Elementarer Beweis für die Darstellbarkeit der elliptischen Functionen als Quotienten beständig convergender Potenzreihen.

Von

ADOLF KNESER in Breslau.

In seinem Werke „*Traité des fonctions elliptiques*“ (Paris 1886) hat Herr Halphen die Theorie der elliptischen Functionen von den Integralen ausgehend vollständig und streng durchgeführt, ohne irgendwelche Sätze der eigentlichen Functionentheorie, insbesondere ohne den allgemeinen Begriff des analytischen Zusammenhangs und die Theorie des Integrals mit complexem Integrationswege als bekannt vorauszusetzen; vielmehr werden neben den Grundbegriffen der Differenzial- und Integralrechnung nur die einfachsten Sätze über das Operiren mit convergenten Potenzreihen angewandt. Bei dieser Darstellungsweise werden einige Weitläufigkeiten dadurch verursacht, dass z. B. die Function $\wp u$ zunächst nur für reelle Argumente, dann durch neue Definitionen successive für rein imaginäre und complexe Argumente erklärt werden, und jedesmal für die definirte allgemeinere Function das Fortbestehen der Fundamenteigenschaften, insbesondere die Gültigkeit des Additionstheorems nachgewiesen werden muss. Analoge Entwicklungen müssen für die Function ζu , d. h. das Integral zweiter Gattung als Function des Integrals erster Gattung, sowie für die Function σu durchgeführt werden, und gestalten sich besonders bei letzterer etwas unübersichtlich.

Diese Betrachtungen können, ohne den Kreis der von Herrn Halphen benutzten elementaren Beweismittel zu verlassen, dadurch abgekürzt werden, dass man zwar zunächst die zu untersuchenden Functionen von den Integralen ausgehend für ein beschränktes Gebiet reeller Argumente definirt, sie dann aber gleich zu Anfang der Theorie durch Potenzreihen oder Quotienten von Potenzreihen darstellt, welche sich als beständig convergent erweisen, also auch noch über jenes beschränkte Gebiet hinaus einen bestimmten Sinn behalten; diese Reihen

liefern dann offenbar in der einfachsten Weise die erweiterte Definition der betrachteten Functionen für beliebige Werthe des Arguments. Dass die so erhaltenen allgemeineren Functionen dieselben Fundamenteigenschaften besitzen, wie die zuerst eingeführten specielleren, ergibt sich allgemein auf Grund des Satzes, dass eine Potenzreihe in ihrem ganzen Convergenzbereich den Werth Null hat, wenn dies für ein beschränktes Gebiet reeller Argumente der Fall ist.

Die hiermit angedeutete Methode, die elliptischen Functionen beliebiger Argumente einzuführen, ist im Wesentlichen von Herrn Weierstrass in § 9 seiner „Theorie der Abel'schen Functionen“ (Crelle's Journal Bd. LII p. 346) angegeben, wo insbesondere ein ganz elementarer Beweis für die Darstellbarkeit der Jacobi'schen Functionen $\sin am$ etc. als Quotienten beständig convergenter Potenzreihen geliefert wird. Ein von dem Weierstrass'schen verschiedener Beweis dieser Darstellbarkeit, der sich eng an die Rechnungen der „Fundamenta nova“ anschliesst, bildet den Inhalt der ersten Paragraphen der vorliegenden Abhandlung; sodann werden die analogen Entwicklungen für die Functionen $\wp u$, ξu , σu durchgeführt, und, um die vollständige Kette der Prämissen übersichtlich zu machen, im Anschluss an Lagrange ein elementarer Beweis für das Additionstheorem der Function $\wp u$ hinzugefügt. Dabei bildet durchgehend die Beschränkung auf einen möglichst eng begrenzten Kreis von Beweismitteln das Hauptziel der Untersuchung.

§ 1.

Einführung der Functionen $\Theta(u)$, $H(u)$.

Durch die Gleichung

$$u = \int_0^x \frac{dx}{V(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

in welcher k ein reeller echter Bruch ist, wird für hinreichend kleine reelle Werthe von x , wenn man stets den positiven Werth der Quadratwurzel nimmt, die Grösse u als eindeutige und stetige Function von x definirt, welche gleichzeitig mit x wächst und abnimmt, sodass zu zwei verschiedenen Werthen von x stets zwei verschiedene Werthe von u gehören. Es ist also auch umgekehrt x eine eindeutige und stetige Function von u für alle reellen Werthe dieser Grösse, deren absoluter Betrag eine hinreichend klein gewählte positive Grösse nicht übersteigt; man bezeichne den Inbegriff dieser Werthe von u durch (U) und für jeden derselben den bestimmten zugehörigen Werth von x durch $\operatorname{sn} u$. Dann besteht offenbar die Differenzialgleichung

$$(1) \quad (\operatorname{sn}' u)^2 = (1 - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u),$$

und da entgegengesetzte Werthe von x auch entgegengesetzte Werthe von u ergeben, so ist

$$(2) \quad \operatorname{sn}(-u) = -\operatorname{sn} u.$$

Nun sei für den Fall, dass die drei Grössen u , v , $u+v$ dem Gebiet (U) angehören, die Formel

$$\operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}' v + \operatorname{sn} v \operatorname{sn}' u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}$$

bewiesen, etwa nach der elementaren Methode, welche Herr Darboux angegeben und Herr Bertrand in seinem „*Traité de calcul intégral*“ reproducirt hat. Dann ergibt sich mit Berücksichtigung der Gleichung (1), indem man Zähler und Nenner des Ausdrucks $\operatorname{sn}(u+v)$ mit der Differenz $\operatorname{sn} u \operatorname{sn}' v - \operatorname{sn} v \operatorname{sn}' u$ multiplicirt,

$$(3) \quad \operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 v}{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}' v - \operatorname{sn} v \operatorname{sn}' u}.$$

Aus dieser Formel kann man das Additionstheorem der Integrale zweiter Gattung nach einer Methode ableiten, welche Herr Schellbach in § 106 seines Werkes „*Die Lehre von den elliptischen Integralen etc.*“ (Berlin 1864) angewandt hat. Setzt man nämlich $u = -t$, $u+v = w$, so gehören auch die Grössen w , t , $w+t$ dem Gebiet (U) an, und aus den Formeln (3) und (2) folgt sofort:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}^2(w+t) - \operatorname{sn}^2 t &= \operatorname{sn} w (\operatorname{sn} t \operatorname{sn}'(w+t) + \operatorname{sn}' t \operatorname{sn}(w+t)) \\ &= \operatorname{sn} w \cdot \frac{d}{dt} (\operatorname{sn} t \operatorname{sn}(w+t)). \end{aligned}$$

Integrirt man hierin von 0 bis t , so ergibt sich

$$\int_0^t \operatorname{sn}^2(w+t) dt - \int_0^t \operatorname{sn}^2 t dt = \operatorname{sn} w \operatorname{sn} t \operatorname{sn}(w+t),$$

oder in anderer Form

$$\begin{aligned} (4) \quad \int_w^{w+t} \operatorname{sn}^2 t dt - \int_0^t \operatorname{sn}^2 t dt &= \int_0^{w+t} \operatorname{sn}^2 t dt - \int_0^w \operatorname{sn}^2 t dt - \int_0^t \operatorname{sn}^2 t dt \\ &= \operatorname{sn} w \operatorname{sn} t \operatorname{sn}(w+t). \end{aligned}$$

