt und Seitenfläche vertauscht werden.

Die 30 Directricen der 15 durch die 6 Fundamentalcomplexe bestimmten Congruenzen sind die Kanten von 15 (Fundamental-) Tetraedern.

Durch jeden der 60 Eckpunkte der Fundamentaltetraeder gehen 15 Seitenflächen; in jeder der 60 Seitenflächen liegen 15 Eckpunkte.

Es giebt 360 gerade Linien, welche je zwei der 60 Eckpunkte der Fundamentaltetraeder enthalten. Dieselben geraden Linien bilden den Durchschnitt von je zwei der 60 Seitenflächen.

Es giebt 320 gerade Linien, auf welchen je drei der 60 Eckpunkte der Fundamentaltetraeder liegen. Nach denselben geraden Linien schneiden sich je drei der 60 Seitenflächen.

Die 30 Directricen der 15 durch die sechs Fundamentalcomplexe bestimmten Congruenzen enthalten je sechs der 60 Eckpunkte und sind der Durchschnitt von je sechs der 60 Seitenflächen.

Die sechs Eckpunkte, sowie die sechs Seitenflächen gehören paarweise zusammen. Je zwei Paare sind zu einander harmonisch.

9. Je drei der Fundamentalcomplexe, beispielsweise 1, 2, 3, bestimmen eine Fläche des zweiten Grades vermöge der Linien ihrer einen Erzeugung. Die Directricen der Congruenzen (2, 3), (3, 1) (1, 2) sind Linien zweiter Erzeugung. Indem diese Directricen den Complexen 4, 5, 6 angehören, ist klar, dass die Complexe 4, 5, 6 dieselbe Fläche zweiten Grades vermöge der Linien ihrer anderen Erzeugung bestimmen.

Die sechs Complexe lassen sich auf $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2} = 10$fache Weise in zwei Gruppen von drei theilen. *Je zwei zusammengehörige Gruppen bestimmen dieselbe Fläche des zweiten Grades vermöge ihrer verschiedenen Erzeugungen.*

Die zehn so definirten Flächen mögen die zehn *Fundamentalflächen* heissen.

Je zwei zusammengehörige der 30 Directricen gehören vier der Fundamentalflächen als Erzeugende an. So liegt das Directricenpaar (1, 2) auf den Flächen (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 6). In Bezug auf die übrigen sechs Fundamentalflächen sind die Directricen (1, 2) einander conjugirte Polaren.

In Bezug auf eins der Fundamentaltetraeder theilen sich die Fundamentalflächen in zwei Gruppen. Die sechs Flächen der einen Gruppe enthalten je vier der sechs Tetraederkanten, in Bezug auf die Flächen der anderen Gruppe ist das Tetraeder sich selbst conjugirt.

Um eine der Fundamentalflächen, etwa $(1, 2, 3) \equiv (4, 5, 6)$, darzustellen, diene die Bedingung, welche ausspricht, dass eine gerade

Linie die Fläche berührt, mit anderen Worten, die Complexgleichung der Fläche*). Dieselbe wird:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

oder, was offenbar dasselbe ist:

$$x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0.$$

10. In Bezug auf die sechs Fundamentalcomplexe *gruppiren sich die geraden Linien des Raumes und die Ebenen und Punkte desselben zu in sich geschlossenen Systemen*, ähnlich wie dies mit den Ebenen und Punkten bei zwei oder drei in Involution liegenden Complexen der Fall war.

Sei zunächst eine gerade Linie gegeben, deren Coordinaten sind:

$$a_1 \,, a_2 \,, \ldots\ldots , a_6 .$$

So ist:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots\cdots + a_6^2 = 0.$$

Indem diese Relation bei willkürlicher Annahme der Vorzeichen der Coordinaten erfüllt bleibt, erhält man einer jeden der $2^5 = 32$ Zeichencombinationen:

$$\pm a_1 \,, \pm a_2 \,, \ldots\ldots , \pm a_6$$

entsprechend eine gerade Linie. Die Beziehung der 32 geraden Linien zu einander ist offenbar eine gegenseitige.

Mit Bezug auf die sechs Fundamentalcomplexe gruppiren sich die geraden Linien des Raumes zu 32 zusammen.

Indem man sich aus dem Schema:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \pm a_1 & \pm a_2 & \pm a_3 & \pm a_4 & \pm a_5 & \pm a_6 \end{vmatrix}$$

die zweigliedrigen Determinanten gebildet und dieselben gleich Null gesetzt denkt, übersieht man sofort, dass von den 32 Linien

2 · 15mal 16 einem Complexe,
4 · 20mal 8 einer Congruenz,
8 · 15mal 4 einer Fläche zweiten Grades

angehören, wo jede der 32 Linien auf 15 der Complexe, auf 20 der Congruenzen und auf 15 der Flächen zweiten Grades liegt.

---

*) Sind f_1, f_2, f_3 drei lineare Complexe, A_{11}, A_{22}, A_{33} ihre Invarianten, A_{12} u. s. f. ihre simultanen Invarianten, so ist die Complexgleichung des durch sie bestimmten Hyperboloids:

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ f_2 & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ f_3 & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}.$$

Die 32 Linien theilen sich in zwei Gruppen von 16, je nachdem von ihren Coordinaten eine gerade oder eine ungerade Anzahl ein gleiches Zeichen besitzt. Wenn von einer geraden Linie einer der beiden Gruppen eine ebene Curve erzeugt wird, geschieht ein Gleiches von den übrigen 15 Linien derselben Gruppe; die 16 Linien der anderen Gruppe erzeugen Kegelflächen.

Gegen eine beliebige Linie der einen Gruppe sondern sich die der anderen Gruppe in solche, welche ihre conjugirten Polaren in Bezug auf die sechs Fundamentalcomplexe, und in solche, welche ihre conjugirten Polaren in Bezug auf die zehn Fundamentalflächen sind. Die Coordinaten der ersteren sechs unterscheiden sich von den Coordinaten der angenommenen geraden Linie durch einen Zeichenwechsel; die der letzteren zehn durch drei.

Die Gleichung des 32ten Grades, durch welche ein derartiges System von geraden Linien, wie das hier betrachtete, bestimmt wird, verlangt, nachdem die sechs Fundamentalcomplexe durch eine Gleichung des 6ten Grades gefunden worden sind, nur noch die Auflösung von Gleichungen des zweiten Grades.

