VII. Zur analytisch-geometrischen Behandlung der Krystallographie.

Von

Th. Liebisch in Berlin.

(Fortsetzung v. d. Zeitschr. I, 432.)

9.

Zwillingskrystalle.

Zu den merkwürdigsten Erscheinungen, welche die Krystalle darbieten, gehören diejenigen stabilen Gleichgewichtszustände krystallisirter Materie, welche unter dem Namen der Zwillingskrystalle bekannt sind. Wenn man die Flächen des einen Individuums eines Zwillings auf das Coordinatensystem des anderen Individuums bezieht, so bewahrt das Grundgesetz, welches die einfachen Krystalle beherrscht — das Gesetz der rationalen Indices — seine Gültigkeit nur noch in gewissen Gruppen der Zwillingskrystalle. Zwar hat Fr. Naumann den Satz aufgestellt, dass »in allen Zwillingskrystallen orthoëdrischer Formen jede Fläche des einen Individuums, wenn sie auf das andere Individuum transponirt wird, einer krystallographischen Fläche dieses Individuums entspricht, indem sich ihre Parameter auch in dem Axensysteme dieses Individuums als rationale Multipla der Grundparameter herausstellen«^{*)}; allein der Herleitung dieses Satzes liegt die Hypothese von Chr. S. Weiss zu Grunde, derzufolge die Grundparameter (d. s. die Axeneinheiten) entweder durch rationale Zahlen oder durch Quadratwurzeln aus rationalen Zahlen darstellbar sind. Diese Hypothese befindet sich im Widerspruch mit den genauesten Winkelmessungen und mit den thermischen Eigenschaften der Krystalle. In Folge hiervon erleidet der Naumann'sche Satz Einschränkungen, welche in dem Nachstehenden aufgesucht werden sollen.

^{*)} Elemente der theoretischen Krystallographie. 1856. S. 67.

Da bei der überwiegenden Mehrzahl der in der Natur vorkommenden Zwillingsskrystalle die Zwillingsebene eine mögliche Krystallfläche ist, so ist die Forderung aufgestellt worden, dass die auf der Zwillingssaxe senkrecht stehende Fläche stets krystallographisch möglich sein müsse*). Die Untersuchungen über die Zwillingbildungen der Krystalle des asymmetrischen Krystallisationssystemes, darunter insbesondere die umfassenden Forschungen G. vom Rath's über die Zwillinge der Plagioklase**), haben in überzeugender Weise gelehrt, dass jene Forderung nicht festgehalten werden kann.

Nach Fr. Naumann ist »die Zwillingssaxe allgemein eine krystallographisch reelle Linie, also entweder eine der Axen der Krystallreihe, oder eine Kante, oder eine Flächennormale irgend einer ihrer Gestalten«***). Es liegt der Bezeichnung: »krystallographisch reelle Linie« die Ansicht zu Grunde, dass eine mögliche Kante zugleich als Normale auf eine mögliche Fläche, und umgekehrt die Normale einer möglichen Fläche zugleich als eine mögliche Kante aufgefasst werden könne. Dass dies jedoch nicht immer der Fall ist, auch nicht, wie Naumann meinte »zum wenigsten in allen orthobasischen Krystallsystemen« soll zunächst nachgewiesen werden.

Aus den Untersuchungen über die Zwillinge asymmetrischer Krystalle geht hervor, dass die Angabe der Drehungsaxe in die Fassung des allgemeinen Gesetzes der Zwillingbildung aufzunehmen ist. Demnach würde das Gesetz in Rede, auf alle beobachteten Fälle erweitert, so lauten:

»Zwei Individuen einer Krystallgattung bilden einen Zwilling, wenn sie derart verbunden sind, dass sie durch Drehung des einen Individuums um 180° um eine gewisse, hinsichtlich ihrer Lage zu möglichen Flächen und Kanten der Krystallgattung bestimmbare Linie in parallele Stellung gebracht werden können«.