Setzt man nun mit Jacobi, indem man durch K und E die vollständigen Integrale erster und zweiter Gattung bezeichnet,

$$Z(u) = \int_0^u (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u) du - \frac{E}{K} u,$$

so ist die Function $Z(u)$ ebenso wie $\operatorname{sn} u$ für alle dem Gebiet (U) angehörigen Argumente definit, und genügt der Gleichung

$$(5) \quad Z(-u) = -Z(u).$$

Gehören dann die Werthe $u, v, u + v, u - v$ dem Gebiet (U) an, so erhält man aus den Gleichungen (4) und (5) die Additionstheoreme

$$(6) \quad \begin{aligned} Z(u + v) &= Z(u) + Z(v) - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u + v), \\ Z(u - v) &= Z(u) - Z(v) + k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u - v). \end{aligned}$$

Addirt man diese Gleichungen und berücksichtigt das Additionstheorem der Function $\operatorname{sn} u$, so ergibt sich

$$(7) \quad \begin{aligned} Z(u + v) + Z(u - v) - 2Z(u) &= \frac{-2k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn}^2 v \operatorname{sn}' u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \\ &= \frac{d}{du} \lg(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v). \end{aligned}$$

Setzt man ferner mit Jacobi, indem man durch $\Theta(0)$ eine von Null verschiedene Constante bezeichnet,

$$\Theta(u) = \Theta(0) e^{\int_0^u Z(u) du}, \quad H(u) = \sqrt{k} \operatorname{sn} u \cdot \Theta(u),$$

sodass auch die Functionen Θ und H für das Gebiet (U) definit sind und die Gleichung

$$(8) \quad \Theta(-u) = \Theta(u)$$

besteht, so kann die Formel (7) in folgende Gestalt gebracht werden:

$$\frac{d}{du} (\lg \Theta(u + v) + \lg \Theta(u - v) - 2 \lg \Theta(u)) = \frac{d}{du} \lg(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v).$$

Hieraus folgt durch Integration

$$\Theta(u + v) \Theta(u - v) = V \Theta^2(u) (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v),$$

wo V eine von u unabhängige Grösse ist; setzt man speciell $u = 0$ und berücksichtigt die Gleichung (8), so ergibt sich

$$(9) \quad V = \frac{\Theta^2(v)}{\Theta^2(0)}, \quad \Theta^2(0) \Theta(u + v) \Theta(u - v) = \Theta^2(u) \Theta^2(v) (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v).$$

Die Ableitung dieses Resultats aus den Formeln (6) hat Herr Tichomandritzky in Bd. XXII dieser Annalen p. 452 angegeben.

Multiplicirt man die letzte Gleichung mit der aus dem Additionstheorem der Function $\operatorname{sn} u$ folgenden

$$k \operatorname{sn}(u + v) \operatorname{sn}(u - v) = \frac{k \operatorname{sn}^2 u - k \operatorname{sn}^2 v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}$$

und substituirt allgemein

$$(10) \quad \operatorname{sn} w = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(w)}{\Theta(w)},$$

so erhält man, wie schon Jacobi in § 61 der „Fundamenta nova“ bemerkt hat, das Resultat

$$(11) \quad \Theta^2(0) H(u + v) H(u - v) = H^2(u) \Theta^2(v) - H^2(v) \Theta^2(u).$$

Eine ähnliche Gestalt kann man offenbar durch die Substitutionen (10) der Formel (9) geben:

$$(12) \quad \Theta^2(0) \Theta(u+v) \Theta(u-v) = \Theta^2(u) \Theta^2(v) - H^2(u) H^2(v).$$

Jetzt werde die Gleichung (11) nach u differenzirt und in der resultirenden sowie der Gleichung (12) die Annahme $u = v$ gemacht; dann ergibt sich

$$(13) \quad H'(0) \Theta^2(0) H(2u) = 2H(u) \Theta(u) (\Theta(u) H'(u) - H(u) \Theta'(u)) \\ \Theta^4(0) \Theta(2u) = \Theta^4(u) - H^4(u).$$

Dabei ist die neue Voraussetzung einzuführen, dass auch $2u$ eine Grösse des Gebiets (U) sein muss, für welches allein die eingeführten Functionen definirt sind.

Die Gleichungen (13) ergeben nun einen ersten Beweis für die Darstellbarkeit der Function $\operatorname{sn} u$ als Quotient zweier beständig convergenter Potenzreihen. Denn aus der Gleichung

$$u = \int_0^{\operatorname{sn} u} \frac{dx}{V(1-x^2)(1-k^2x^2)}$$

folgt offenbar leicht, dass die Function $\operatorname{sn} u$ für alle dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen Argumente u in eine convergente Potenzreihe entwickelt werden kann; hieraus schliesst man auf Grund der aufgestellten Definitionen, dass dasselbe von den Functionen $Z(u)$, $\Theta(u)$, $H(u)$ gilt. Die Potenzreihen, welche für $\Theta(u)$, $H(u)$ erhalten werden, müssen aber infolge der Gleichungen (13) beständig convergiren, also noch über das Gebiet hinaus, für welches zunächst die Functionen Θ , H definirt sind. Da nun die Gleichung

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{V_k} \frac{H(u)}{\Theta(u)}$$

besteht, so ist eine Definition der Function $\operatorname{sn} u$ für beliebige Argumente unmittelbar gegeben, und die Darstellbarkeit dieser Function als Quotient zweier beständig convergenter Potenzreihen bewiesen.

Indessen benutzt diese an die Gleichungen (13) geknüpfte Schlussreihe analytische Sätze, deren strenge Begründung genauere Untersuchungen über Summen von unendlich vielen Potenzreihen voraussetzt. Die Berufung auf diese Sätze entbehrlich zu machen und den Umfang der nothwendigen Beweismittel genauer zu präcisiren, ist das Ziel der zunächst folgenden Untersuchungen.

§ 2.

Allgemeine analytische Hülfsätze.

Bezeichnet man eine nach Potenzen von u fortschreitende Potenzreihe, welche für von Null verschiedene Werthe u convergirt, schlecht hin als „convergent“, so kann man zunächst einige später zu verwendende Sätze elementaren Charakters in folgender Weise formuliren.

(I) Eine convergente Potenzreihe verschwindet nur dann für alle reellen dem absoluten Betrage nach unter einer gewissen Grenze liegenden Werthe des Arguments, wenn die sämtlichen Coefficienten den Werth Null haben.

(II) Eine endliche Anzahl nach Potenzen einer und derselben Grösse fortschreitender, in irgend einem Bereich (u) convergenter Potenzreihen können wie endliche Summen addirt, subtrahirt und multiplicirt werden, und ergeben als Resultat einer endlichen Anzahl solcher Operationen eine im Bereich (u) convergente Potenzreihe.

(III). Eine convergente Potenzreihe kann gliedweise differenzirt und integrirt werden; Ableitung und Integral sind ebenfalls convergente Potenzreihen,

Die beiden letzten Sätze beweist man wohl am einfachsten auf Grund der Bemerkung, dass eine convergente Potenzreihe $a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots$ stets durch eine Substitution $u = \alpha v$ in eine solche umgewandelt werden kann, bei welcher von einem gewissen Gliede an die absoluten Beträge aller Coefficienten echte Brüche, die einzelnen Glieder also absolut kleiner sind als die entsprechenden der Reihe $1 + v + v^2 + \dots$. Ueber die Convergenz- und Werthverhältnissé dieser letzteren kann man sich aber bekanntlich durch elementare Betrachtungen orientiren; vergleicht man mit ihrem Rest den der Reihe $a_0 + a_1 \alpha v + a_2 \alpha^2 v^2 + \dots$, so ergibt sich der Satz (II) und die gleichmässige Convergenz der Reihe $a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots$; aus dieser folgt aber, dass man gliedweise integriren und hieraus, dass man auch gliedweise differenziren darf, womit der Satz (III) bewiesen ist. — Mit ebenso elementaren Mitteln kann auch der Satz (I) abgeleitet werden; vgl. Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik Bd. I p. 283.

