SUI POLINOMII DI LEGENDRE.

Nota di G. Morera, in Genova.

Adunanza del 9 maggio 1897.

Reputo opportuno far conoscere al « Circolo Matematico » alcune considerazioni intorno ai polinomii di Legendre e Laplace, le quali, se non erro, contengono qualche perfezionamento dell'ordinaria teoria di queste funzioni sferiche elementari.

Essendo μ una variabile reale, compresa tra -1 e $+1$, e ρ una variabile comunque complessa, il cui modulo è minore di 1, si ha per definizione dei polinomi di Legendre e Laplace $P_n(\mu)$ la serie :

$$(1 - 2\mu\rho + \rho^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu)\rho^n.$$

Questa serie è, per noti teoremi generali, derivabile termine a termine tanto rispetto a μ quanto rispetto a ρ , sicchè da essa colle accennate derivazioni si deduce :

$$\rho(1 - 2\mu\rho + \rho^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} P'_n(\mu)\rho^n;$$

$$(\mu - \rho)(1 - 2\mu\rho + \rho^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(\mu)\rho^{n-1} (*).$$

(*) Si tenga presente che $P_0(\mu) = 1$.

Si moltiplichi la 1^a di queste relazioni per $\mu - \rho$ e si sottragga la 2^a moltiplicata per ρ , si ottiene :

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(\mu - \rho) P'_n - n P_n] \rho^n = 0$$

ossia :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu P'_n - P'_{n-1} - n P_n) \rho^n = 0;$$

dunque :

$$\mu P'_n - P'_{n-1} - n P_n = 0. \quad (I)$$

Derivando rispetto a μ si ha di qui :

$$\mu P''_n + P'_n - P''_{n-1} - n P'_n = 0;$$

ma l'equazione differenziale a cui soddisfa P_n ci dà :

$$(1 - \mu^2) P''_n = 2 \mu P'_n - n(n+1) P_n;$$

$$(1 - \mu^2) P''_{n-1} = 2 \mu P'_{n-1} - n(n-1) P_{n-1},$$

e però, eliminando dall'ultima equazione le derivate seconde, si ottiene :

$$P'_n [2 \mu^2 - (n-1)(1 - \mu^2)] - 2 \mu P'_{n-1} - n(n+1) \mu P_n + n(n-1) P_{n-1} = 0.$$

In questa equazione si sostituisca in luogo di $n P_n$ l'espressione somministrata dalla (I), si ha

$$P'_n [2 \mu^2 - (n-1)(1 - \mu^2) - (n+1) \mu^2] + P'_{n-1} [(n+1) \mu - 2 \mu] + n(n-1) P_{n-1} = 0$$

ossia :

$$P'_n = n P_{n-1} + \mu P'_{n-1}. \quad (II)$$

Si moltiplichi la precedente equazione per μ ed al posto di $\mu P'_n$ si introduca l'espressione somministrata dalla (I), si ottiene ovviamente :

$$n P_n = n \mu P_{n-1} - (1 - \mu^2) P'_{n-1}. \quad (\text{III})$$

Questa relazione, partendo da $P_0 = 1$, permette di ottenere successivamente tutti i polinomi $P_n(\mu)$: essa e la (II) sono molto comode per studiare le proprietà di questi polinomi.

Per es. nella (II) si scriva $n + 1$ invece di n e nell'equazione ottenuta in luogo di P'_n si ponga l'espressione data dalla (II); si trova così :

$$P'_{n+1} = (n + 1) P_n + n \mu P_{n-1} + \mu^2 P'_{n-1};$$

da questa relazione sottraendo la (III) si deduce la ben nota relazione :

$$P'_{n+1} - P'_{n-1} = (2n + 1) P_n.$$

Si cangi invece n in $n + 1$ nella (III) ed in luogo di P'_n si sostituisca l'espressione (II), si ha :

$$(n + 1) P_{n+1} = (n + 1) \mu P_n - n(1 - \mu^2) P_{n-1} - \mu(1 - \mu^2) P'_{n-1};$$

ma la (III) dà :

$$-(1 - \mu^2) P'_{n-1} = n P_n - n \mu P_{n-1},$$

quindi moltiplicando quest'ultima equazione per μ e sommandola colla precedente segue :

$$(n + 1) P_{n+1} = (2n + 1) \mu P_n - n P_{n-1},$$

relazione pure conosciuta.

Assunti tre assi ortogonali di riferimento, diciamo : x, y, z ;

x', y', z' le coordinate di 2 punti, ρ e ρ' le rispettive distanze dall'origine, e ψ l'angolo che i due raggi vettori ad essi condotti fanno fra loro.

Si ha :

$$\begin{aligned}(tx - x')^2 + (ty - y')^2 + (tz - z')^2 &= \rho^2 t^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \psi \\ &= (\rho t - \rho' e^{i\psi})(\rho t - \rho' e^{-i\psi}),\end{aligned}$$

e però l'espressione $[(tx - x')^2 + (ty - y')^2 + (tz - z')^2]^{-\frac{1}{2}}$ è sviluppabile in serie ordinata secondo le potenze crescenti di t per i valori di questa variabile il cui modulo è minore di $\frac{\rho'}{\rho}$. La serie anzidetta sarà convergente adunque anche per $t=1$ quando: $\rho < \rho'$. Si trova così :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(x \frac{\partial}{\partial x'} + y \frac{\partial}{\partial y'} + z \frac{\partial}{\partial z'} \right)^n \frac{1}{\rho'} \\ &= \frac{1}{\rho'} \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \frac{\rho}{\rho'} \cos \psi + \left(\frac{\rho}{\rho'} \right)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{\rho'^{n+1}} P_n(\cos \psi)\end{aligned}$$

e quindi :

$$P_n(\cos \psi) = \frac{(-1)^n \rho'^{n+1}}{n! \rho^n} \left(x \frac{\partial}{\partial x'} + y \frac{\partial}{\partial y'} + z \frac{\partial}{\partial z'} \right)^n \frac{1}{\rho'}.$$

Assunto un sistema di coordinate polari col polo nell'origine, avente per asse polare l'asse delle x e per primo piano meridiano quello delle y , dette ρ, ϑ, ω rispettivamente il raggio vettore, la distanza polare e la longitudine del punto (x, y, z) , si ha :

$$x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta \cos \omega, \quad z = \rho \sin \vartheta \sin \omega.$$

Analogamente, dette $\rho', \vartheta', \omega'$ le coordinate polari di (x', y', z') , risulta :

$$\cos \psi = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos (\omega - \omega').$$

Per $\varpi = 0$ si ha:

$$\psi = \varpi';$$

e però posto $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, essendo $\rho = 1$, si ha

$$P_n(\cos \varpi') = \frac{(-1)^n}{n!} \rho'^{n+1} \frac{\partial^n \frac{1}{\rho'}}{\partial x'^n}. \quad (x' = \rho' \cos \varpi')$$

Tolti gli accenti e scritto μ invece di $\cos \varpi$ la formula precedente diviene:

$$P_n(\mu) = \frac{(-1)^n}{n!} \rho^{n+1} \left(\frac{\partial^n \frac{1}{\rho}}{\partial x^n} \right)_{x=\rho\mu}.$$

Genova, aprile 1897.

G. MORERA.