Die nähere Bestimmung der Zwillingsebene und der Zwillingssaxe betreffend, so sind theoretisch vier Möglichkeiten, deren Vorkommen in der Natur durch die vorliegenden Beobachtungen†) bestätigt wird, vorhanden:

- 1) Zwillingsebene und Zwillingssaxe besitzen rationale Indices;
- 2) die Zwillingsebene besitzt rationale Indices, die Zwillingssaxe nicht;

*) Vgl. V. von Lang, Lehrbuch der Krystallographie. 1866. S. 116. A. Schrauf, Physikal. Min. Bd. I. 1866. S. 8.

**) Pogg. Ann. Bd. 138. S. 449. Bd. 144. S. 219. Bd. 147. S. 22. 274. Erg. Bd. VI. S. 378. — Monatsber. Berlin. Akad. 1876. 24. Febr.

***) Fr. Naumann; Lehrbuch der reinen und angewandten Krystallographie. 1830. Bd. II. 202. — Der Satz ist wiederholt in: A. Schrauf, Physikal. Min. Bd. I. 1866. S. 185. E. S. Dana, Text Book of Mineralogy. 1877. p. 89.

†) Vgl. A. Sadebeck, Angewandte Krystallographie. 1876.

- 3) die Zwillingssaxe besitzt rationale Indices, die Zwillingsebene nicht;
 4) weder die Zwillingsebene noch die Zwillingssaxe besitzt rationale Indices.

Es soll nun untersucht werden, wann der Fall 4, auf welchen sich der angeführte Naumann'sche Satz bezieht, eintritt.

Die Beziehung, welche zwischen den Indices einer Fläche $H \{h_1 h_2 h_3\}$ und denjenigen ihrer Normale $H [\eta_1 \eta_2 \eta_3]$ besteht, ergibt sich aus den Formeln (43) und (45) Bd. I. S. 145 d. Zeitschr., wenn hierin an Stelle der Coordinaten Indices eingeführt werden. Es ist dabei zu berücksichtigen, dass die Coordinaten einer Fläche und diejenigen ihrer Normale mit gleichen Proportionalitätsfactoren zu versehen sind. Aus (43) folgt:

$$(89) \quad \begin{aligned} \sqrt{A} \frac{\eta_1}{a_2 a_3} &= A_{11} \frac{h_1}{a_1} + A_{12} \frac{h_2}{a_2} + A_{13} \frac{h_3}{a_3} \\ \sqrt{A} \frac{\eta_2}{a_3 a_1} &= A_{21} \frac{h_1}{a_1} + A_{22} \frac{h_2}{a_2} + A_{23} \frac{h_3}{a_3} \\ \sqrt{A} \frac{\eta_3}{a_1 a_2} &= A_{31} \frac{h_1}{a_1} + A_{32} \frac{h_2}{a_2} + A_{33} \frac{h_3}{a_3} \end{aligned}$$

Aus (45) ergibt sich:

$$(90) \quad \begin{aligned} \sqrt{A} \frac{h_1}{a_1} &= c_{11} \frac{\eta_1}{a_2 a_3} + c_{12} \frac{\eta_2}{a_3 a_1} + c_{13} \frac{\eta_3}{a_1 a_2} \\ \sqrt{A} \frac{h_2}{a_2} &= c_{21} \frac{\eta_1}{a_2 a_3} + c_{22} \frac{\eta_2}{a_3 a_1} + c_{23} \frac{\eta_3}{a_1 a_2} \\ \sqrt{A} \frac{h_3}{a_3} &= c_{31} \frac{\eta_1}{a_2 a_3} + c_{32} \frac{\eta_2}{a_3 a_1} + c_{33} \frac{\eta_3}{a_1 a_2} \end{aligned}$$

Aus (89) und (90) gewinnt man folgende Relation zwischen den Indices einer Fläche und denen ihrer Normale:

$$\sum_{i,k=1}^3 A_{ik} \frac{h_i}{a_i} \frac{h_k}{a_k} = \sum_{i,k,\lambda,\mu=1}^3 A_{ik} \frac{c_{i\lambda} a_\lambda \eta_\lambda}{a_1 a_2 a_3 \sqrt{A}} \frac{c_{k\mu} a_\mu \eta_\mu}{a_1 a_2 a_3 \sqrt{A}}$$