Eine positive Grösse α hat die angegebene Beschaffenheit, wenn die Reihe $a_0 + a_1 u + \dots$ unter der Voraussetzung $|u| \leq \alpha$ convergirt; dann convergirt die Reihe $a_0 + a_1 \alpha v + a_2 \alpha^2 v^2 + \dots$, sobald $|v| \leq 1$ ist, und in der abgeleiteten Reihe $a_1 \alpha + 2a_2 \alpha^2 v + 3a_3 \alpha^3 v^2 + \dots$ ist von einem gewissen Gliede an jeder Coefficient dem absoluten Betrage nach nicht grösser als der entsprechende der Reihe $1 + 2v + 3v^2 + \dots$. Da nun diese bekanntlich unter der Bedingung $|v| < 1$ convergirt, so gilt dasselbe für die Reihe

$a_1\alpha + 2a_2\alpha^2v + \dots$, und wenn man wieder $\alpha v = u$ setzt, so folgt, dass die Reihe $a_1 + 2a_2u + 3a_3u^2 + \dots$ convergirt, sobald $|u| < \alpha$ ist. Daraus ergibt sich,

(IV) dass der Convergenzkreis einer Potenzreihe nicht grösser ist als der ihrer Ableitung.

Mit Hülfe dieser vier verhältnissmässig elementaren Sätze möge noch ein fünfter von speciellerer Natur bewiesen werden, der gewöhnlich aus schwerer zu beweisenden allgemeinen Sätzen gefolgert wird, der Satz nämlich

(V) dass zu einer beliebig gegebenen convergenten Potenzreihe $\varphi(u)$ eine zweite $f(u)$ gefunden werden kann, welche gleichfalls convergent ist und der Gleichung

$$(1) \quad \frac{f'(u)}{f(u)} = \varphi(u)$$

genügt.

Setzt man zum Beweis dieser Behauptung

$$\varphi(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + \dots,$$

und nimmt an, es existire eine convergente, der Gleichung (1) genügende Potenzreihe

$$f(u) = b_0 + b_1u + b_2u^2 + \dots,$$

so ergibt sich mit Rücksicht auf die Sätze (III), (II) und (I)

$$(2) \quad \begin{aligned} b_1 + 2b_2u + 3b_3u^2 + \dots &= (a_0 + a_1u + \dots)(b_0 + b_1u + \dots) \\ (\lambda + 1)b_{\lambda+1} &= b_0a_\lambda + b_1a_{\lambda-1} + \dots + b_\lambda a_0 \end{aligned}$$

für jeden Index λ ; wenn umgekehrt die sämtlichen Gleichungen (2) bestehen, und $f(u)$ eine convergente Potenzreihe ist, so besteht die Relation (1). Dabei sind alle Grössen b_λ bestimmt, sobald man b_0 willkürlich fixirt hat.

Wenn nun zunächst die absoluten Beträge von a_0, b_0 echte Brüche sind, und, was bei der Convergenz der Reihe $\varphi(u)$ möglich ist, eine positive Zahl α so gross gewählt wird, dass allgemein $|a_\lambda| < \alpha^\lambda$ ist, so lehren die Gleichungen (2), in welchen rechts $\lambda + 1$ Summanden stehen, dass aus den Ungleichungen

$$|b_0| < 1, |b_1| < 1, |b_2| < \alpha, |b_3| < \alpha^2, \dots |b_\lambda| < \alpha^{\lambda-1}$$

unter der Annahme $\alpha > 1$ die weitere Ungleichung $|b_{\lambda+1}| < \alpha^\lambda$ folgt; es sind also die Coefficienten der Reihe $f(u)$, wenn man sie den Gleichungen (2) entsprechend bestimmt, beziehentlich dem absoluten Betrage nach kleiner, als die entsprechenden Coefficienten der convergenten Reihe $1 + u + \alpha u^2 + \alpha^2 u^3 + \dots$; die Reihe $f(u)$ ist somit convergent und genügt der Gleichung (1).

Hat man dagegen die Ungleichung $|a_0| \geq 1$, so setzt man einfach

$$\varphi(u) = a_0' + a_0'' + a_1 u + a_2 u^2 + \dots$$

wo $|a_0''| < 1$ ist, und bestimmt, was nach dem Obigen möglich ist, eine convergente Potenzreihe $g(u)$ durch die Forderung

$$g'(u) = g(u) (a_0'' + a_1 u + a_2 u^2 + \dots);$$

dann genügt die Function

$$f(u) = e^{a_0'' u} g(u),$$

welche nach dem Satze (II) in eine convergente Potenzreihe entwickelt werden kann, der Gleichung (1), womit der Satz (V) allgemein bewiesen ist.

§ 3.

Entwicklung der Function $\operatorname{sn} u$ nach Potenzen von u .

Nach diesen allgemeinen Vorbereitungen kann ohne Heranziehung weiterer analytischer Sätze die Entwickelbarkeit der Function $x = \operatorname{sn} u$ in eine convergente Potenzreihe nachgewiesen werden.

Diese Function genügt nach § 1 der Differenzialgleichung

$$(1) \quad x'^2 = (1 - x^2) (1 - k^2 x^2);$$

es werde statt ihrer die allgemeinere Function y untersucht, welche der Gleichung

$$(2) \quad y'^2 = (1 + \alpha y^2) (1 + \beta y^2)$$

genügt und wie $\operatorname{sn} u$ eine ungerade Function von u ist; ihre Ableitung habe ebenso wie $\operatorname{sn}' u$ für $u = 0$ den Werth 1. Existirt eine solche Function, so kann sie nach ganzen positiven Potenzen von u nur in folgender Weise entwickelbar sein:

$$(3) \quad y = c_0 u + c_1 u^3 + c_2 u^5 + \dots, \quad c_0 = 1.$$

Aus der Gleichung (2) ergiebt sich nun unmittelbar

$$(4) \quad y'' = (\alpha + \beta) y + 2\alpha\beta y^3,$$

und hieraus, indem man die Entwicklung (3) einsetzt und auf Grund der Sätze (III) und (I) die Coefficienten von $u^{2\lambda+1}$ auf beiden Seiten gleichsetzt,

$$(5) \quad (2\lambda + 3) (2\lambda + 2) c_{2\lambda+1} = (\alpha + \beta) c_\lambda + 2\alpha\beta \sum_{\mu, \nu, \varrho} c_\mu c_\nu c_\varrho;$$

dabei ist rechts über alle Systeme nicht negativer ganzer Zahlen μ, ν, ϱ zu summiren, welche der Bedingung

$$(2\mu + 1) + (2\nu + 1) + (2\varrho + 1) = 2\lambda + 1$$

genügen, so dass keine der Zahlen μ, ν, ϱ den Werth λ überschreiten kann. Unter der eingeführten Annahme $c_0 = 1$ sind also sämtliche Coefficienten c_λ eindeutig bestimmt, und die mit ihnen gebildete Reihe (3) genügt, wenn sie convergirt, der Differenzialgleichung (4).

