**7. Zur Interpretation der Maxwell'schen
Gleichungen des elektromagnetischen Feldes in
ruhenden isotropen Medien;
von J. Sauter.**

Aus den folgenden Betrachtungen soll hervorgehen, dass durch eine geeignete Combination und Modification einzelner bekannter Hypothesen ein relativ sehr einfaches und anschauliches dynamisches System aufgebaut werden kann, dessen leicht ableitbare Bewegungsgleichungen genau die Form der Maxwell'schen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes in ruhenden, isotropen, heterogenen Halbleitern aufweisen.

1. Im ganzen unendlichen Raum sei eine bewegte, mit Trägheit begabte Substanz continuirlich verbreitet, und diese Substanz befinde sich zeitweise in einem eigentümlichen Zwangszustand.

Es wird also jedes durch eine beliebige geschlossene Fläche S begrenztes Volumen v dieser Substanz vom übrigen umgebenden Teil derselben eine Kraftwirkung erleiden: auf jedes Oberflächenelement dS dieses Volumens wird eine Kraft $\mathfrak{P} dS$ angreifen. Bezeichnet O den Ort, an welchem das Element dS sich befindet, und n_a die Richtung der äusseren Normale desselben, so lässt sich die Vectorgrösse $\mathfrak{P}$ als Function von O und n_a betrachten. — Das über die ganze Fläche S genommene Integral $\int \mathfrak{P} dS$ möge aus Analogie mit der Hydrostatik als „Auftrieb“ bezeichnet werden.

Das Eigentümliche des betreffenden Zwanges bestehe nun darin, dass $\mathfrak{P}$ durch den Ausdruck $V \mathfrak{E} \mathfrak{N}_a$ darstellbar sei¹⁾, wo $\mathfrak{N}_a$ ein Vector von Richtung n_a und von Tensor 1 ist und wo der Vector $\mathfrak{E}$ mit O und mit der Zeit variiren mag, nicht aber mit n_a . $\mathfrak{P}$ sei daher senkrecht zu n_a und zu $\mathfrak{E}$ gerichtet

1) Das Vectorproduct $V \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2$ hat als Tensor $A_1 A_2 \sin(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2)$, wo A_1 und A_2 die Tensoren von $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ sind, und als Richtung diejenige des ausgestreckten linken Armes eines in der Richtung von $\mathfrak{N}_1$ schwimmenden und in der Richtung von $\mathfrak{N}_2$ blickenden Beobachters.

und verschwinde für ein zu $\mathfrak{E}$ senkrechtes Element; man könnte sagen, $\mathfrak{P}$ sei eine zu $\mathfrak{E}$ transversale Schubspannung.

Aus dieser Hypothese¹⁾ ergibt sich für den „Auftrieb“

$$\int \mathcal{V} \mathfrak{E} \mathfrak{N}_a \cdot dS = - \int \text{curl } \mathfrak{E} \cdot d\mathbf{v}^2)$$

mittels einer bekannten Beziehung zwischen Oberflächen- und Raumintegralen.³⁾

2. Addirt man daher (geometrisch) zur Grösse $-\text{curl } \mathfrak{E}$, welche man als „Auftrieb pro Volumeneinheit“ bezeichnen könnte, die (geometrische) Summe $\sum \mathfrak{F}$ der übrigen am Volumen Eins angreifenden Kräfte, und setzt man das Resultat gleich dem Producte aus Dichte und Beschleunigung am Orte O , so bekommt man die Hauptbewegungsgleichung der Substanz.

Wir wollen die Dichte mit $4\pi\mu$ und die Geschwindigkeit mit $(1/4\pi)\mathfrak{H}$ bezeichnen⁴⁾, sodass die Bewegungsgrösse pro Volumeneinheit oder, was dasselbe ist, das pro Zeiteinheit und Flächeneinheit durch eine zur Bewegungsrichtung normale Fläche strömende Quantum $\mathfrak{P}$ der Substanz gleich $\mu \mathfrak{H}$ zu setzen sein wird, und die Beschleunigung gleich

$$\left(\frac{1}{4\pi} \mathfrak{H} \nabla\right) \left(\frac{1}{4\pi} \mathfrak{H}\right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{4\pi} \mathfrak{H}\right).^5)$$

Die betreffende Gleichung wird nun, unter den bis jetzt getroffenen Annahmen,

$$-\text{curl } \mathfrak{E} + \sum \mathfrak{F} = \frac{\mu}{4\pi} (\mathfrak{H} \nabla) \mathfrak{H} + \mu \frac{d\mathfrak{H}}{dt}.$$

1) Vgl. Lord Kelvin, Math. and phys. Papers 3. p. 442. 1890.