oder, wenn man die quadratischen Formen

$$\begin{aligned} &\sum_{i,k=1}^3 A_{ik} \frac{h_i}{a_i} \frac{h_k}{a_k} \\ &\frac{1}{a_1^2 a_2^2 a_3^2} \sum_{i,k=1}^3 c_{ik} a_i a_k \eta_i \eta_k \end{aligned}$$

beziehungsweise mit $D(hh)$ und $K(\eta\eta)$ bezeichnet:

$$(91) \quad D(hh) = K(\eta\eta).$$

Wie die Gleichungen (89) und (90) erkennen lassen, verhalten sich im asymmetrischen System weder die Indices der Normale einer möglichen Krystallfläche noch die Indices der Normalebene einer möglichen Krystallkante wie rationale Zahlen. Demnach kann bei den Zwillingen dieses Systems der Fall 4 nicht eintreten.

Im monosymmetrischen Krystallisationssysteme ist:

$$(x_2 x_3) = 90^\circ, (x_3 x_1) = \beta, (x_1 x_2) = 90^\circ$$

$$c_{23} = c_{12} = 0, c_{31} = \cos \beta.$$

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cos \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \beta & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \cos^2 \beta.$$

$$\mathcal{A}_{11} = \mathcal{A}_{33} = 1, \quad \mathcal{A}_{22} = 1 - \cos^2 \beta$$

$$\mathcal{A}_{23} = \mathcal{A}_{12} = 0, \quad \mathcal{A}_{31} = -\cos \beta.$$

Demnach erhalten wir aus (89):

$$\begin{aligned} \sin \beta \frac{\eta_1}{a_2 a_3} &= \frac{h_1}{a_1} - \cos \beta \frac{h_3}{a_3} \\ (92) \quad \sin \beta \frac{\eta_2}{a_3 a_1} &= \sin^2 \beta \frac{h_2}{a_2} \\ \sin \beta \frac{\eta_3}{a_1 a_2} &= -\cos \beta \frac{h_1}{a_1} + \frac{h_3}{a_3} \end{aligned}$$

und aus (90):

$$\begin{aligned} \sin \beta \frac{h_1}{a_1} &= \frac{\eta_1}{a_2 a_3} + \cos \beta \frac{\eta_3}{a_1 a_2} \\ (93) \quad \sin \beta \frac{h_2}{a_2} &= \frac{\eta_2}{a_3 a_1} \\ \sin \beta \frac{h_3}{a_3} &= \cos \beta \frac{\eta_1}{a_2 a_3} + \frac{\eta_3}{a_1 a_2} \end{aligned}$$

Aus den Formeln (92) und (93) erhellt, dass im monosymmetrischen Systeme nur die Indices der Normale der Fläche $\{010\}$ und die Indices der Normalebene der Kante $[010]$ sich wie rationale Zahlen verhalten. Da $\{010\}$ als Symmetrieebene nicht Zwillingsebene sein kann, so kann der Fall 1 auch bei den Zwillingbildungen monosymmetrischer Krystalle nicht vorkommen.

Im rhombischen System ist:

$$(x_2 x_3) = (x_3 x_1) = (x_1 x_2) = 90^\circ$$

$$c_{23} = c_{31} = c_{12} = 0, \mathcal{A} = 1$$

$$\mathcal{A}_{11} = \mathcal{A}_{22} = \mathcal{A}_{33} = 1, \mathcal{A}_{23} = \mathcal{A}_{31} = \mathcal{A}_{12} = 0$$

Mit Rücksicht hierauf gehen die Relationen (89) und (90) über in:

$$\begin{aligned} \frac{\eta_1}{a_2 a_3} &= \frac{h_1}{a_1} \\ (94) \quad \frac{\eta_2}{a_3 a_1} &= \frac{h_2}{a_2} \\ \frac{\eta_3}{a_1 a_2} &= \frac{h_3}{a_3} \end{aligned}$$

Die Verhältnisse der Indices sind:

$$\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 = \frac{h_1}{a_1 a_1} : \frac{h_2}{a_2 a_2} : \frac{h_3}{a_3 a_3}$$

$$h_1 : h_2 : h_3 = a_1^2 \eta_1 : a_2^2 \eta_2 : a_3^2 \eta_3$$

Hieraus ergibt sich, dass nur die Indices der Normalen der Flächen $\{100\}$, $\{010\}$, $\{001\}$ und die Normalebenen der Kanten $[100]$, $[010]$, $[001]$ sich wie rationale Zahlen verhalten. Daher ist der Fall 4 auch bei den holoëdrischen Krystallen des rhombischen Systems nicht möglich. Er kann nur bei den Zwillingsbildungen hemiëdrischer und hemimorpher Krystalle eintreten.