In der Recursionsformel (5) ist besonders zu beachten, dass ihre rechte Seite, als ganze Function der Argumente $\alpha, \beta, c_0, c_1, \dots, c_2$ betrachtet, nur positive Coefficienten besitzt. Bezeichnet man also durch $C_0, C_1, \dots, C_2$ positive Grössen, bestehen ferner die Ungleichungen

$$1 \geq |\alpha|, \quad 1 \geq |\beta|, \quad C_0 \geq |c_0|, \quad C_1 \geq |c_1|, \quad \dots \quad C_2 \geq |c_2|$$

genügen, und setzt man

$$(6) \quad (2\lambda + 3)(2\lambda + 2) C_{\lambda+1} = 2C_\lambda + 2 \sum_{\mu, \nu, \varrho} C_\mu C_\nu C_\varrho,$$

indem man über μ, ν, ϱ in derselben Weise wie in der Formel (5) summirt, so ist $C_{\lambda+1}$ eine positive Grösse und besteht die Ungleichung

$$C_{\lambda+1} \geq |c_{\lambda+1}|.$$

Setzt man speciell $\alpha = -1, \beta = -k^2, C_0 = 1$ und definirt alle Grössen $C_1, C_2, \dots$ successive durch die Gleichungen (6), so sind offenbar die Ungleichungen

$$1 \geq |\alpha|, \quad 1 \geq |\beta|, \quad C_0 \geq |c_0|,$$

da $c_0 = 1$ und k ein echter Bruch ist, erfüllt; geht also unter diesen Annahmen c_2 in c_2' über, sodass die Reihe

$$x = u + c_1' u^3 + c_2' u^5 + \dots,$$

wenn sie convergirt, der Differenzialgleichung

$$x'' = -(1 + k^2)x + 2k^2 x^3$$

genügt, so ist allgemein

$$C_\lambda \geq |c_\lambda'|.$$

Nun ist die Reihe

$$(7) \quad z = C_0 u + C_1 u^3 + C_2 u^5 + \dots, \quad C_0 = 1$$

wenn sie convergent ist, ein Integral der Differenzialgleichung

$$(8) \quad z'' = 2z + 2z^3,$$

da auf beiden Seiten die Coefficienten gleich hoher Potenzen von u infolge der Formeln (6) gleich sind.

Hieraus folgt durch Integration, wenn man durch a eine Constante bezeichnet,

$$z^2 = a + 2z^2 + z^4,$$

und da für $u = 0$ die Gleichungen $z = 0, z' = 1$ bestehen, so folgt $a = 1$, also

$$(9) \quad z' = 1 + z^2.$$

Unter der Voraussetzung also, dass die Entwicklung (7) convergirt, besteht die Gleichung (9); umgekehrt folgt aus dieser offenbar die

Gleichung (8). Wenn aber eine der Gleichung (9) genügende convergente Entwicklung von der Form (7) existirt, so ist dieselbe mit der Entwicklung (7) identisch, da diese durch ihre Form und die Differenzialgleichung (8) die Recursionsformel (6) ergibt, welche die Coefficienten unter den Annahmen $C_0 = 1$ in eindeutiger Weise bestimmt.

Versucht man demgemäss, der Gleichung (9) durch eine Reihe von der Form (7) zu genügen, so ergibt sich auf Grund der Sätze (I), (II), (III) die Recursionsformel

$$(10) \quad (2\lambda + 1) C_{\lambda+1} = C_0 C_{\lambda-1} + C_1 C_{\lambda-2} + \dots + C_{\lambda-1} C_0.$$

Diese Formel lehrt, dass $C_{\lambda+1}$ positiv und nicht grösser als Eins ist, wenn dasselbe von jeder der Grössen $C_0, C_1, \dots, C_{\lambda}$ gilt; da nun $C_0 = 1$ ist, so folgt allgemein

$$0 < C_{\lambda} \leq 1.$$

Die Reihe $z = C_0 u + C_1 u^3 + \dots$, in welcher $C_0 = 1$ und die übrigen Coefficienten durch die Gleichungen (10) bestimmt sind, convergirt also sicher, sobald $|u| < 1$ ist, und genügt infolge der Formeln (10) den Differenzialgleichungen (9) und (8). Da nun diese Reihe, wie schon bemerkt, mit der früher betrachteten Reihe (7) identisch ist, die Zeichen C_{λ} also jetzt dieselbe Bedeutung haben wie vorher, so folgt aus den Ungleichungen $C_{\lambda} \geq |c'_{\lambda}|$, dass auch die Reihe

$$(11) \quad x = u + c'_1 u^3 + c'_2 u^5 + \dots$$

für von Null verschiedene Werthe von u convergirt und der Differenzialgleichung

$$x'' = -(1 + k^2)x + 2k^2 x^3$$

genügt. Hieraus ergibt sich mit Berücksichtigung der für $u = 0$ bestehenden Gleichungen $x = 0, x' = 1$

$$x'^2 = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2).$$

Aus der Darstellung (11) folgt ferner nach dem Satze (III)

$$x' - 1 = 3c'_1 u^2 + 5c'_2 u^4 + \dots,$$

wo die Glieder der rechten Seite wegen der Ungleichungen

$$(12) \quad |c'_{\lambda}| \leq C_{\lambda} \leq 1$$

einzelnen dem absoluten Betrage nach nicht grösser sind als die entsprechenden der leicht summirbaren Reihe $3u^2 + 5u^4 + 7u^6 + \dots$. Vergleicht man mit der Summe dieser Reihe den absoluten Betrag der Differenz $x' - 1$, so ergibt sich, dass dieser für alle Argumente u , deren absoluter Betrag eine gewisse Grenze nicht übersteigt, unter einer beliebig gegebenen positiven Grösse verbleibt. Für die bezeichneten Argumente u besteht somit, wenn man die Quadratwurzel positiv nimmt, die Gleichung

$$\frac{1}{x'} = \frac{du}{dx} = \frac{1}{V(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

wodurch die Identität des Ausdrucks (11) mit der in § 1 definirten Function $\operatorname{sn} u$ evident wird. Für alle reellen Werthe des Arguments also, welche dem absoluten Betrage nach eine gewisse positive Grösse nicht überschreiten, besteht die convergente Entwicklung

$$\operatorname{sn} u = u + c_1' u^3 + c_2' u^5 + \dots, \quad |c_2| \leq 1.$$

Beiläufig bemerkt ist $z = \operatorname{tg} u$; mit Rücksicht auf die Ungleichungen (12) folgt also, dass die Coefficienten in der Potenzreihenentwicklung von $\operatorname{sn} u$ dem absoluten Betrage nach nicht grösser sind als die entsprechenden der Potenzreihe $\operatorname{tg} u$, welche in bekannter Weise durch die Bernoulli'schen Zahlen ausgedrückt werden können.

§ 4.

Die Function $\operatorname{sn} u$ als Quotient zweier beständig convergenter Potenzreihen.