Das System der 32 zusammengehörigen geraden Linien vereinfacht sich, sobald eine oder mehrere der Coordinaten a gleich Null sind. Insbesondere entsprechen sich diejenigen geraden Linien, welche zwei zusammengehörige der 30 Directricen schneiden, zu 8, diejenigen, welche Erzeugende einer der zehn Fundamentalflächen sind, zu 4, endlich die 30 Directricen selbst zu 2.

11. Sei die Gleichung der Projection des in einer beliebig angenommenen Ebene dem Complexe

$$x_k = 0$$

entsprechenden Punktes auf eine der Coordinatenebenen:

$$a_k u + b_k v + c_k w = 0.$$

Dann verschwindet, zufolge der Bedingungsgleichung:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots\cdots + x_6^2 = 0$$

der Ausdruck

$$\sum_{1\ldots 6} (a_k u + b_k v + c_k w)^2$$

identisch. Es verschwindet also auch die folgende Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & b_1^2 & c_1^2 & b_1 c_1 & c_1 a_1 & a_1 b_1 \\ a_2^2 & b_2^2 & c_2^2 & b_2 c_2 & c_2 a_2 & a_2 b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_6^2 & b_6^2 & c_6^2 & b_6 c_6 & c_6 a_6 & a_6 b_6 \end{vmatrix},$$

was aussagt, dass die sechs Punkte 1, 2, ..., 6 auf einem Kegelschnitt liegen.

Die sechs Punkte, welche einer beliebigen Ebene in den sechs Fundamentalcomplexen entsprechen, liegen auf einer Curve der zweiten Ordnung.

Die sechs Ebenen, welche einem beliebigen Punkte in den sechs Fundamentalcomplexen entsprechen, umhüllen einen Kegel der zweiten Classe.

Wenn die beliebig angenommene Ebene durch einen der 60 Eckpunkte der 15 Fundamentaltetraeder hindurchgeht, so wird das von den sechs, den Fundamentalcomplexen entsprechenden Punkten gebildete Sechseck ein Brianchon'sches. Der Tetraedereckpunkt wird der Brianchon'sche Punkt. Das Sechseck erhält zwei, bezüglich drei in gerader Linie liegende Brianchon'sche Punkte, wenn die beliebig angenommene Ebene eine der 360, bezüglich der 320 zu dem System der Fundamentaltetraeder gehörigen geraden Linien enthält. Die Zahl der Brianchon'schen Punkte wird vier, wenn die Ebene durch eine der 360 geraden Linien und eine dieselbe schneidende der 320 geraden Linien hindurchgelegt ist.

Wenn die beliebig anzunehmende Ebene eine der zehn Fundamentalflächen berührt, so liegen die sechs den Fundamentalcomplexen entsprechenden Punkte zu drei auf zwei geraden Linien: den beiden Erzeugenden der Fundamentalfläche, welche die Ebene enthält. Ist die Ebene durch eine der 30 Directricen hindurchgelegt, so rücken von den sechs Punkten vier auf die Directrix, die anderen zwei fallen in den Durchschnittspunkt mit der zugehörigen Directrix. Fällt endlich die Ebene mit einer der Seitenflächen der Fundamentaltetraeder zusammen, so rücken die sechs Punkte paarweise in die drei zugehörigen Tetraedereckpunkte.

12. Die sechs Punkte, welche einer gegebenen Ebene in den sechs Fundamentalcomplexen entsprechen, seien mit:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6$$

bezeichnet. Einem jeden dieser Punkte entsprechen ausser der gegebenen fünf weitere Ebenen. Es giebt das, insofern die Ebene, welche 1 in x_2 entspricht, mit der Ebene zusammenfällt, die zu 2 in x_1 gehört, im Ganzen 15 neue Ebenen, welche die gegebene nach den 15 Verbindungslinien der sechs Punkte unter sich schneiden. Die drei Ebenen (2, 3), (3, 1), (1, 2) schneiden sich (vrgl. n. 3) in dem Pole der gegebenen Ebene mit Bezug auf die Fundamentalfläche (1, 2, 3). Indem diese Fläche mit der Fläche (4, 5, 6) identisch ist, schneiden sich die Ebenen (5, 6), (6, 4), (4, 5) in demselben Punkte. Die sechs Ebenen, welche diesem Punkte in den sechs Fundamentalcomplexen

$$x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 \ , \ x_4 \ , \ x_5 \ , \ x_6$$

entsprechen, fallen mit den Ebenen:

$$(2, 3) \ , \ (3, 1) \ , \ (1, 2) \ , \ (5, 6) \ , \ (6, 4) \ , \ (4, 5)$$

zusammen, welche in der That, wie dies aus der Betrachtung des Sechsecks 1 2 3 4 5 6 hervorgeht, einen Kegel der zweiten Classe umhüllen.

Mit Bezug auf die Fundamentalcomplexe gruppiren sich die Ebenen und Punkte des Raumes zu in sich geschlossenen Systemen von 16 Ebenen und 16 Punkten. In jeder der 16 Ebenen liegen sechs der 16 Punkte, durch jeden der 16 Punkte gehen sechs der 16 Ebenen. Die sechs Punkte in einer Ebene liegen auf einer Curve der zweiten Ordnung, die sechs Ebenen durch einen Punkt umhüllen einen Kegel der zweiten Classe.

Wenn eine der 16 Ebenen gegeben ist, findet man die 16 Punkte, indem man die ihr in den sechs Fundamentalcomplexen entsprechenden Punkte und die ihr in Bezug auf die 10 Fundamentalflächen conjugirten Pole construirt.

Von der hier betrachteten Art ist das System der 16 Doppelebenen und 16 Doppelpunkte der Flächen vierter Ordnung und vierter Classe, die Herr Kummer untersucht hat).*

Wenn eine von 32 in Bezug auf die Fundamentalcomplexe zusammengehörigen geraden Linien in einer der 16 Ebenen eines solchen Systems liegt, so vertheilen sich die 15 Linien derselben Gruppe auf die 15 weiteren Ebenen und die 16 Linien der anderen Gruppe auf die 16 Punkte. Berührt insbesondere die angenommene gerade Linie den in der betreffenden Ebene liegenden Kegelschnitt, so findet dasselbe bei den 15 Linien derselben Gruppe statt, und die 16 Linien der anderen Gruppe sind Seiten der von den 16 Punkten ausgehenden Kegel.