Im tetragonalen Systeme ist:

$$a_1 = a_2 = a, \quad a_3 = 1$$

Demnach geht (94) über in:

$$(95) \quad \frac{\eta_1}{a} = \frac{h_1}{a}$$

$$\frac{\eta_2}{a} = \frac{h_2}{a}$$

$$\frac{\eta_3}{a a} = h_3$$

Die Verhältnisse der Indices sind:

$$\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 = h_1 : h_2 : a^2 h_3$$

$$h_1 : h_2 : h_3 = \eta_1 : \eta_2 : \frac{\eta_3}{a a}$$

Hieraus geht hervor, dass im tetragonalen System die Indices der Normalen der Flächen $\{h_1 h_2 0\}$ aus der Verticalzone, die Indices der Normale der Fläche $\{001\}$, die Indices der zu den horizontalen Kantenrichtungen $[\eta_1 \eta_2 0]$ normal stehenden Flächen und die Indices der Normalebene der Kante $[001]$ sich wie rationale Zahlen verhalten. Demgemäss gehören zu dem Falle 4 die Zwillingsbildungen holoëdrischer Krystalle, bei denen eine Fläche eines ditetragonalen Prismas Zwillingssebene ist, und ausserdem diejenigen Zwillingsbildungen hemiëdrischer*), tetartoëdrischer und hemimorpher Krystalle, bei denen eine Fläche eines ditetragonalen Prismas oder eine Symmetrieebene des Systems Zwillingssebene ist.

Legen wir der Betrachtung des hexagonalen Systems orthohexagonale Axen zu Grunde, so ist in (94):

$$a_1 = a, \quad a_2 = a\sqrt{3}, \quad a_3 = 1$$

zu setzen, so dass:

$$\frac{\eta_1}{a\sqrt{3}} = \frac{h_1}{a}$$

*) Vgl. P. Groth, Physikalische Krystallographie. 1876. § 407.

$$(96) \quad \frac{\eta_2}{a} = \frac{h_2}{a\sqrt{3}}$$

$$\frac{\eta_3}{aa\sqrt{3}} = h_3$$

Die Verhältnisse der Indices sind:

$$\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 = 3h_1 : h_2 : 3a^2h_3$$

$$h_1 : h_2 : h_3 = \eta_1 : 3\eta_2 : \frac{\eta_3}{aa}$$

Hieraus ist ersichtlich, dass für die Formen des hexagonalen Systems ein dem so eben für das tetragonale System abgeleiteten Satze analoger Satz besteht. Es verhalten sich auch im hexagonalen Systeme die Indices der Normalen der Flächen aus der Verticalzone, die Indices der Normale der Basis, die Indices der zu den horizontalen Kanten normal stehenden Flächen und die Indices der Normalebene der verticalen Kantenrichtung wie rationale Zahlen. Daher gehören zu dem Falle 4 die Zwillinge holoëdrischer Krystalle, bei denen eine Fläche eines dihexagonalen Prismas Zwillingsebene ist, ferner die Zwillinge hemiëdrischer*), tetartoëdrischer und hemimorpher Krystalle, bei denen eine Fläche eines dihexagonalen Prismas oder eine Symmetrieebene des Systems Zwillingsebene ist.

Im regulären System ist:

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1$$

Demnach folgt aus (94):

$$(97) \quad \eta_1 = h_1, \eta_2 = h_2, \eta_3 = h_3$$

Im regulären System, und nur in diesem, sind die Indices der Normale einer möglichen Krystallfläche stets gleich den Indices dieser Fläche, und umgekehrt die Indices der Normalebene einer möglichen Kante stets gleich den Indices dieser Kante. Die Zwillinge dieses Systems gehören daher sämtlich dem Falle 4 an.