Aus der erhaltenen Entwicklung der Function $\operatorname{sn} u$ folgt nach den Sätzen (II) und (III) auch die Entwickelbarkeit der von $\operatorname{sn}^2 u$ und $Z(u)$ in convergente Potenzreihen. Dann kann man auf Grund des Satzes (V) eine convergente Potenzreihe $f(u)$ bestimmen, welche der Gleichung

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = Z(u)$$

genügt und offenbar nur bis auf einen constanten Factor bestimmt ist; da nun aus dieser Gleichung folgt

$$\lg f(u) = a + \int_0^u Z(u) du,$$

wobei a eine Constante ist, so ergibt sich mit Rücksicht auf die in § 1 gegebene Definition der Function $\Theta(u)$, dass die Differenz der Grössen $\lg f(u)$ und $\lg \Theta(u)$ von u unabhängig sein muss. Bei passender Bestimmung des in der Reihe $f(u)$ noch willkürlichen Factors kann man also setzen

$$\Theta(u) = f(u),$$

d. h. die Grösse $\Theta(u)$ kann ebenfalls in eine convergente Potenzreihe entwickelt werden. Dasselbe gilt dann nach dem Satze (II) von der Function

$$H(u) = \sqrt{k} \operatorname{sn} u \cdot \Theta(u).$$

Ersetzt man nun u durch $\frac{u}{2}$ in den Formeln (13) des § 1, welche für ein hinreichend beschränktes Gebiet reeller Werthe von u bewiesen waren, so erhält man

$$(1) \quad \begin{aligned} H'(0) \Theta^2(0) H(u) &= 2H\left(\frac{u}{2}\right) \Theta\left(\frac{u}{2}\right) \left(\Theta\left(\frac{u}{2}\right) H'\left(\frac{u}{2}\right) - H\left(\frac{u}{2}\right) \Theta'\left(\frac{u}{2}\right) \right) \\ \Theta^4(0) \Theta(u) &= \Theta^4\left(\frac{u}{2}\right) - H^4\left(\frac{u}{2}\right) \end{aligned}$$

und der Satz (I) ergibt, dass diese Gleichungen, wenn für Θ, H die Potenzreihenentwicklungen eingesetzt werden, identisch bestehen, d. h. in jeder von ihnen beiderseits die Coefficienten gleich hoher Potenzen von u dieselben sind. — Jetzt sei A eine derartige positive Grösse, dass beide Reihen $\Theta(u), H(u)$ convergiren, sobald $|u| < A$ ist; dann convergiren die Reihen $\Theta\left(\frac{u}{2}\right), H\left(\frac{u}{2}\right)$ unter der Voraussetzung $|u| < 2A$; da ferner nach dem Satze (IV) der Convergencekreis der Reihen Θ', H' nicht kleiner ist als derjenige der Reihen Θ, H , so convergiren alle auf der rechten Seite der Gleichungen (1) auftretenden Reihen, sobald $|u| < 2A$ ist. Unter dieser Annahme sind also stets auch die Reihen $\Theta(u), H(u)$ convergent. — Man kann jetzt die an die Gleichungen (1) geknüpften Schlussreihe wiederholen, indem man A durch $2A$ ersetzt und erhält dann das Resultat, dass die Reihen $\Theta(u), H(u)$ schon unter der Voraussetzung $|u| < 4A$ convergiren, u. s. f.; durch Fortsetzung dieses Schlussverfahrens ergibt sich, dass diese Reihen beständig convergent sind.

Ursprünglich waren aber die Functionen $\Theta(u), H(u)$ ebenso wie $\operatorname{sn} u$ nur für das Gebiet (U) definirt; für hinreichend kleine reelle Werthe des Arguments können sie, wie gezeigt, durch Potenzreihen dargestellt werden, welche für jeden Werth von u convergiren, also auch über das Gebiet (U) hinaus einen bestimmten Sinn behalten. Man kann also jetzt allgemeinere Definitionen aufstellen, indem man zunächst durch die abgeleiteten Potenzreihenausdrücke für $\Theta(u), H(u)$ diese Functionen für beliebige complexe Argumente erklärt; dann liefern die Gleichungen

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(u)}{\Theta(u)}, \quad Z(u) = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}$$

unmittelbar die allgemeineren Functionen $\operatorname{sn} u$ und $Z(u)$. Diese Ausdrücke ergeben für alle hinreichend kleinen reellen Werthe von u die früher betrachteten specielleren Functionen; für diese Werthe besteht also z. B. die Differentialgleichung

$$(2) \quad (\operatorname{sn}' u)^2 = (1 - \operatorname{sn}^2 u) (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u),$$

oder es ist

$$(3) \quad (H'(u) \Theta(u) - H(u) \Theta'(u))^2 = (k \Theta^2(u) - H^2(u)) (\Theta^2(u) - k H^2(u)).$$

Dann ergibt der Satz (I) die Gültigkeit der Gleichung (3) für jeden Werth von u ; mithin genügt auch die eingeführte allgemeinere Function $\operatorname{sn} u$ der Differentialgleichung (2). Aus dieser aber kann durch

Differenziren und Integriren das Additionstheorem hergeleitet werden, sodass dasselbe auch für beliebige Argumente uneingeschränkte Geltung hat.

Nachdem die zu betrachtenden Functionen für jeden Werth der unabhängigen Variablen definirt sind, kann man in aller Strenge die Grössen $sn\,u$, $Z(u)$, $\Theta(u)$ mittelst der einfachen in den §§ 19 und 56 der „Fundamenta nova“ angegebenen Rechnungen durch Functionen reeller Argumente ausdrücken und aus den erhaltenen Resultaten die Periodicitätseigenschaften ableiten; sodann erhält man nach der Methode der §§ 57 und 61 der „Fundamenta“ die Functionalgleichungen, denen die Functionen Θ , H genügen, und aus diesen die Darstellung der Functionen $cn\,u$, $dn\,u$. Letztere Entwicklungen haben bei Jacobi insofern eine Lücke, als die Function $\Theta(u)$, wenn man von den Productausdrücken absieht, für complexe Argumente nirgends definirt oder durch die Functionen reeller und rein imaginärer Argumente ausgedrückt wird; diese Lücke wird offenbar durch die hier gegebenen Betrachtungen ausgefüllt.

Will man endlich die Functionen Θ , H durch die bekannten trigonometrischen Reihen darstellen, so muss man entweder aus der Theorie der Fourier'schen Reihen als bekannt voraussetzen, dass eine reellperiodische Function auf eine einzige Weise in eine trigonometrische Reihe entwickelt werden kann, oder man muss die in § 62 der „Fundamenta“ gegebene Ableitung als heuristisch betrachten, und von den einmal erhaltenen Θ -Reihen ausgehend ohne weitere Voraussetzungen in der Weise der nachgelassenen Vorlesungen von Jacobi beweisen, dass die Θ -Quotienten mit den elliptischen Functionen, und zwar solchen beliebigen Moduls identificirt werden können. Bei diesem Nachweis würde von analytischen Sätzen, wenn man sich auf reelle, echt gebrochene Moduln beschränkt, nur noch als bewiesen vorauszusetzen sein, dass zwei absolut convergente Reihen stets wie endliche Summen gliedweise multiplicirt werden können.

§ 5.

Definition und Additionstheorem der Function $\wp u$.

Um den bisherigen analoge Entwicklungen für die von Herrn Weierstrass eingeführten Functionen bewerkstelligen zu können, werde zunächst u als zweiwerthige Function von s definirt durch die Gleichung

$$u = \int_s^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}},$$

in welcher g_2, g_3 beliebige reelle Constanten sind, die untere Grenze s grösser ist als die grösste reelle Wurzel der Gleichung

$$4s^3 - g_2s - g_3 = 0$$

und die Quadratwurzel während der ganzen Integration mit einem und demselben Zeichen genommen wird. Giebt man der Grösse s immer grössere Werthe und nimmt das Radical für alle diese Werthe mit demselben Zeichen, so nähert sich der erhaltene Werth von u je nach der Wahl des Zeichens entweder beständig abnehmend oder beständig wachsend dem Grenzwert Null, sodass zwei verschiedene Werthe von s stets verschiedene Werthe von u ergeben. Es gehört also umgekehrt, wenn man sich auf ein hinreichend kleines den Werth Null enthaltendes Gebiet reeller Werthe von u beschränkt, zu jedem derselben ein einziger bestimmter Werth $s = \wp u$, und da die beiden zu einem bestimmten Werth s gehörigen Werthe von u nur durch das Zeichen unterschieden sind, so ist allgemein $\wp(-u) = \wp u$; ferner ist offenbar $\wp 0 = \infty$. Führt man in der Definitionsgleichung (1) die neue Integrationsvariable

$$v = \frac{t}{\mu^2}$$

ein, so ergibt sich

$$u \mu = \int_{\frac{s}{\mu^2}}^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{4v^3 - g_2 \mu^{-4} v - g_3 \mu^{-6}}}$$

oder, wenn man in der Function $\wp$ die Invarianten in Evidenz setzt,

$$(2) \quad \wp(u; g_2, g_3) = \mu^2 \wp(\mu u; g_2 \mu^{-4}, g_3 \mu^{-6}).$$

Endlich ergibt die Definition (1) unmittelbar die Differentialgleichung

$$(3) \quad (\wp' u)^2 = 4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3.$$