2) Eine Definition des Vectors $\text{curl } \mathfrak{A}$, den man als „Transversalableitung des Vectors $\mathfrak{A}$ “ bezeichnen könnte, ist implicite in folgendem Satze enthalten: Das Product $f' \text{curl } \mathfrak{A}$, wo f' den Flächeninhalt der Projection einer unendlich kleinen ebenen geschlossenen Figur auf eine zu $\text{curl } \mathfrak{A}$ senkrechte Ebene bedeutet, hat als Tensor das Linienintegral $\int A \cos(\mathfrak{A}, ds) ds$ des Vectors $\mathfrak{A}$ über den ganzen Umfang der Figur, wenn letztere einem in der Richtung von $\text{curl } \mathfrak{A}$ blickenden Beobachter im Sinne des Uhrzeigers umkreist erscheint.

3) Vgl. A. Föppl, Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektrizität, p. 80. 1894.

4) Vgl. A. Sommerfeld, Wied. Ann. 46. p. 139. 1892.

5) Der Vector $(\mathfrak{H} \nabla) \mathfrak{H}$ ist gleich M mal die Ableitung des Vectors $\mathfrak{H}$ nach der Richtung von $\mathfrak{H}$.

Die Bewegung ist „continuirlich“, wenn die Beziehung

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = -4\pi \frac{d\mu}{dt} \quad 1)$$

stattfindet.

3. Betreffend den Bewegungszustand der Substanz sollen nun folgende Annahmen zutreffen:

a) die Dichte an jedem Orte O sei von der Zeit unabhängig;

b) bei plötzlicher Aufhebung des Zwanges zu irgend einer Zeit dauere die Bewegung ununterbrochen ohne Veränderung der räumlichen Verteilung der Geschwindigkeiten weiter;

c) am Anfange, d. h. zur Zeit $t = -\infty$, sei überall $\mathfrak{S} = 0$ gewesen.

Nach den Annahmen a) und b) wäre also das System ein Cykel mit den Spannungen $\mathfrak{B}$ als „Kräfte, welche die cyklischen Coordinaten zu vergrössern streben“. ²⁾

Annahme b) bedingt, dass für $\mathfrak{E} = 0$ das Glied $\mu(d\mathfrak{S}/dt)$ der Hauptgleichung von § 2 bei jedem Wert von t verschwinde, d. h. dass jederzeit das Glied $\sum \mathfrak{F}$ gleich dem Gliede $\mu/4\pi(\mathfrak{S} \nabla) \mathfrak{S}$ sei und infolge dessen auch jederzeit die Beziehung

$$(\alpha) \quad -\operatorname{curl} \mathfrak{E} = \mu \frac{d\mathfrak{S}}{dt}$$

bestehe. Bildet man die *div* der beiden Seiten der Gleichung (α) , so bekommt man nach Ersetzung von $\mu(d\mathfrak{S}/dt)$ durch $d\mathfrak{B}/dt$ gemäss Annahme a)

$$(\beta) \quad \operatorname{div} \left(\frac{d\mathfrak{B}}{dt} \right) = 0,$$

1) Eine Definition des Scalaren $\operatorname{div} \mathfrak{A}$, den man als „Longitudinalableitung des Vectors $\mathfrak{A}$ “ bezeichnen könnte, ist implicite in folgendem Satze enthalten: Das Product $v \operatorname{div} \mathfrak{A}$, wo v den körperlichen Inhalt eines unendlich kleinen Volumens bedeutet, ist gleich dem Flächenintegral $\int A \cos(\mathfrak{A}, n) df$ des Vectors $\mathfrak{A}$ über die ganze Oberfläche des Volumens; hierbei ist unter n die äussere Normale verstanden.