Die analytisch-geometrische Darstellung der Theorie der Zwillingkrystalle ist von Naumann, Sénarmont, Sella und Schrauf bearbeitet worden.

Fr. Naumann hat diese Theorie »auf die symmetrische Copulation zweier identischer Axensysteme gegründet und als ein allgemeines Problem der analytischen Geometrie behandelt«**). Es sei gestattet seine Resultate anzuführen und eine Vergleichung seiner Bezeichnungsweise mit der hier angewendeten beizufügen.

*) Vgl. P. Groth, a. a. O. § 406,

**) Elemente der theoretischen Krystallographie. 1856. S. 62. 135. 179. 256. 298. 344. 377.

Naumann.

4) Die von den Axen x, y, z eingeschlossenen Winkel:

$$(yz) = \alpha, (zx) = \beta, (xy) = \gamma.$$

2) Quadrat des Sinus der Ecke (xyz) :

$$E = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

3) Die von den Axenebenen eingeschlossenen, beziehungsweise an den Axen x, y, z liegenden Winkel:

$A, B, C.$

$$4) \quad \sin^2 \alpha, \sin^2 \beta, \sin^2 \gamma$$

$$A' = \cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma = \cos A \sin \beta \sin \gamma$$

$$B' = \cos \beta - \cos \gamma \cos \alpha = \cos B \sin \gamma \sin \alpha$$

$$C' = \cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta = \cos C \sin \alpha \sin \beta$$

5) Parameter (Axenabschnitte) der Fläche F :

$$a : b : c$$

Sind die Grundparameter (Axenlängen):

$$a : b : c$$

so ist:

$$a : b : c = ma : nb : rc.$$

Die Ableitungszahlen

$$m : n : r$$

sind umgekehrt proportional den Indices.

6) Die Parameter (axoparallelen Abstände von den Axenebenen, Coordinaten) eines Punktes einer durch den Mittelpunkt des Axensystems gehenden Geraden:

$$\mu : \nu : \varrho$$

7) Verhältnisse der Parameter $p : q : s$ der Centronormale einer Fläche $F (a : b : c)$:

$$p : q : s =$$

$$bc \sin^2 \alpha - ab B' - ca C' :$$

$$ca \sin^2 \beta - bc C' - ab A' :$$

$$ab \sin^2 \gamma - ca A' - bc B'$$

$$(x_2 x_3), (x_3 x_1), (x_1 x_2) \\ \cos (x_i x_k) = c_{ik}$$

$$A = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

$$(x_1), (x_2), (x_3)$$

$$A_{11}, A_{22}, A_{33}$$

$$A_{23}$$

$$A_{31}$$

$$A_{12}$$

$$\frac{1}{u_1} : \frac{1}{u_2} : \frac{1}{u_3} = \frac{a_1}{h_1} : \frac{a_2}{h_2} : \frac{a_3}{h_3}$$

$$a_1 : a_2 : a_3$$

$$\frac{1}{h_1} : \frac{1}{h_2} : \frac{1}{h_3}$$

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 =$$

$$\frac{\eta_1}{a_2 a_3} : \frac{\eta_2}{a_3 a_1} : \frac{\eta_3}{a_1 a_2}$$

Formel (43)
Bd. I. S. 145.

Naumann.

8) Parameter einer Fläche $F (a : b : c)$ ausgedrückt durch die Parameter $p : q : s$ ihrer Centronormale:

$$bcE = p + q \cos \gamma + s \cos \beta$$

$$caE = q + s \cos \alpha + p \cos \gamma$$

$$abE = s + p \cos \beta + q \cos \alpha$$

Formel (45)

Bd. I. S. 145.