Es mögen nun die drei Grössen u , c , $u + c$ dem reellen Werthgebiet (U) angehören, für welches die Function $\wp u$ eindeutig definit ist; setzt man dann nach Lagrange

$$p = \wp u + \wp(u+c), \quad q = \wp u - \wp(u+c)$$

und bezeichnet die Ableitungen nach u durch Accente, so erhält man zunächst mit Benutzung der Gleichung (3)

$$\begin{aligned} p'q' &= (\wp' u)^2 - (\wp'(u+c))^2 = 4 \left[\left(\frac{p+q}{2} \right)^3 - \left(\frac{p-q}{2} \right)^3 \right] - g_2 q \\ &= 3p^2 q + q^3 - g_2 q. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man ferner das durch Differentiation der Gleichung (3) erhaltene Resultat

$$\wp'' u = 6\wp^2 u - \frac{1}{2} g_2,$$

so ergibt sich

$$p'' = 6(\wp^2 u + \wp^2(u+c)) - g_2 = 3(p^2 + q^2) - g_2.$$

Hieraus folgt

$$qp'' - p'q' = 2q^3, \quad \frac{qp'' - p'q'}{q^2} = 2q,$$

oder kurz

$$\left(\frac{p'}{q}\right)' = 2q.$$

Diese Gleichung kann in integrierbarer Form geschrieben werden

$$-\frac{2p'}{q} \left(\frac{p'}{q}\right)' = 4p'$$

und ergibt als Integral

$$\left(\frac{p'}{q}\right)^2 = 4p + a,$$

worin die Grösse a von u unabhängig ist. Setzt man jetzt für die Grössen p, q ihre Werthe ein, so erhält man

$$(4) \quad \left(\frac{\wp' u + \wp'(u+c)}{\wp u - \wp(u+c)}\right)^2 = 4\wp u + 4\wp(u+c) + a,$$

oder in anderer Form

$$(5) \quad \left[\left(\frac{\wp' u}{\wp u - \wp(u+c)}\right)^2 - 4\wp u\right] + \frac{2\wp' u \wp'(u+c)}{(\wp u - \wp(u+c))^2} + \left(\frac{\wp'(u+c)}{\wp u - \wp(u+c)}\right)^2 = a + 4\wp(u+c).$$

Der erste, in eckige Klammern geschlossene Ausdruck hat in Folge der Gleichung (3) den Werth

$$\begin{aligned} & -\frac{g_2 \wp u - g_3 - 4\wp u \wp^2(u+c) + 8\wp^2 u(u+c)}{(\wp u - \wp(u+c))^2} \\ & = \frac{8\wp(u+c) - \frac{g_2 \wp u + g_3 + 4\wp u \wp^2(u+c)}{\wp^2 u}}{\left(1 - \frac{\wp(u+c)}{\wp u}\right)^2}; \end{aligned}$$

da nun $\wp 0 = \infty$, so ist der Grenzwert dieses Ausdruckes für $u = 0$ offenbar $8\wp c$. Schreibt man ferner die Differentialgleichung (3) in der Form

$$\frac{\wp' u}{\wp^2 u} = \sqrt{\frac{4}{\wp u} - \frac{g_2}{\wp^2 u} - \frac{g_3}{\wp^4 u}},$$

so sieht man sofort, dass auf der linken Seite der Gleichung (5) das zweite und dritte Glied verschwinden, wenn man $u = 0$ setzt; durch diese Annahme erhält also die Gleichung (5) die folgende Gestalt

$$8\wp c = a + 4\wp c, \quad a = 4\wp c.$$

Die Gleichung (4) ergibt somit

$$\left(\frac{\wp' u + \wp'(u+c)}{\wp u - \wp(u+c)}\right)^2 = 4\wp u + 4\wp c + 4\wp(u+c).$$

Bedenkt man jetzt, dass aus der Gleichung

$$\wp u = \wp(-u)$$

die weitere

$$\wp' u = -\wp'(-u)$$

folgt; dass ferner, wenn man $u + c = -v$ setzt, auch die drei Grössen $u, v, u + v$ dem Gebiet (U) angehören, für welches die Function $\wp$ definirt ist, so erhält man schliesslich das Additionstheorem in bekannter Form

$$(6) \quad \left(\frac{1}{2} \frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} \right)^2 = \wp u + \wp v + \wp(u+v).$$

Beim Beweis dieser Formel ist von den Eigenschaften der Function $\wp u$ nur benutzt, dass sie für ein gewisses Gebiet von Argumenten eindeutig definirt ist, für $u = 0$ unendlich wird und der Differentialgleichung (3) genügt. Wenn also diese Eigenschaften bei einer verallgemeinerten Function $\wp u$ erhalten bleiben, so besteht auch für diese das Additionstheorem (6).

Die Gleichung (4) kann als Specialfall der ursprünglichen Form des Additionstheorems angesehen werden, welche Lagrange im ersten Theil der „Théorie des fonctions analytiques“, Chap. XI (Oeuvres t. IX, p. 129) angegeben hat. Setzt man nämlich

$$\wp u = x, \quad \wp(u+c) = y,$$

so dass die Gleichungen

$$(7) \quad -du = -d(u+c) = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} = \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}}$$

bestehen, so kann die Gleichung (4) in folgende Gestalt gebracht werden

$$(8) \quad \frac{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3} + \sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}}{x - y} = \sqrt{4(x+y) + a}.$$

Andrerseits wird das Additionstheorem von Lagrange unter der allgemeineren Voraussetzung

$$(9) \quad \frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}} = \frac{dy}{\sqrt{A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4}}$$

folgendermassen dargestellt

$$(10) \quad \frac{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4} + \sqrt{A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4}}{x-y} = \sqrt{a + D(x+y) + E(x+y)^2},$$

wo wie früher unter a eine Integrationsconstante zu verstehen ist. Aus den Gleichungen (9) und (10) erhält man aber offenbar (7) und (8) durch die Annahme

$$A = -g_3, \quad B = -g_2, \quad C = E = 0, \quad D = 4.$$

Auf die Verwandtschaft zwischen dem Additionstheorem von Lagrange und demjenigen der Function $\wp u$ hat Herr Greenhill hingewiesen in der Abhandlung „Note on the Weierstrass elliptic functions and their applications“ (Proceedings of the London math. society, Bd. XVIII, p. 263).

§ 6.

Entwickelung der Function $\wp u$ in eine Potenzreihe.