2) Vgl. L. Boltzmann, Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Elektrizität und des Lichtes, I. Teil (1891), dritte Vorlesung; wird bei einem der beschriebenen Beispiele die Einwirkung auf die Kurbel aufgehoben, so bleibt die betreffende Rotation gleichförmig.

da $\operatorname{div} \operatorname{curl}$ identisch verschwindet. Integriert man die Gleichung (β) nach der Zeit, so ergibt sich $\operatorname{div} \mathfrak{B} = \text{const.} = (\operatorname{div} \mathfrak{B})_{t=-\infty}$ und unter Berücksichtigung der Annahme c)

$$(\gamma) \quad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0.$$

Die Gleichungen (α) , (β) , (γ) lassen sich unter Einführung des Vectors

$$\mathfrak{A} = - \int_{-\infty}^t \mathfrak{E} dt$$

auf eine einzige,

$$\operatorname{curl} \mathfrak{A} = \mathfrak{B},$$

reducieren.

Gleichung (γ) ergibt sich auch, wenn in der Continuitätsbedingung (vgl. § 2) $d\mu/dt = 0$ gesetzt wird. Diese Bedingung ist daher erfüllt.

4. Der in § 1 definirte specielle Zwangszustand ist aber nur dann möglich, wenn die Kräfte, deren geometrische Summe $\sum \mathfrak{F}$ in § 2 eingeführt wurde, selbst in kleinen Volumenteilchen derart verteilt sind, dass ihre Zusammensetzung neben der „Resultirenden“ $\sum \mathfrak{F}$ noch ein Kräftepaar liefert vom Momente $-2\mathfrak{E}$ pro Volumeneinheit¹⁾, denn die Zusammensetzung der Kräfte $\mathfrak{B} dS$ ergibt, abgesehen von dem durch Ungleichförmigkeit in der räumlichen Verteilung von $\mathfrak{E}$ bedingten „Auftrieb“, selbst bei gleichförmig verteiltem $\mathfrak{E}$ ein Kräftepaar vom Momente $+2\mathfrak{E}v$, welches nun durch ein gleich grosses, aber entgegengesetztes aufgehoben werden muss, damit inneres Gleichgewicht bestehe.

Diese charakteristische Eigenschaft des Zwanges lässt sich am einfachsten einsehen, wenn man das Volumenteilchen als Kreiscylinder mit zu $\mathfrak{E}$ paralleler Axe und dazu senkrechten Basisflächen annimmt; auf letzteren wird $\mathfrak{B}$ verschwinden, auf der Mantelfläche dagegen überall gleichen Tensor wie $\mathfrak{E}$ und die Richtung der Tangente an den Parallelkreis, in dem Sinne der Drehung des Uhrzeigers für einen in der Richtung von $-\mathfrak{E}$ blickenden Beobachter aufweisen; zwei zur Axe symme-

1) Als Richtung des Momentvectors wird diejenige bezeichnet, in welcher ein Beobachter zu blicken hat, um den Drehsinn des Kräftepaares gleich dem Drehsinn des Uhrzeigers zu finden.

trische Mantelflächelemente dS werden ein Kräftepaar vom Momente $2\rho \mathfrak{E} dS$ liefern, wo ρ der Halbmesser des Cylinders ist; die Integration wird ergeben

$$2\rho \mathfrak{E} \cdot \frac{2\pi \rho h}{2},$$

wo h die Höhe desselben ist.

Im folgenden Paragraph sollen nun Hypothesen aufgestellt werden, nach welchen ein Teil des Momentes $-2\mathfrak{E}$ durch die Bewegung der Substanz verursacht wird, indem der relativen Drehung derselben gegenüber gewissen Partikelchen ein Widerstandsmoment $2\mathfrak{B}$ pro Volumeneinheit entgegenwirkt. Wir werden deshalb setzen

$$-\mathfrak{E} = \mathfrak{L} - \mathfrak{B},$$

wo $\mathfrak{L}$ dem übrigen, „motorischen“ Teile entspricht.