Naumann berechnete zunächst die Transformationsgleichungen mit Hülfe deren die Axen des zweiten Individuums auf das Axensystem des ersten Individuums bezogen werden (a. a. O. S. 69 f., S. 377 f.), wenn die Parameter der Zwillingsebene $(a : b : c)$ und damit auch diejenigen der Zwillingsaxe $(p : q : s)$ gegeben sind. Die Parameter der Axen x', y', z' des zweiten Individuums sind in dem Schema enthalten:

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \\ x' : \mu & q & s \\ y' : p & \nu & s \\ z' : p & q & \varrho \end{array}$$

worin:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{p^2 - q^2 - s^2 - 2qs \cos \alpha}{2bcE} \\ \nu &= \frac{q^2 - s^2 - p^2 - 2sp \cos \beta}{2caE} \\ \varrho &= \frac{s^2 - p^2 - q^2 - 2pq \cos \gamma}{2abE} \end{aligned} \quad (24)$$

Die Transformationsgleichungen, durch welche die Parameter einer beliebigen Fläche $F' (a' : b' : c')$ des zweiten Individuums auf das Axensystem des ersten Individuums bezogen werden, hat Naumann nur für orthoëdrische Axensysteme abgeleitet. Die transformirten Parameter $a_1 : b_1 : c_1$ der Fläche F' sind (S. 67 f.):

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a'b'c'S}{2abc(bb' + cc')b' - Ab'c'} \\ b_1 &= \frac{a'b'c'S}{2abc(cc' + aa')b' - Bc'a'} \\ c_1 &= \frac{a'b'c'S}{2abc(aa' + bb')c' - Ca'b'} \end{aligned} \quad (25)$$

worin:

$$S = a^2b^2 + c^2a^2 + b^2c^2$$

$$A = -a^2b^2 - c^2a^2 + b^2c^2$$

$$B = -a^2b^2 + c^2a^2 - b^2c^2$$

$$C = a^2b^2 - c^2a^2 - b^2c^2$$

Naumann gelangte zu diesem Resultat, indem er die Coordinaten der Durchschnittspunkte einer Fläche F' des zweiten Individuums mit den Axen

dieses Individuums bezogen auf das Axensystem des ersten Individuums berechnete und hierauf die Parameter der Fläche, welche durch die erwähnten drei Punkte geht, aufsuchte. Die so gewonnenen Grössen sind die Parameter der auf das erste Axensystem transportirten Fläche F' . Diesen indirecten Weg musste Naumann einschlagen, weil er die allgemeine Transformation der Coordinaten nicht durchgeführt hatte.

Eine vollständigere Behandlung der Aufgabe, welche sich Naumann gestellt hatte, verdanken wir Q. u. Sella*). Derselbe bezeichnet die Axeneinheiten mit a, b, c und setzt:

$$a \cos(ab) = a', \quad b \cos(bc) = b', \quad c \cos(ca) = c'.$$

Die Fläche, deren Axenabschnitte sich wie die Längen $OM : ON : OP$ verhalten, hat das Symbol mnp :

$$m : n : p = \frac{a}{OM} : \frac{b}{ON} : \frac{c}{OP}.$$

Die Kante, welche Diagonale eines Parallelepipeds mit den Kantenverhältnissen $OH : HK : KL$ ist, hat das Symbol $[hkl]$:

$$h : k : l = \frac{OH}{a} : \frac{HK}{b} : \frac{KL}{c}.$$

Die Indices der Ebene $m'n'p'$, welche senkrecht zur Kante $[mnp]$ steht, verhalten sich wie:

$$(\textcircled{C}) \quad m' : n' : p' = ma^2 + na'b + pc'a : nb^2 + pb'c + ma'b : pc^2 + mc'a : nb'c.$$

Die Indices der Geraden $[mnp]$, welche normal zur Fläche $m'n'p'$ steht, verhalten sich wie:

$$(\textcircled{D}) \quad m : n : p = \begin{vmatrix} m' & a'b & c'a \\ n' & bb & b'c \\ p' & b'c & cc \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} aa & m' & c'a \\ a'b & n' & b'c \\ c'a & p' & cc \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} aa & a'b & m' \\ a'b & bb & n' \\ c'a & b'c & p' \end{vmatrix}$$

Bei Sella bedeutet $m'n'p'$ die Zwillingsebene, $[mnp]$ die Zwillingssaxe. Die Bezeichnungen von Naumann und Sella können in folgender Weise gegenüber gestellt werden:

Naumann.	Sella.
1) Axeneinheiten: $a : b : c$	$a : b : c$
2) Parameter der Zwillingfläche $a : b : c$	$\frac{a}{m'} : \frac{b}{n'} : \frac{c}{p'}$
3) Parameter der Zwillingssaxe: $p : q : s.$	$am : bn : cp.$

*) Sul boro adamantino. Mem. della R. Accademia delle sc. di Torino. Serie II. tom XVII. Nota (B). 1857.