Aus der Definitionsgleichung

$$u = \int_s^\infty \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}} = \int_0^{\frac{1}{s}} \frac{dv}{2\sqrt{v} \sqrt{1 - \frac{1}{4}g_2 v - \frac{1}{4}g_3 v^3}}$$

schliesst man durch elementare Betrachtungen, dass das Product $u\sqrt{s}$, je nach dem bei der Integration genommenen Zeichen des Radicals, sich einem der Grenzwerte ± 1 nähert, wenn man s unendlich gross werden, also u verschwinden lässt. Berücksichtigt man ausserdem, dass $\wp u$ eine gerade Function ist, so folgt, dass die Entwicklung derselben nach ganzen steigenden Potenzen von u , wenn eine solche überhaupt möglich ist, nur die folgende Form haben kann

$$(1) \quad \wp u = \frac{1}{u^2} + c_1 + c_2 u^2 + c_3 u^4 + c_4 u^6 + \dots$$

Diese Reihe werde nach der von Herrn Halphen (Traité des fonctions elliptiques p. 92) angegebenen Methode in die Differentialgleichung

$$\wp''' u = 12 \wp u \wp' u$$

eingesetzt, welche aus der bekannten

$$(2) \quad (\wp' u)^2 = 4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3$$

durch zweimalige Differentiation hervorgeht. Dann ergibt sich, indem man unter Benutzung der Sätze (I), (II), (III) die Coefficienten gleich hoher Potenzen von u vergleicht, für $\lambda > 3$ die Recursionsformel

$$(3) \quad (\lambda - 3)(2\lambda + 1)c_\lambda = 3(c_2 c_{\lambda-2} + c_3 c_{\lambda-3} + \dots + c_{\lambda-2} c_2),$$

und die Gleichung (2) ergibt die weiteren Resultate

$$(4) \quad c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{g_2}{20}, \quad c_3 = \frac{g_3}{28},$$

sodass eine convergente Potenzreihe (1), welche der Differentialgleichung (2) genügt, wenn sie überhaupt existirt, in eindeutiger Weise bestimmt ist. Andererseits ist klar, dass die Reihenentwicklung (1), welche mit den durch die Gleichungen (4) und (3) bestimmten Coefficienten c gebildet ist, wenn sie convergent ist, der Differentialgleichung (2) genügen muss.

Die Formel (3) lehrt nun, dass aus den Ungleichungen

$$|c_1| \leq 1, \quad |c_2| \leq 1, \quad \dots \quad |c_{\lambda-1}| \leq 1$$

die weitere $|c_\lambda| \leq 1$ folgt. Nimmt man also an, es sei

$$(5) \quad |g_2| < 20, \quad |g_3| < 28$$

so folgt aus den Gleichungen (4), dass sämtliche Coefficienten c_k dem absoluten Betrage nach nicht grösser als Eins sind; die Reihe

$$c_2 u^2 + c_3 u^4 + \dots$$

convergiert also sicher, sobald $|u| < 1$ ist. Unter der Annahme (5) giebt es somit einen convergenten Ausdruck

$$\varphi = \frac{1}{u^2} + c_2 u^2 + c_3 u^4 + c_4 u^6 + \dots,$$

welcher der Gleichung

$$\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2 = 4\varphi^3 - g_2\varphi - g_3$$

genügt. Differenzirt man diesen Ausdruck φ , so ergiebt der Satz (III) das Resultat

$$\frac{d\varphi}{du} + \frac{2}{u^3} = 2c_2 u + 4c_3 u^3 + 6c_4 u^5 + \dots;$$

da nun alle Coefficienten rechts dem absoluten Betrage nach nicht grösser sind als die entsprechenden der leicht summirbaren Reihe

$$2u + 4u^3 + 6u^5 + \dots,$$

so folgt, dass die linke Seite für alle hinreichend kleinen Werthe von u von Null so wenig, wie man will verschieden ist, und dass für kleine positive Werthe von u die Ableitung $\frac{d\varphi}{du}$ negativ ist. Es besteht also für positive Werthe von u , wenn man die Quadratwurzel positiv nimmt, die Gleichung

$$du = \frac{-d\varphi}{\sqrt{4\varphi^3 - g_2\varphi - g_3}}$$

also, da φ unendlich gross wird für $u = 0$,

$$u = \int_{\varphi}^{\infty} \frac{d\varphi}{\sqrt{4\varphi^3 - g_2\varphi - g_3}}.$$

Ebenso erhält man für negative Werthe von u , wenn die Quadratwurzel positiv genommen wird,

$$du = \frac{d\varphi}{\sqrt{4\varphi^3 - g_2\varphi - g_3}}, \quad u = - \int_{\varphi}^{\infty} \frac{d\varphi}{\sqrt{4\varphi^3 - g_2\varphi - g_3}}.$$

Somit folgt, dass für alle reellen Argumente u , deren absoluter Betrag eine gewisse positive Grenze nicht überschreitet, die Gleichung

$$\varphi = \wp u, \quad \wp u = \frac{1}{u^2} + c_2 u^2 + c_3 u^4 + \dots$$

besteht, die Function $\wp u$ also eine convergente Entwicklung nach ganzen steigenden Potenzen von u zulässt.

Dieses zunächst unter der Annahme (5) bewiesene Resultat kann mittelst der Formel (2) des § 5 auf den allgemeinen Fall beliebiger Invarianten ausgedehnt werden; denn man kann offenbar μ so gross annehmen, dass die Ungleichungen

$$|g_2\mu^{-4}| < 20, \quad |g_3\mu^{-6}| < 28$$

bestehen. Dann kann nach dem obigen entwickelt werden

$$\wp(u; g_2\mu^{-4}, g_3\mu^{-6}) = \frac{1}{u^2} + c_2 u^2 + c_3 u^4 + \dots$$

und die Reihe rechts ist convergent; also folgt

$$\wp(u; g_2, g_3) = \mu^2 \wp(\mu u, g_2\mu^{-4}, g_3\mu^{-6}) = \frac{1}{u^2} + c_2 \mu^4 u^2 + c_3 \mu^6 u^4 + \dots,$$

womit die Entwickelbarkeit der Function $\wp u$ im allgemeinsten Falle reeller Invarianten bewiesen ist.

§ 7.

Die beständige Convergenz der Potenzreihe σu .

Auf Grund der erhaltenen Resultate können jetzt für die von Hrn. Weierstrass eingeführte Function σu die analogen Entwicklungen durchgeführt werden wie in § 4 für die Jacobi'schen Functionen Θ, H .

Zu diesem Zweck geht man von der Reihe

$$\xi u = \frac{1}{u} - \frac{c_2}{3} u^3 - \frac{c_3}{5} u^5 - \frac{c_4}{7} u^7 - \dots = \frac{1}{u} + \varphi(u)$$

aus, welche ebenso wie die Reihe

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + c_2 u^2 + c_3 u^4 + \dots$$

convergiert, und, da Potenzreihen gliedweise differenzirt werden dürfen, der Gleichung

$$(1) \quad \wp u = -\xi' u$$

genügt. Dann kann man nach dem Satze (V) eine convergente Potenzreihe $\psi(u)$ bestimmen, für welche die Gleichung

$$(2) \quad \frac{\psi'(u)}{\psi(u)} = \frac{d \lg \psi(u)}{du} = \varphi(u)$$

besteht. Setzt man ferner

$$\chi(u) = \int_0^u \varphi(u) du,$$

so ist offenbar auch

$$\frac{d}{du} \lg e^{\chi(u)} = \varphi(u);$$

also können sich die Grössen $\psi(u)$ und $e^{\chi(u)}$ nur durch einen constanten Factor von einander unterscheiden, und dieser kann durch

passende Wahl des in $\psi(u)$ noch willkürlichen Factors $= 1$ gemacht werden; dann ist

$$e^{\chi(u)} = \psi(u).$$

Hieraus folgen mit Berücksichtigung der Gleichungen

$$\varphi(-u) = -\varphi(u), \quad \chi(u) = \chi(-u)$$

die weiteren

$$(3) \quad \psi(u) = \psi(-u), \quad \psi(0) = 1.$$

Setzt man also

$$\sigma u = u\psi(u),$$

so ist σu eine wie $\psi(u)$ convergente Potenzreihe, deren erstes Glied u ist, sodass die Gleichung

$$(4) \quad \sigma'0 = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sigma u}{u} = 1$$

besteht und die Gleichungen (2) und (3) ergeben

$$(5) \quad \sigma(-u) = -\sigma u$$

$$(6) \quad \frac{\sigma' u}{\sigma u} = \xi u, \quad \frac{d^2 \lg \sigma u}{du^2} = -\wp u.$$