Die 32 zusammengehörigen Linien sind durch die Vorzeichen ihrer Coordinaten unterschieden. Es giebt diese Bemerkung unmittelbar die Bezeichnung derselben durch fünf Indices, welche zwei verschiedene Werthe annehmen können. Auf ähnliche Weise können die 16 Ebenen und 16 Punkte des hier betrachteten Systems bezeichnet werden. Die 16 Ebenen entsprechen den geraden Linien der einen, die 16 Punkte denen der anderen Gruppe. Es geht hieraus hervor, dass die Gleichung 16ten Grades, welche die 16 Ebenen bestimmt, von der eben betrachteten Gleichung des 32ten Grades nur dadurch verschieden ist, dass bei ihr das Differenzenproduct jener als bekannt vorausgesetzt wird.

---

*) Monatsberichte der Berliner Akad. 1864.

Wenn einer von den 16 Punkten des hier betrachteten Systems in einer der 16 Ebenen eines beliebigen ähnlichen Systems liegt, findet ein Gleiches für die übrigen 15 Punkte statt, und jede der 16 Ebenen enthält einen der 16 Punkte des zweiten Systems.

Die 16 Ebenen eines Systems schneiden sich nach $\frac{16 \cdot 15}{2} = 120$ geraden Linien, welche zugleich die Verbindungslinien der 16 Punkte sind. Dieselben sondern sich in 15 Gruppen von jedesmal 8. Die Linien einer Gruppe gehören denselben beiden Fundamentalcomplexen an und haben also die beiden entsprechenden Directricen zu gemeinschaftlichen Transversalen. Es giebt dies das Mittel, aus dem Systeme der 16 Ebenen und 16 Punkte die 30 Directricen und die 15 Fundamentaltetraeder zu construiren.

Ausser in den 16 Punkten des Systems schneiden sich die 16 Ebenen desselben zu drei in 360 Punkten, welche zu sechs auf den 120 Durchschnittslinien liegen. Ebenso giebt es 360 Ebenen, welche drei der 16 Punkte des Systems enthalten. Sie schneiden sich zu sechs nach denselben 120 geraden Linien.

Wenn eine der 16 Ebenen des Systems gegen die sechs Fundamentalcomplexe eine ausgezeichnete Lage hat, findet ein Gleiches für die übrigen 15 Ebenen und die 16 Punkte statt. Besonders hervorzuheben ist dasjenige System, welches entsteht, wenn eine der Ebenen einen der 60 Eckpunkte der Fundamentaltetraeder enthält. Dann gehen die 16 Ebenen zu vier durch die Eckpunkte des fraglichen Tetraeders und die 16 Punkte liegen zu vier in den Seitenflächen desselben. Es ist das System das Singularitätensystem eines T[illegible]droids*) geworden. Die Gleichung 16ten Grades, welche die F[illegible] Systems bestimmt, ist hier algebraisch lösbar, indem [illegible] Auflösung einer biquadratischen Gleichung und mehrerer q[illegible] verlangt.

III.

Die Kummer'sche Fläche und ihr Zusammenhang mit den Complexen zweiten Grades.

13. Als Gleichung des zu untersuchenden Complexes zweiten Grades sei die folgende gegeben:

$$(1) \qquad k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + \cdots\cdots + k_6 x_6^2 = 0.$$

Dabei ist:

$$(2) \qquad x_1^2 + x_2^2 + \cdots\cdots + x_6^2 = 0,$$

so dass der Complex unverändert bleibt, wenn [illegible]

---

*) Cayley in Liouville's Journal XI.

schrieben wird $k_\alpha + \lambda$. Die vier Constanten, welche hiernach noch in der Gleichung (2) enthalten sind, geben mit den 15 Constanten der Fundamentalcomplexe die 19 Constanten des Complexes zweiten Grades.

Die Gleichungsform (2) sagt aus, *dass der gegebene Complex und alle von demselben unmittelbar abhängigen geometrischen Gebilde sich selbst mit Bezug auf das System der sechs Fundamentalcomplexe entsprechen*).*

Es gruppiren sich also die Linien des Complexes in Systeme von 32. Jedesmal 16 Complexcurven und 16 Complexkegel gehören zusammen u. s. f.

Aus diesem Satze leiten sich, unter Zugrundelegung der von Plücker entwickelten Eigenschaften der Complexe des zweiten Grades**), die im Folgenden aufgeführten Theoreme ab.

14. Diejenigen Punkte, deren Complexkegel in ein Ebenenpaar zerfällt, die sogenannten *singulären Punkte*, bilden eine Fläche der 4ten Ordnung und Classe, mit 16 Doppelpunkten und 16 Doppelebenen. Dieselbe Fläche wird von den *singulären Ebenen* umhüllt, solchen Ebenen, deren Complexcurve sich in das System zweier Punkte aufgelöst hat***).

Eine derartige Fläche soll im Folgenden eine *Kummer'sche Fläche* genannt werden. In ihrer Beziehung zum Complexe heisse sie seine *Singularitätenfläche.*

Die nächstfolgenden Betrachtungen untersuchen die Kummer'sche Fläche als solche, abgesehen von ihrer Beziehung zu dem gegebenen Complexe.

Eine Kummer'sche Fläche entspricht sich selbst mit Bezug auf ein System von sechs Fundamentalcomplexen.

Die bezüglichen Fundamentalcomplexe †) seien jedesmal, nach wie vor, durch $x_1, x_2, \ldots, x_6$ bezeichnet.

---

*) Dieses gegenseitige Entsprechen kann statt als durch die sechs Fundamentalcomplexe auch als durch die zehn Fundamentalflächen vermittelt angesehen werden.

**) Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. Von Julius Plücker. Leipzig. B. G. Teubner. 1868, 1869.

***) Plücker. Neue Geometrie. n. 311, 320.

†) Für die Fresnel'sche Wellenfläche, die sich aus dem Ellipsoid:

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = 1$$

(ableitet, sind die Fundamentalcomplexe die folgenden:

$$(yz' - y'z) + a\sqrt{-1}\,(x - x') = 0, \qquad (yz' - y'z) - a\sqrt{-1}\,(x - x') = 0,$$
$$(zx' - z'x) + b\sqrt{-1}\,(y - y') = 0, \qquad (zx' - z'x) - b\sqrt{-1}\,(y - y') = 0,$$
$$(xy' - x'y) + c\sqrt{-1}\,(z - z') = 0, \qquad (xy' - x'y) - c\sqrt{-1}\,(z - z') = 0.$$

Zur Bestimmung der Tangentialebenen, welche sich an eine gegebene Kummer'sche Fläche durch eine gerade Linie

$$a_1\,,\ a_2\,,\ \ldots\,,\ a_6$$

legen lassen, dient eine Gleichung des vierten Grades. Dieselbe kann nur die Quadrate der Coordinaten a enthalten. Denn eine Veränderung von $+x_k$ in $-x_k$ lässt die Fläche unverändert. Es sind also die vier Tangentialebenen, welche durch eine beliebige der 32 geraden Linien:

$$\pm a_1\,,\ \pm a_2\,,\ \ldots\,,\ \pm a_6$$

hindurchgehen, alle durch dieselbe biquadratische Gleichung bestimmt.

Den vier Tangentialebenen, welche sich durch die gegebene gerade Linie an die Fläche legen lassen, sind die vier Durchschnittspunkte einer beliebigen der 16 Linien der anderen Gruppe mit der Fläche reciprok zugeordnet. Es folgt hieraus und aus dem Vorhergehenden, dass dieselbe Gleichung die durch eine beliebige gerade Linie gehenden Tangentialebenen und die auf derselben liegenden Durchschnittspunkte bestimmt.

Das anharmonische Verhältniss der vier Tangentialebenen, welche sich durch eine gerade Linie an eine Kummer'sche Fläche legen lassen, ist gleich dem anharmonischen Verhältnisse der vier Durchschnittspunkte derselben Linie mit der Fläche.

15. Es sei ein Punkt einer Kummer'schen Fläche gegeben. Aus demselben leitet sich vermöge der sechs entsprechenden Fundamentalcomplexe ein System von 16 Punkten und 16 Ebenen ab. Die Punkte sind Punkte der Fläche, die Ebenen Ebenen derselben. Ebenso entspricht der Tangentialebene in dem gegebenen Punkte ein System von 16 Ebenen und 16 Punkten der Fläche. Die beiden Systeme stehen in der gegenseitigen Beziehung, dass in jeder Ebene des einen ein Punkt des anderen liegt, welcher der zugehörige Berührungspunkt ist. Es folgt hieraus, dass die sechs geraden Linien, nach welchen eine Ebene des einen Systems von den sechs dem zugehörigen Berührungspunkte in dem anderen Systeme entsprechenden Ebenen geschnitten wird, ausser in dem allen gemeinsamen Punkte jede noch in einem derjenigen sechs Punkte berühren, welche der angenommenen Ebene in den Fundamentalcomplexen entsprechen. Es sind also diese Linien Doppeltangenten der Fläche. Somit ergeben sich die folgenden Sätze:

Nachdem die einer Kummer'schen Fläche zugehörigen Fundamentalcomplexe durch eine Gleichung des sechsten Grades bestimmt worden sind, leiten sich aus den Coordinaten eines Punktes (einer Ebene) der Fläche die Coordinaten von 32 Punkten, 32 Ebenen und 96 Doppeltangenten derselben rational ab.

Die sechs Tangenten, welche sich von dem Berührungspunkte einer

Ebene der Kummer'schen Fläche an die in derselben liegende Durchschnittscurve ziehen lassen, berühren in den sechs auf einem Kegelschnitt gelegenen Punkten, welche der angenommenen Ebene in den sechs Fundamentalcomplexen entsprechen.

Die 28 Doppeltangenten einer beliebigen ebenen Durchschnittscurve einer Kummer'schen Fläche theilen sich in zwei Gruppen von 16 und 12. Die Doppeltangenten der ersten Gruppe sind der Durchschnitt der Ebene der Curve mit den 16 Doppelebenen der Fläche. Die 12 Doppeltangenten der zweiten Gruppe sondern sich in Gruppen von 2. Die sechs Punkte, in welchen sich bezüglich die Linien der verschiedenen Paare schneiden, sind die auf einem Kegelschnitt gelegenen sechs Punkte, welche der Ebene der Curve in den sechs Fundamentalcomplexen entsprechen.

Die Doppeltangenten einer Kummer'schen Fläche bilden sechs verschiedene Congruenzen der zweiten Ordnung und Classe, deren jede einem der sechs Fundamentalcomplexe angehört).*

16. Ausgezeichnet unter den in Bezug auf die sechs Fundamentalcomplexe zusammengehörigen Systemen von 16 Punkten und 16 Ebenen der Kummer'schen Fläche ist das System der 16 Doppelpunkte und 16 Doppelebenen derselben. An Stelle des zugehörigen zweiten Systems tritt in diesem Falle das System der 16 Berührungskegel und der 16 Berührungscurven. Die 96 Doppeltangenten werden durch die 96 Büschel solcher gerader Linien ersetzt, welche bezüglich innerhalb einer der Doppelebenen durch einen der Doppelpunkte hindurchgehen.

*Die Bestimmung der Singularitäten einer Kummer'schen Fläche hängt von der Auflösung einer Gleichung sechsten Grades und mehrerer quadratischer Gleichungen ab**).*

Um die Fundamentaltetraeder aus dem Singularitätensystem einer Kummer'schen Fläche zu finden, hat man diejenigen 30 geraden Linien zu construiren, welche acht der 120 Durchschnittslinien der 16 Doppelebenen schneiden.

Wenn ausser den sechs Fundamentalcomplexen eine der Doppelebenen der Kummer'schen Fläche bekannt ist, lässt sich die Fläche construiren ***). Denn indem dann durch die Fundamentalcomplexe sämmtliche 16 Doppelebenen und die Berührungscurven in ihnen ge-

---

*) Vergl. Kummer. Abhandl. der Berl. Akad. 1866.

**) C. Jordan in Crelle's Journal. LXX.

***) Wenn man die Doppelebene durch eine derjenigen 320 geraden Linien hindurchlegt, welche drei der 60 Eckpunkte der 15 Fundamentaltetraeder enthalten, so erhält man eine Fläche, die dem Modelle entspricht, dessen Herr Kummer (Monatsberichte der Berl. Akad. 1864) Erwähnung thut.

geben sind, kennt man zur Construction einer beliebigen ebenen Durchschnittscurve der Fläche 16 Doppeltangenten und die Berührungspunkte auf denselben.