Sella leitete Nota (B) p. 42 die Verhältnisse der Indices ab, welche den Axen des zweiten Individuums in Bezug auf das Axensystem des ersten Individuums zukommen:

$$\begin{aligned}
 & \frac{m^2 a^2 - n^2 b^2 - p^2 c^2 - 2 n p b' c}{2 (m a^2 + n a' b + p c' a)} : n : p \\
 (\mathfrak{E}) \quad m : & \frac{n^2 b^2 - p^2 c^2 - m^2 a^2 - 2 p m c' a}{2 (n b^2 + p b' c + m a' b)} : p \\
 m : n : & \frac{p^2 c^2 - m^2 a^2 - n^2 b^2 - 2 m n a' b}{2 (p c^2 + m c' a + n b' c)}.
 \end{aligned}$$

In dieses mit (A) übereinstimmende Resultat führte Sella die Indices der Zwillingssebene $m'n'p'$ ein, indem er die Indices m' , n' , p' einzeln gleich den in (E) angegebenen Werthen setzte. Nun sind diese Werthe jenen Indices nur bis auf einen Proportionalitätsfactor gleich. Daher sind von hier ab die Formeln Sella's nicht mehr richtig. Um die von Sella gestellte Aufgabe zu lösen muss man für die Grössen, welche in (E) rechts stehen, ihre wirklichen Werthe, die aus Formel (90) zu entnehmen sind, eintragen.

Bei der Berechnung der Verhältnisse der Indices einer Fläche des einen Individuums bezogen auf das Axensystem des anderen Individuums benutzte Sella die eleganten Formeln, welche er für die allgemeine Transformation der Coordinaten *) erhalten hatte. Das Resultat (Nota (B) p. 43) ist ebenfalls mit dem angedeuteten Fehler behaftet.

A. Schrauf**) unterwarf die analytisch-geometrische Theorie der Zwillingskrystalle einer Bearbeitung nach der Methode, welche von H. de Sénarmont***) angegeben, aber nur auf das reguläre System ausgedehnt worden ist.

Sénarmont bezeichnet die Axen der beiden Individuen mit X , Y , Z und $X'Y'Z'$, den Pol der Zwillingssebene mit P , die Pole entsprechender Flächen mit Q und Q' . Dann ist:

$$\begin{aligned}
 \cos XPQ &= \frac{\cos QX - \cos PX \cos PQ}{\sin XP \sin PQ} = \\
 -\cos XPQ' &= -\frac{\cos Q'X - \cos PX \cos PQ'}{\sin XP \sin PQ'}
 \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$(\mathfrak{F}) \quad \cos Q'X = 2 \cos PX \cos PQ - \cos QX.$$

*) l. c. Nota (A). Sul congiamento di assi in un sistema cristallino.

**) Sitzungsber. Wien. Akad. Bd. L. I. Abth. Math. naturw. Cl. 1864. — Physikal. Min. Bd. I. 1866. S. 185.

***) Sur quelques groupements de cristaux du système régulier. Annales des mines. 4^e série, tome XIII. p. 225. 1848.

In analoger Weise erhält man:

$$\cos Q'Y = 2 \cos PY \cos PQ - \cos QY$$

$$\cos Q'Z = 2 \cos PZ \cos PQ - \cos QZ.$$

Inbesondere ergibt sich hieraus:

$$\cos X'Y = 2 \cos PY \cos PX - \cos XY$$

$$\cos X'Z = 2 \cos PZ \cos PX - \cos XZ$$

$$(\textcircled{3}) \quad \cos Y'Z = 2 \cos PZ \cos PY - \cos YZ$$

$$\cos X'X = 2 \cos^2 PX - 1$$

$$\cos Y'Y = 2 \cos^2 PY - 1$$

$$\cos Z'Z = 2 \cos^2 PZ - 1.$$

Man erhält aus (8) die Lösungen der Transformationsaufgabe, mit der sich Naumann und Sella beschäftigt haben, wenn man die Werthe der Cosinus aus (35) entnimmt.