5. In allen Regionen des Raumes sei eine Unmenge kleiner Partikelchen verteilt, derart, dass auch in den kleinsten zu betrachtenden Raumteilen eine grosse Anzahl derselben sich befinde; die Dimensionen dieser Partikelchen seien klein im Verhältniss zu den gegenseitigen Abständen derselben. Jedes Partikelchen könne sich um irgend eine durch seinen Mittelpunkt gehende Axe drehen; keines könne aber eine fortschreitende Bewegung ausführen, d. h. die Mittelpunkte seien fest. Sich selbst überlassen würde jedes Partikelchen eine ganz bestimmte Orientation im Raume bez. eine gewisse Ruhelage einnehmen; für irgend eine andere Orientation bez. Lage wirke ein dem Ablenkungswinkel proportionales Kräftepaar entgegen; das Moment des letzteren möge „elastisches Moment“ bezeichnet werden.¹⁾ Es finde eine Reibungswirkung zwischen der umgebenden erwähnten Substanz und den Partikelchen statt, indem auf dieser wie auf jenen ein der relativen Drehgeschwindigkeit proportionales „Reibungsmoment“ wirke.

Greifen ausser den soeben erwähnten Kräften keine weiteren an einem Partikelchen an, so wird die Ablenkung desselben aus der Ruhelage einem Wirbel in der umgebenden Substanz zuzuschreiben sein; nimmt man nun noch an, dass jedes

1) Diese und die im darauf folgenden Satz ausgedrückten Hypothesen kann man als Modification einer Hypothese von A. Sommerfeld betrachten; vgl. Wied. Ann. 46. p. 140. 1892.

Partikelchen massenlos sei, so müssen jederzeit das darauf wirkende „elastische Moment“ und das auf die umgebende Substanz wirkende „Reibungsmoment“ nach Grösse und Richtung einander gleich sein.

6. Es bezeichne nun $\frac{1}{2} \mathfrak{D}$ die Ablenkung¹⁾ eines Partikelchens aus seiner Ruhelage, $\frac{1}{2} \mathfrak{C}$ die Wirbelgeschwindigkeit der umgebenden Substanz, $\frac{1}{2} \mathfrak{R}$ die relative Drehgeschwindigkeit der letzteren gegenüber dem Partikelchen, so wird sein

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{R} + \frac{d\mathfrak{D}}{dt},$$

wobei nach den Gesetzen der Hydrodynamik

$$\text{curl } \mathfrak{C} = 4\pi \mathfrak{C}.$$

Bezeichnet ferner N die Anzahl Partikelchen pro Volumeneinheit in der betreffenden Region, $-(8\pi/kN)\mathfrak{D}$ das auf ein Partikelchen angreifende „elastische Moment“ (wo k ein positiver Factor ist), $(2/CN)\mathfrak{R}$ das auf dieses Partikelchen angreifende „Reibungsmoment“ (wo C auch ein positiver Factor ist), $2\mathfrak{M}/N$ ein anderes auf das Partikelchen angreifendes Moment, so ergibt sich

$$\frac{4\pi}{k} \mathfrak{D} = \mathfrak{M} + \frac{1}{C} \mathfrak{R}$$

und für das Widerstandsmoment $2\mathfrak{B}$ auf die Volumeneinheit der Substanz

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{C} \mathfrak{R}.$$

Schreibt man $\mathfrak{C}_1$ anstatt $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_2$ anstatt $\mathfrak{C} + \mathfrak{M}$, so bekommen die Gleichungen des beschriebenen dynamischen Systems dieselbe Form wie die Maxwell'schen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes in ruhenden isotropen Medien mit einer von Boltzmann benutzten Verallgemeinerung²⁾:

1) Denkt man sich das Partikelchen aus seiner Ruhelage in die momentane Lage durch eine Drehung um eine durch den Mittelpunkt gehende Axe übergeführt, so ergibt sich als Richtung des Vectors $\mathfrak{D}$ diejenige Richtung der Axe, nach welcher ein Beobachter zu blicken hat, um die Drehung im Sinne der Uhrzeigerdrehung zu finden; der Tensor von $\mathfrak{D}$ wird der absolute Wert des Drehwinkels sein.