Enthält die gegebene Doppelebene einen der 60 Eckpunkte der Fundamentaltetraeder, so wird die zugehörige Kummer'sche Fläche ein Tetraedroid.

Ein Tetraedroid ist dadurch charakterisirt, dass die sechs in einer Doppelebene desselben liegenden Doppelpunkte ein Brianchon'sches Sechseck bilden.

Die Singularitäten eines Tetraedroids sind algebraisch bestimmbar.

17. Wir wenden uns zur Betrachtung der Complexe zweiten Grades zurück.

Diejenigen geraden Linien, welche Durchschnittslinien zweier Ebenen sind, in welche sich ein Complexkegel aufgelöst hat, oder, was auf dasselbe hinauskommt, diejenigen geraden Linien, welche Verbindungslinien zweier Punkte sind, in welche eine Complexcurve zerfallen ist, sind die *singulären Linien* des Complexes. Dieselben bilden eine Congruenz der vierten Ordnung und Classe. Die singulären Linien berühren die Singularitätenfläche des Complexes. Der Berührungspunkt heisst *der zugeordnete singuläre Punkt*, die Berührungsebene *die zugeordnete singuläre Ebene*. Der Complexkegel, dessen Mittelpunkt der zugeordnete singuläre Punkt ist, hat sich in die beiden Tangentialebenen der Singularitätenfläche aufgelöst, die ausser der doppelt zu zählenden zugeordneten singulären Ebene durch die singuläre Linie hindurchgehen. Entsprechend ist die Complexcurve in der zugeordneten singulären Ebene in das System derjenigen beiden Punkte zerfallen, welche der singulären Linie neben dem doppelt zu zählenden zugeordneten singulären Punkte mit der Singularitätenfläche gemein sind*).

Die Complexcurve, welche in einer beliebigen Ebene liegt, berührt die Durchschnittscurve vierter Ordnung der Ebene mit der Singularitätenfläche in vier Punkten. Gemeinschaftliche Tangenten beider Curven in diesen Punkten sind die vier in der Ebene liegenden singulären Linien**).

Welche unter den Tangenten der Singularitätenfläche in einem gegebenen Punkte derselben dem gegebenen Complexe als singuläre Linie angehört, ist durch die Fläche selbst noch nicht bestimmt. Es kann eine aus der einfach unendlichen Anzahl der Tangenten willkürlich als singuläre Linie angenommen werden; dann lässt sich ein

*) Plücker, Neue Geometrie. n. 317.
**) Plücker, Neue Geometrie. n. 318.

zugehöriger Complex eindeutig bestimmen. Aus der zugeordneten singulären Ebene leitet sich vermöge der sechs Fundamentalcomplexe ein System von 16 singulären Ebenen ab. Sobald die beiden Punkte, in welche die Complexcurve für die eine singuläre Ebene zerfallen ist, durch Auflösung einer quadratischen Gleichung bestimmt worden sind, sind die entsprechenden Punkte in den übrigen Ebenen bekannt. Sechs unter denjenigen Complexlinien, welche durch einen der Schnittpunkte von drei der 16 Ebenen hindurchgehen, sind also gegeben und desshalb die Complexkegel für diese Punkte linear construirbar. Indem diese Schnittpunkte zu sechs auf einer jeden der 120 Durchschnittslinien von zwei der 16 Ebenen liegen, kennt man die zu diesen Linien gehörigen Complexflächen. Zur Construction der in einer beliebigen Ebene liegenden Complexcurve kann man also über 240 Tangenten verfügen.

Wenn eine Kummer'sche Fläche und eine dieselbe berührende gerade Linie gegeben ist, so kann man einen Complex zweiten Grades eindeutig construiren, welcher die Fläche zur Singularitätenfläche und die gerade Linie zur singulären Linie hat.

Eine Kummer'sche Fläche ist die Singularitätenfläche für eine einfach unendliche Schaar von Complexen zweiten Grades.

*Eine Kummer'sche Fläche hängt von 18 Constanten ab**).

Wenn die gegebene gerade Linie eine Doppeltangente der Fläche ist, so artet der zugehörige Complex in den doppelt zu zählenden linearen Fundamentalcomplex aus, welchem die Doppeltangente angehört.

Zu der Schaar von Complexen zweiten Grades, welche eine gegebene Kummer'sche Fläche zur Singularitätenfläche haben, gehören auch die doppelt zu zählenden sechs linearen Fundamentalcomplexe. Als singuläre Linien eines solchen Complexes sind die ihm angehörigen Doppeltangenten der Fläche anzusehen.

18. Ausgezeichnet unter den singulären Linien des gegebenen Complexes sind diejenigen, welche die Singularitätenfläche osculiren. Die Tangenten im Berührungspunkte gehören sämmtlich dem gegebenen Complexe an.

Wenn eine Kummer'sche Fläche und eine dieselbe berührende gerade Linie gegeben ist, giebt es ausser dem eben construirten noch zwei weitere Complexe, welche die Fläche zur Singularitätenfläche haben und die gerade Linie (aber nicht als singuläre Linie) enthalten. Singuläre Linien in dem Berührungspunkte der gegebenen sind für diese Complexe die beiden Haupttangenten in diesem Punkte.

---

*) Es stimmt das mit der von Herrn Kummer gegebenen Zählung überein.

Bei der Construction eines solchen Complexes sind zunächst die beiden Haupttangenten im Berührungspunkte durch eine quadratische Gleichung zu bestimmen. Die beiden Punkte, in welche sich die Complexcurve innerhalb der zugeordneten singulären Ebene aufgelöst hat, sind dann linear gegeben.

Die Complexcurve in einer beliebigen Ebene hat mit der in derselben Ebene liegenden Durchschnittscurve vierter Ordnung der Singularitätenfläche ausser den vier doppelt zu zählenden singulären Linien noch $2 . 4 . 3 - 2 . 4 = 16$ Tangenten gemein. Die Berührungspunkte derselben mit der Durchschnittscurve der Singularitätenfläche sind diejenigen Punkte, in welchen die angenommene Ebene von der Curve solcher Punkte der Singularitätenfläche geschnitten wird, in welchen die zugehörige singuläre Linie mit einer Haupttangente zusammenfällt.

Die Curve der singulären Punkte, deren zugeordnete singuläre Linien die Singularitätenfläche osculiren, ist von der 16. Ordnung.