Nun folgt aus dem in § 5 abgeleiteten Additionstheorem (6), wenn die Argumente $u, v, u+v, u-v$ dem Werthgebiet (U) angehören, das System der Gleichungen

$$(7) \quad \begin{aligned} \wp(u+v) + \wp u + \wp v &= \left(\frac{1}{2} \frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} \right)^2 \\ \wp(u-v) + \wp u + \wp v &= \left(\frac{1}{2} \frac{\wp' u + \wp' v}{\wp u - \wp v} \right)^2. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich durch Subtraction

$$\wp(u+v) - \wp(u-v) = \frac{-\wp' u \wp' v}{(\wp u - \wp v)^2}$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichung (1)

$$-\xi(u+v) + \xi(u-v) = -\frac{d}{dv} \frac{\wp' u}{\wp u - \wp v}.$$

Integrirt man nach v und bezeichnet durch a eine von v unabhängige Grösse, so folgt

$$-\xi(u+v) - \xi(u-v) + a = \frac{-\wp' u}{\wp u - \wp v}.$$

Setzt man speciell $v = 0$, so ergibt sich, da $\wp 0 = \infty$ ist,

$$a = 2\xi u,$$

$$\xi(u+v) + \xi(u-v) - 2\xi u = \frac{\wp' u}{\wp u - \wp v} = \frac{d}{du} \lg(\wp u - \wp v).$$

Integrirt man abermals, so erhält man auf Grund der Gleichung (6)

$$\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2 u} = b(\wp u - \wp v),$$

wo durch b eine Integrationsconstante, also eine nur von v abhängige

Grösse bezeichnet ist. Multiplicirt man diese Gleichung mit u^2 und berücksichtigt die Gleichungen (4) und

$$\lim_{u=0} u^2 \wp u = 1,$$

und lässt die Variable u verschwinden, so ergibt sich

$$b = \sigma(-v) \sigma v = -\sigma^2 v.$$

Damit ist unter der angegebenen Beschränkung der Argumente u und v die bekannte Weierstrass'sche Fundamentalformel bewiesen:

$$(8) \quad \frac{\sigma(u+v) \sigma(u-v)}{\sigma^2 u \sigma^2 v} = \wp v - \wp u = \frac{d^2 \lg \sigma u}{du^2} - \frac{d^2 \lg \sigma v}{dv^2}.$$

Die Ableitung dieser Formel aus den Gleichungen (7) hat Herr Greenhill auf p. 266 f. der in § 5 citirten Abhandlung angegeben.

Drückt man die rechte Seite der Gleichung (8) durch die Function σ selbst und ihre Ableitungen aus, multiplicirt beiderseits mit dem Product $\sigma^2 u \sigma^2 v$ und bezeichnet durch G, G_1, G_2 ganze rationale Functionen der beigegeführten Argumente mit numerischen Coefficienten, so erhält man eine Gleichung

$$\sigma(u+v) \sigma(u-v) = G(\sigma u, \sigma v, \sigma' u, \sigma' v, \sigma'' u, \sigma'' v)$$

also, wenn man nach u differenzirt,

$$\begin{aligned} & \sigma(u+v) \sigma'(u-v) + \sigma(u-v) \sigma'(u+v) \\ &= G_1(\sigma u, \sigma v, \sigma' u, \sigma' v, \sigma'' u, \sigma'' v, \sigma''' u, \sigma''' v). \end{aligned}$$

Setzt man hierin $u = v$, indem man annimmt, dass auch die Grösse $2u$ dem Gebiet (U) angehört, so folgt wegen der Gleichung (4)

$$\sigma 2u = G_2(\sigma u, \sigma' u, \sigma'' u, \sigma''' u)$$

oder, indem man u durch $\frac{u}{2}$ ersetzt

$$(9) \quad \sigma u = G_2\left(\sigma \frac{u}{2}, \sigma' \frac{u}{2}, \sigma'' \frac{u}{2}, \sigma''' \frac{u}{2}\right).$$

Diese Gleichung ist offenbar zunächst nur für diejenigen reellen Werthe von u bewiesen, deren absoluter Betrag eine gewisse positive Grenze nicht überschreitet. Setzt man also die Potenzreihenentwicklung von σu ein, so besteht die Gleichung (9) nach dem Satze (I) identisch, d. h. die Coefficienten gleich hoher Potenzen von u sind auf beiden Seiten dieselben. Wenn nun A eine positive Grösse ist, und die Reihe σu convergirt, sobald $|u| < A$ ist, so gilt nach dem Satze (IV) dasselbe von den Reihen $\sigma', \sigma'', \sigma'''$; die rechte Seite der Gleichung (9) convergirt also schon unter der Voraussetzung $|u| < 2A$. Damit ist dasselbe für die Reihe σu bewiesen, und durch Wiederholung dieses Schlusses folgt unmittelbar, dass die Reihe σu beständig convergent ist.

Der für σu erhaltene Ausdruck behält somit einen bestimmten

Sinn auch über das beschränkte Gebiet reeller Argumente hinaus, für welche die bisherigen Entwicklungen durchgeführt wurden. Man kann also durch diesen Ausdruck die Function σu , und dann durch die Gleichungen

$$(10) \quad \xi u = \frac{\sigma' u}{\sigma u}, \quad \wp u = -\frac{d}{du} \frac{\sigma' u}{\sigma u}$$

die Functionen ξ und $\wp$ für beliebige complexe Werthe von u definiren; diese allgemeine Definition führt dann bei kleinen reellen Werthen des Arguments auf die ursprünglich betrachteten Functionen zurück.

Für die letzteren Werthe besteht nun z. B. die Differentialgleichung

$$(\wp' u)^2 = 4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3,$$

die man als von Brüchen freie Gleichung zwischen den beständig convergenten Potenzreihen σu , $\sigma' u$, $\sigma'' u$, $\sigma''' u$ darstellen kann; dann lehrt der Satz (I) die Gültigkeit der Gleichung für beliebige Werthe von u . Es genügt also auch die verallgemeinerte Function $\wp u$ der obigen Differentialgleichung; da sie ferner zufolge der Definition (10) eine gerade Function und eindeutig bestimmt ist, so besitzt sie, ebenso wie die früher betrachtete specielle Function, diejenigen Eigenschaften, aus welchen nach § 5 das Additionstheorem abgeleitet werden kann. Somit gilt die Formel

$$\wp(u+v) + \wp u + \wp v = \left(\frac{1}{2} \frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} \right)^2$$

für beliebige complexe Werthe von u und v ; aus ihr aber ergeben sich alle übrigen Eigenschaften der Function $\wp u$ nach den einfachen Methoden, welche Herr Halphen in dem mehrfach citirten Werke angewandt hat.

Breslau, Januar 1888.