2) Vgl. L. Boltzmann, l. c. p. 84.

$$\begin{aligned}\text{curl } \mathfrak{A} &= \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}, & \text{curl } \mathfrak{H} &= 4\pi \mathfrak{C}, \\ \mathfrak{R} &= C(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_1), & 4\pi \mathfrak{D} &= k(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_2), \\ \mathfrak{C} &= \mathfrak{R} + \frac{d\mathfrak{D}}{dt}, & \mathfrak{E} &= -\frac{d\mathfrak{A}}{dt};\end{aligned}$$

hierbei bezeichnet $\mathfrak{A}$ das „elektromagnetische Moment“, $\mathfrak{B}$ die magnetische Induction, $\mathfrak{C}$ die totale elektrische Strömung, $\mathfrak{D}$ die dielektrische Verschiebung, $\mathfrak{E}$ die innere elektrische Kraft¹⁾, $\mathfrak{E}_1$ die „galvanische“ äussere elektrische Kraft, $\mathfrak{E}_2$ die „guericckische“ äussere elektrische Kraft, $\mathfrak{H}$ die magnetische Kraft, $\mathfrak{R}$ die galvanische Strömung, C die spezifische Leitungsfähigkeit, k die Dielektricitätsconstante, μ die magnetische Permeabilität.

Es mag bemerkt werden, dass in der Elektrostatik die Differenz $\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1$, daher also die oben mit $\mathfrak{M}$ bezeichnete Grösse eine wesentliche Rolle spielt; die Differentialgleichung der Dichte $\varepsilon = \text{div } \mathfrak{D}$ der „wahren Elektricität“ lautet z. B.

$$k \frac{d\varepsilon}{dt} + 4\pi C\varepsilon = k C \text{div } \mathfrak{M}$$

im homogenen Felde.²⁾

Interessant mag noch die Bemerkung sein, dass die Bedingung $\mathfrak{E}_2 = 0$, welche zu der von Hertz benutzten Form³⁾ der Maxwell'schen Gleichungen führt, der Annahme entspricht, die Drehkräfte $2\mathfrak{Q}$ und $2\mathfrak{M}$ seien als Action und Reaction

1) Vgl. L. Boltzmann, l. c. p. 110.

2) Vgl. L. Boltzmann, l. c. p. 104.

3) Die sechs Hertz'schen Gleichungen lauten (vgl. Wied. Ann. 40. p. 577. 1890):

$$\begin{aligned}A\bar{\mu} \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}, & A\bar{\varepsilon} \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} - 4\pi A\lambda(X - X'), \\ A\bar{\mu} \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, & A\bar{\varepsilon} \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} - 4\pi A\lambda(Y - Y'), \\ A\bar{\mu} \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}, & A\bar{\varepsilon} \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} - 4\pi A\lambda(Z - Z');\end{aligned}$$

X, Y, Z sind die Componenten von $\mathfrak{E}$; L, M, N diejenigen von $\mathfrak{H}$; X', Y', Z' diejenigen von $\mathfrak{M}$; ferner ist $A\bar{\mu} = \mu$, $A\bar{\varepsilon} = k$, $A\lambda = C$; das Coordinatensystem wäre ein „Hopfencoordinatensystem“, d. h. einem in der Richtung der y -Axe schwimmenden und nach der Richtung der x -Axe blickenden Beobachter erscheine die z -Axe nach links gerichtet; A ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im freien Aether.

zwischen den Partikelchen und der umgebenden Substanz auffassbar; es wäre dann $\mathfrak{L} = -\mathfrak{M}$.

Eine andere Vereinfachung ergiebt die Annahme $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_2$ bez. $\mathfrak{M} = 0$, nach welcher die Grössen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{D}$ proportional variiren.¹⁾

Wollte man das beschriebene dynamische System so compliciren, dass es auch die Farbenzerstreuung in Licht nicht absorbirender Medien wenigstens qualitativ wiedergebe, so wäre die Einführung von Trägheit für die Partikelchen angezeigt.

Bern, Juni 1901.

1) Diese Vereinfachung ist in dem citirten Werk von Föppl durchgeführt.

(Eingegangen 23. Juni 1901.)