19. Sei eine Kummer'sche Fläche und eine beliebige gerade Linie gegeben. Durch die gerade Linie gehen vier Ebenen der Fläche, und auf ihr liegen vier Punkte derselben. Die biquadratische Gleichung zur Bestimmung der vier Ebenen ist dieselbe, wie die zur Bestimmung der vier Punkte. Dementsprechend kann man die vier Ebenen den vier Punkten einzeln zuordnen, und zwar auf vierfache Weise. Nachdem über die Art der Zuordnung entschieden ist, ziehe man in einer der Ebenen durch den Berührungspunkt mit der Kummer'schen Fläche und den zugeordneten Punkt eine gerade Linie. Derjenige Complex, welcher die gegebene Kummer'sche Fläche zur Singularitätenfläche und die construirte gerade Linie zur singulären Linie hat, enthält offenbar die gegebene gerade Linie.

Es lassen sich vier Complexe construiren, welche eine gegebene Kummer'sche Fläche zur Singularitätenfläche haben und die ausserdem eine gegebene gerade Linie enthalten.

Die beiden auf der construirten singulären Linie liegenden Punkte bestimmen sich linear, indem der eine als Durchschnittspunkt der gegebenen geraden Linie mit der Fläche bekannt ist.

Wenn die gegebene gerade Linie die Singularitätenfläche berührt, fallen zwei von den vier vorstehend construirten Complexen in denjenigen zusammen, der die gegebene Linie zur singulären hat.

Die Tangenten der Singularitätenfläche sind solche gerade Linien, für welche die biquadratische Gleichung, welche die vier einer gegebenen geraden Linie zugehörigen Complexe bestimmt, eine doppelte Wurzel hat.

Die Complexgleichung der Singularitätenfläche hat die Form einer Discriminante.

20. Die einfach unendliche Schaar der zu einer gegebenen Kummer'schen Fläche gehörigen Complexe zweiten Grades bestimmt in jeder Ebene des Raumes ein System von Kegelschnitten, welche die Durchschnittscurve vierter Ordnung der Kummer'schen Fläche mit der Ebene viermal berühren. Das System ist von der vierten Classe. Indem als Ausartungskegelschnitte die sechs den Fundamentalcomplexen entsprechenden Punkte mit ihrem Doppeltangentenpaare anzusehen sind, ist das System von der Ordnung $2 \cdot 4 - 6 = 2$.

Durch eine Kummer'sche Fläche wird in jeder Ebene des Raumes ein Kegelschnittsystem der vierten Classe und zweiten Ordnung bestimmt.

21. Diejenigen Linien des Complexes, welche innerhalb einer *Doppelebene* der Singularitätenfläche verlaufen, schneiden sich in einem Punkte der Berührungscurve. Sie sind sämmtlich singuläre Linien. Es kann dieser Punkt beliebig auf der Berührungscurve angenommen werden; dann ist ein zugehöriger Complex linear bestimmt. Lässt man den Punkt in einen der sechs auf der Berührungscurve liegenden Doppelpunkte rücken, so artet der Complex in denjenigen Fundamentalcomplex aus, welchem das durch den Doppelpunkt in der angenommenen Ebene gehende Büschel gerader Linien angehört. Auf ähnliche Weise entspricht jedem *Doppelpunkte* der Fläche eine Ebene, welche den Tangentialkegel im Doppelpunkte berührt*).

Die 16 Punkte und 16 Ebenen entsprechen einander in Bezug auf die sechs Fundamentalcomplexe.

Im Allgemeinen sind die Linien des gegebenen Complexes keine Doppeltangenten der Singularitätenfläche. Es findet dies nur für diejenigen 96 singulären Linien statt, welche innerhalb einer Doppelebene der Fläche durch einen Doppelpunkt gehen.

Diejenigen 16 singulären Linien, welche in einer Doppelebene der Singularitätenfläche liegen und die Berührungscurve der Doppelebene berühren, sind die einzigen Complexlinien, welche die Singularitätenfläche vierpunktig berühren. Die 16 entsprechenden singulären Linien, welche durch die Doppelpunkte der Singularitätenfläche gehen, sind die einzigen Complexlinien, welche die dualistisch entgegengesetzte Eigenschaft besitzen.

22. Einer jeden geraden Linie entspricht in Bezug auf einen Complex zweiten Grades eine zweite gerade Linie als *Polare*. Dieselbe steht zu der ersten in der doppelten Beziehung, einmal, dass

---

*) Plücker. Neue Geometrie. n. 321.

sie der geometrische Ort ist für die Pole der ersten geraden Linie mit Bezug auf alle Curven, die in den durch sie hindurchgelegten Ebenen von Linien des Complexes umhüllt werden, dann, dass sie umhüllt wird von den Polarebenen der ersten geraden Linie mit Bezug auf alle Kegel, die in den Punkten derselben von Linien des Complexes gebildet werden. Diese Beziehung zwischen den beiden Linien ist indess keine gegenseitige. Abgesehen von den Linien des Complexes, deren jede sich selbst als Polare conjugirt ist, giebt es nur eine endliche Anzahl solcher gerader Linien, die selbst wieder die Polaren ihrer Polaren sind*).

Die Polaren der Diagonalen des von den vier in einer beliebigen Ebene liegenden singulären Linien gebildeten Vierseits schneiden sich in einem Punkte. Dieser Punkt wird der *Pol* der Ebene mit Bezug auf den Complex genannt. Derselbe fällt zusammen mit dem Pol der Ebene in Bezug auf die Singularitätenfläche. — Auf ähnliche Weise entspricht jedem Punkte in Bezug auf den Complex eine *Polarebene.*

Der Pol einer singulären Ebene ist ihr Berührungspunkt mit der Singularitätenfläche, die Polarebene dieses Punktes ist wiederum die gegebene singuläre Ebene.

Aber im Allgemeinen ist die Beziehung zwischen Ebene und Pol, Punkt und Polarebene keine gegenseitige. Es tritt das — abgesehen von den singulären Ebenen und Punkten — nur bei einer endlichen Anzahl von Ebenen und Punkten ein**).

23. Der gegebene Complex des zweiten Grades werde auf ein beliebiges der fünfzehn Fundamentaltetraeder bezogen. Dann nimmt seine Gleichung die folgende Form an***):

$$\Sigma a_{ik} r_{ik}^2 + 2 A r_{\alpha\beta} r_{\gamma\delta} + 2 B r_{\alpha\gamma} r_{\delta\beta} + 2 C r_{\alpha\delta} r_{\beta\gamma} = 0,$$

wo r_{ik} Strahlen- oder Axencoordinaten bedeuten.

