**11. Der Inhalt der Gleichung $p \cdot v = R \cdot T$;
von Rudolf Laemmel.**

Hr. Adler veröffentlichte in diesen Annalen¹⁾ einen Aufsatz über die analytische Formulierung des sogenannten „Ersten Hauptsatzes“, in welchem er den Gay-Lussacschen Überströmungsversuch als ein neues Element in der Spekulation *neben* der obigen Gleichung behandelt. Das ist unrichtig; denn sobald man für irgendwelche Körper die Gleichung

$$(1) \quad p \cdot v = R T$$

als gültig ansieht, folgt schon, daß die innere Energie U nur eine Temperaturfunktion ist (oder eine Funktion des Produktes von Druck mal Volumen; nicht, wie Hr. Adler sagt, eine Funktion von Druck *und* Volumen). Es gilt nämlich allgemein:

$$(2) \quad \frac{\partial U}{\partial v} = T \frac{\partial p}{\partial T} - p$$

und auch:

$$(3) \quad 1 = \frac{\partial p}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial v} \cdot \left(- \frac{\partial v}{\partial p} \right),$$

woraus sich ergibt, daß für alle Körper, die einer Zustandsgleichung

$$(4) \quad p = T \cdot \text{Funktion}(v)$$

folgen, die innere Energie vom Volumen unabhängig ist, etc.; insbesondere ist die innere Energie eines der Gleichung $p \cdot v = R T$ folgenden Körpers wegen der allgemeingültigen Gleichung (2) etc. ohne weiteres eine bloße Temperaturfunktion.

Das Experiment ist nur Kontrollexperiment und zeigt weiter nichts, als daß das Gasgesetz $p v = R T$ und damit alle seine Konsequenzen nur mehr oder minder genau stimmen, je nachdem was für ein Gas und unter welchen Umständen man es nimmt.

Unbegründet ist es, der Darstellung von Clausius deswegen eine *Unrichtigkeit* vorzuwerfen, weil Clausius die

1) F. W. Adler, Ann. d. Phys. 22. p. 782. 1907.

innere Energie, die er als Funktion von T erwiesen hatte, als von T und v abhängig analytisch formuliert. Das kann man immerhin noch tun, wenn es auch nicht viel Zweck hat. Es hat nämlich diese Darstellung noch mehr Berechtigung wie die Adlersche:

$$(5) \quad dU = \frac{dU}{dT} \cdot dT,$$

die ja doch eine völlige Identität ist und eigentlich gar keine Aussage mehr enthält: $dU = dU$. Statt (5) müßte man schreiben

$$(5') \quad dU = f(T) \cdot dT \quad \text{oder} \quad U = \int f(T) \cdot dT.$$

Erwärmt man ein ideales Gas langsam um 1°C. , so kann man es sich dabei auch langsam (vermittelt vieler kleiner hintereinander befindlicher Hähne, die je ein Stück Vakuum abgrenzen) gegen das Vakuum zu ausdehnen lassen. Man kann nun die Ausdehnung gegen das Vakuum so regulieren, daß die dadurch hervorgerufene Druckverminderung gerade durch die infolge der Erwärmung entstehende Druckvermehrung aufgehoben wird. Dehnt man nämlich bei der Erwärmung um 1° das Volumen um R/p aus, so ist die neue Temperatur

$$T_1 = T + 1 = \frac{pv + R}{R},$$

das neue Volumen

$$v_1 = v + \frac{R}{p} = \frac{pv + R}{p},$$

der neue Druck also

$$p_1 = \frac{RT_1}{v_1} = p. \quad ^1)$$

Die Wärmemenge, die unter solchen Umständen zugeführt wird, ist die von Hrn. Adler in der erwähnten Arbeit als C_x bezeichnete Größe. Hr. Adler hat keine Angabe gemacht, wie dieses C_x („spezifische Wärme bei konstantem inneren Druck“) zu realisieren wäre. Wir haben nun die Möglichkeit der Realisierung dargetan. Aus unserer Darstellung folgt, daß C_x für alle diejenigen Körper, die der Gleichung (4)

1) Für Körper, die der Gleichung (4) folgen, ist die entsprechende Volumenvermehrung x pro Grad aus der Gleichung

$$p \cdot \{f(v) - f(v + x)\} = f(v) \cdot f(v + x)$$

zu berechnen.

folgen, ohne weiteres gleich C_v ist. (Also nicht bloß für ideale Gase, sondern auch noch für andere, vielleicht auch *reale* Körper.)¹⁾

Denn einerseits ist dann

$$(6) \quad \frac{\partial C_v}{\partial v} = 0,$$

es kommt also auf dasselbe heraus, ob ich zuerst das Volumen v um 1° erwärme und dann gegen das Vakuum um R/p ausdehne, *oder* ob ich zuerst gegen das Vakuum ausdehne und dann erwärme. Andererseits wird die Temperatur eines solchen Körpers durch die Ausdehnung gegen das Vakuum nicht sinken. Also ist ohne weiteres

$$C_\pi = C_v$$

und zwar nicht nur für Körper, deren Zustandsgleichung $p v = R T$ ist, sondern auch noch für andere Körper.

Im allgemeinen ist aber C_π natürlich nicht gleich C_v und insofern könnte man in der Darstellung des Clausius wirklich einen Mangel sehen, dessen Aufdeckung ein Verdienst war.

Zürich, 10. Mai 1907.

1) Dieses folgt aus der bekannten Beziehung

$$\frac{\partial C_v}{\partial v} + T \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} = 0$$

ohne weiteres.

(Eingegangen 23. Mai 1907.)