Wird die Gleichung des gegebenen Complexes zweiten Grades in Bezug auf eins der 15 Fundamentaltetraeder als Coordinatentetraeder geschrieben, so treten in derselben ausser den Quadraten der Veränderlichen die Producte von nur solchen Veränderlichen auf, welche sich auf gegenüberstehende Kanten des Tetraeders beziehen.

Es ist leicht zu sehen, dass diese Gleichungsform für die Fundamentaltetraeder charakteristisch ist. Man schliesst weiter:

Wenn der gegebene Complex auf ein beliebiges Coordinatentetraeder bezogen wird und in der entsprechenden Gleichung zwei Veränderliche,

*) Plücker, Neue Geometrie. n. 299.

**) Plücker, Neue Geometrie. n. 328, 330, 337.

***) Vergl. n. 6.

die sich auf gegenüberstehende Kanten des Coordinatentetraeders beziehen, ausser als Quadrate nur in gegenseitiger Verbindung auftreten, so sind die betreffenden Kanten zwei zusammengehörige aus dem System der Fundamentaltetraeder.

Die vorstehende Gleichungsform zeigt, dass die gegenüberstehenden Kanten des zu Grunde gelegten Tetraeders einander gegenseitig entsprechende Polaren in Bezug auf den gegebenen Complex sind.

Von den 30 Kanten der Fundamentaltetraeder entsprechen sich die zusammengehörigen in Bezug auf den Complex gegenseitig als Polaren.

Die 30 Kanten der Fundamentaltetraeder sind, abgesehen von den Linien des Complexes, die einzigen geraden Linien, welche diese Eigenschaft besitzen.

Und hieraus schliesst man:

Von den 60 Eckpunkten und 60 Seitenflächen der Fundamentaltetraeder entsprechen sich die zusammengehörigen gegenseitig in Bezug auf den Complex als Pol und Polarebene.

Es giebt, abgesehen von den singulären Punkten und Ebenen, keine weiteren Punkte und Ebenen, die sich gegenseitig in Bezug auf den Complex zugeordnet sind.

Insofern das Verhältniss von Ebene und Pol, Punkt und Polarebene als durch die Singularitätenfläche vermittelt angesehen werden kann, lassen sich die vorstehenden beiden Sätze auch als Eigenschaften der Kummer'schen Fläche aussprechen.

24. Aehnliche Untersuchungen, wie die vorstehenden, sind bereits in der Abhandlung über Complexe zweiten Grades von Herrn Battaglini*) enthalten. Nur sind die Voraussetzungen, welche er zu Grunde legt, nicht allgemein genug. Unter r_{ik} Strahlen- oder Axencoordinaten verstanden, giebt er dem Complexe zweiten Grades die folgende Gleichung:

$$\Sigma\, a_{ik}\, r_{ik}^2 = 0,$$

welche drei Glieder weniger besitzt, als die letzt-vorangehende, in welcher der Complex auf eins der Fundamentaltetraeder bezogen ist. In der That enthält sie nur 17 Constanten, während der Complex von 19 Constanten abhängt. Dementsprechend verschwinden drei der simultanen Invarianten, welche sich aus ihr und der zwischen den Liniencoordinaten bestehenden Bedingungsgleichung ableiten lassen.

Der Complex, welchen Herr Battaglini untersucht, ist dadurch particularisirt, dass für denselben die um eine passende Constante vermehrten Grössen $k_1, k_2, \ldots, k_6$ einander entgegengesetzt gleich werden. In Folge dessen ist eins der Fundamentaltetraeder, dasselbe, auf

*) Atti della Reale Accademia di Napoli, III, so wie Giornale di Matematiche, Napoli. Anno VI.

welches der Complex in seiner vereinfachten Gleichung bezogen ist, vor den übrigen ausgezeichnet, und die Singularitätenfläche wird ein Tetraedroid, welches zu diesem Tetraeder gehört. (n. 16.)

IV.

Algebraische Darstellung.

25. Der gegebene Complex sei, wie oben, durch die Gleichung bestimmt:

(1) $$k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + \cdots + k_6 x_6^2 = 0,$$

wo:

(2) $$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_6^2 = 0.$$

Vermöge der Gleichung (1) ist es gestattet, die Grössen k um eine beliebige Constante wachsen zu lassen, ohne dass der Complex geändert wird.

Die *singulären Linien* des Complexes sind alsdann dargestellt*) durch (1), (2) und die folgende Gleichung:

(3) $$k_1^2 x_1^2 + k_2^2 x_2^2 + \cdots + k_6^2 x_6^2 = 0.$$

Sei unter (x) eine beliebige singuläre Linie verstanden, so sind die Coordinaten (y) einer derjenigen geraden Linien, welche innerhalb der (x) zugeordneten singulären Ebene durch den zugehörigen singulären Punkt gehen, von der folgenden Form:

(4) $$\varrho y_\alpha = (k_\alpha + \sigma)\, x_\alpha,$$

wo ϱ einen Proportionalitätsfactor, σ eine Constante bedeutet**). Die durch (4) dargestellten geraden Linien mögen die *zugeordneten* der singulären Linie (x) heissen. Die Gesammtheit der zugeordneten Linien aller singulären Linien fällt mit der Gesammtheit der Tangenten der Singularitätenfläche zusammen.

Wenn die singuläre Linie (x) so bestimmt wird, dass die zugeordneten Linien dem gegebenen Complexe (2) angehören, so osculirt sie die Singularitätenfläche. Man findet also zur Darstellung *der osculirenden singulären Linien* ausser (1), (2), (3) die Gleichung:

(5) $$k_1^3 x_1^2 + k_2^3 x_2^2 + \cdots + k_6^3 x_6^2 = 0.$$

Die von den osculirenden singulären Linien gebildete Linienfläche ist von der 16. Ordnung und 16. Classe.

---

*) Plücker. Neue Geometrie. n. 300.

**) Plücker. Neue Geometrie. Ebenda.

Die *32 ausgezeichneten singulären Linien*, welche bezüglich in einer der Doppelebenen der Singularitätenfläche liegen und die in derselben enthaltene Berührungscurve berühren, oder durch einen der Doppelpunkte der Singularitätenfläche gehen und Erzeugende des Tangentialkegels in demselben sind, sind durch die Bedingung bestimmt, dass ihre zugeordneten singulären Linien selbst wieder singuläre Linien sind. Ihre Coordinaten genügen also ausser den Gleichungen (1), (2), (3), (5) auch noch der folgenden Gleichung:

$$k_1^4 x_1^2 + k_2^4 x_2^2 + \cdots + k_6^4 x_6^2 = 0. \tag{6}$$

Durch Auflösung findet man:

$$\varrho x_1^2 = \frac{1}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)\cdots(k_6 - k_1)} \tag{7}$$

26. Wenn $x_1, x_2, \ldots, x_6$ und σ willkürliche Parameter bezeichnen, welche den Gleichungen (1), (2), (3) Genüge leisten, so ist eine beliebige *der Tangenten der Singularitätenfläche* durch die Gleichung (4) gegeben. Durch Elimination von $x_1, x_2, \ldots, x_6$ ergiebt sich:

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_6^2 = 0, \tag{8}$$

$$\frac{y_1^2}{k_1 + \sigma} + \frac{y_2^2}{k_2 + \sigma} + \cdots + \frac{y_6^2}{k_6 + \sigma} = 0, \tag{9}$$

$$\frac{y_1^2}{(k_1+\sigma)^2} + \frac{y_2^2}{(k_2+\sigma)^2} + \cdots + \frac{y_6^2}{(k_6+\sigma)^2} = 0. \tag{10}$$

Die Gleichung (9) ist eine Gleichung vierten Grades zur Bestimmung von σ. Die Gleichung (10) sagt aus, dass der nach σ genommene Differentialquotient der Gleichung (9) verschwinde.

Die Complexgleichung der Singularitätenfläche ist die nach σ genommene Discriminante der Gleichung (9).

Wie das sein muss, wird diese Complexgleichung vom 12. Grade.

Unter σ eine willkürliche Grösse verstanden, stellt die Gleichung (9) einen Complex des zweiten Grades dar. Derselbe hat mit dem gegebenen (2) die Singularitätenfläche gemein. Denn das System der Gleichungen (8), (9), (10) bleibt ungeändert, wenn k_α allgemein durch $\frac{1}{k_\alpha + \sigma}$ ersetzt wird.

Die Gleichung (9) *stellt das zu der Singularitätenfläche des gegebenen Complexes zugehörige System von Complexen zweiten Grades dar.*

Die Gleichung (9) ist durchaus analog den Gleichungen, welche bei der Bestimmung confocaler Curven oder Flächen zweiten Grades auftreten.

Wenn (y) eine gegebene gerade Linie bedeutet, bestimmt die Gleichung (9) vier zugehörige Werthe von σ. Von denselben werden zwei einander gleich, wenn (y) eine Tangente der Singularitätenfläche ist.

Die *Haupttangenten* der Singularitätenfläche sind dadurch charakterisirt, dass drei Wurzeln der Gleichung (9) gleich werden; sie sind also durch (8), (9), (10) und die folgende Gleichung gegeben:

$$(11) \qquad \frac{y_1^2}{(k_1+\sigma)^3} + \frac{y_2^2}{(k_2+\sigma)^3} + \cdots + \frac{y_6^2}{(k_6+\sigma)^3} = 0.$$

Endlich sind diejenigen geraden Linien, welche die Berührungscurven in den Doppelebenen der Singularitätenfläche umhüllen, bezüglich die Berührungskegel in den Doppelpunkten derselben erzeugen, durch (8), (9), (10), (11) und die folgende Gleichung bestimmt:

$$(12) \qquad \frac{y_1^2}{(k_1+\sigma)^4} + \frac{y_2^2}{(k_2+\sigma)^4} + \cdots + \frac{y_6^2}{(k_6+\sigma)^4} = 0.$$

Sei irgend einem Werthe von σ entsprechend das System der Gleichungen (8), (9), (10), (11), (12) aufgelöst. Die in dem entsprechenden Complexe (9) den so bestimmten geraden Linien zugeordneten Linien sind selbst wieder singuläre Linien. Ihre zugeordneten Linien bilden *die Gesammtheit der in den Doppelebenen der Singularitätenfläche liegenden und der durch die Doppelpunkte derselben hindurchgehenden geraden Linien.* Die Coordinaten einer solchen geraden Linie lassen sich also unter der Form schreiben:

$$(13) \qquad \varrho x_\alpha = \left(\lambda + \frac{\mu}{k_\alpha+\sigma} + \frac{\nu}{(k_\alpha+\sigma)^2}\right) y_\alpha,$$

wo y_α eine Lösung der Gleichungen (8), (9), (10), (11), (12) ist. Diese Form bleibt unverändert, welchen Werth man σ ertheilen mag.

Es erübrigt, die *Doppeltangenten* der Singularitätenfläche zu bestimmen. Für die von denselben gebildeten sechs Congruenzen ergiebt sich aus (9) und (10), indem σ der Reihe nach $= -k_1$, $= -k_2$ u. s. w. gesetzt wird:

$$(14) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} y_1 = 0, & \dfrac{y_2^2}{k_2-k_1} + \cdots + \dfrac{y_6^2}{k_6-k_1} = 0, \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ y_6 = 0, & \dfrac{y_1^2}{k_1-k_6} + \cdots + \dfrac{y_5^2}{k_5-k_6} = 0. \end{array} \right.$$

Auf dieselben Gleichungen kommt man aus (4), wenn man $\sigma = -k_1$, $= -k_2$ u. s. w. setzt und hierauf x_α aus (1), (2), (3) eliminirt.

Die bei den vorstehenden Betrachtungen vorausgesetzte Umformung der Complexgleichung ist in vielen Fällen nicht möglich. Unter die hier ausgeschlossenen Complexe gehört auch der von Herrn Th. Reye betrachtete, dessen Linien der Durchschnitt entsprechender

Ebenen zweier collinearer räumlicher Systeme sind*). Derartige Complexe sind durch das Auftreten von Doppellinien, Ausnahmpunkten und Ausnahmebenen**) ausgezeichnet. Eine Uebersicht über die bei ihnen zu unterscheidenden Fälle denke ich bei einer nächsten Gelegenheit zu geben.

*) Reye. Die Geometrie der Lage. Hannover, C. Rümpler. 1868.
**) Plücker, Neue Geometrie. n. 313.

Göttingen, 14. Juni 1869.