Die Symbole der in Betracht kommenden Flächen seien:

$$P\{z_1 z_2 z_3\}, \quad Q\{h_1 h_2 h_3\}, \quad Q'\{h'_1 h'_2 h'_3\}.$$

Dann ist:

$$\cos PQ = \frac{D(zh)}{\sqrt{D(zz)D(hh)}}$$

$$\cos PX = \frac{\sqrt{A} \cdot \frac{z_1}{a_1}}{\sqrt{D(zz)}}$$

$$\cos QX = \frac{\sqrt{A} \cdot \frac{h_1}{a_1}}{\sqrt{D(hh)}}.$$

Demnach erhält man aus (8):

$$\frac{D(zz)\sqrt{D(hh)}}{\sqrt{A}} \cos Q'X = 2D(zh) \frac{z'}{a_r} - D(zz) \frac{h'}{a_r}$$

oder:

$$(\textcircled{5}) \quad \varrho h'_1 = 2D(zh) \frac{z_1}{a_1} - D(zz) \frac{h_1}{a_1}$$

worin ϱ einen Proportionalitätsfactor bedeutet. Analoge Ausdrücke ergeben sich für $\varrho h'_2$ und $\varrho h'_3$.

A. Schrauf hat die von S é n a r m o n t angedeuteten Operationen in umgekehrter Reihenfolge ausgeführt. Er berechnet zuerst die Cosinus der von den Coordinatenaxen X, Y, Z und X', Y', Z' eingeschlossenen Winkel (Formel 403) S. 489), hierauf die Indices $x_1 x_2 x_3, y_1 y_2 y_3, z_1 z_2 z_3$ der zu den Axen X', Y', Z' des zweiten Individuums normal stehenden Flächen bezogen auf das Axensystem X, Y, Z des ersten Individuums (Formel (440) S. 494), dann die Cosinus der Winkel, welche eine beliebige Fläche $M\{uvw\}$ des ersten Individuums mit den Flächen $\{x_1 x_2 x_3\}, \{y_1 y_2 y_3\}, \{z_1 z_2 z_3\}$ einschliesst (Formel (444) S. 492). Hieraus folgen schliesslich die

Indices $u'v'w'$ der Fläche M bezogen auf das Axensystem X', Y', Z' des zweiten Individuums (Formel (143) S. 193).

Zur Vergleichung sei bemerkt, dass:

$$A_1 = \mathcal{A}, M_1 = a_1^2 a_2^2 a_3^2 D(\mathbf{z}\mathbf{z}).$$

Das Ergebniss (143), welches mit der vorstehenden Formel (§) übereinstimmen müsste, ist nicht richtig. Es soll $\cos MX'$ in dem schiefwinkligen Axensysteme X, Y, Z dargestellt werden durch die Winkel, welche M und X' mit den Axen X, Y, Z einschliessen. Dazu dient die Formel (17) S. 110. Es ist aus den angeführten Publicationen nicht ersichtlich, weshalb Schrauf an Stelle dieser Formel die folgende unrichtige Formel gewählt hat. Da nämlich:

$$\begin{aligned} u &= a \cos MX, & v &= b \cos MY, & w &= c \cos MZ \\ u' &= a \cos MX', & v' &= b \cos MY', & w' &= c \cos MZ' \end{aligned}$$

so lautet (143):

$$a \cos MX' = \frac{a \cos MX \cos X'X + b \cos MY \cos X'Y + c \cos MZ \cos X'Z}{\sqrt{[\cos^2 X'X + \cos^2 XY + \cos^2 X'Z]}}$$

So sind in der vorliegenden Literatur die Aufgaben, welche sich die analytisch-geometrische Theorie der Zwillingskrystalle zu stellen hat, nicht vollständig oder nicht einwurfsfrei behandelt worden. Es möchte daher nicht überflüssig erscheinen, wenn im Folgenden nochmals eine analytische Darstellung dieser Theorie versucht wird.

Vorausgesetzt wird, dass die Elemente der Krystallgattung — die Winkel $(x_2 x_3), (x_3 x_1), (x_1 x_2)$ und die Verhältnisse $a_1 : a_2 : a_3$ — und die Indices der Zwillingsfläche $Z\{z_1 z_2 z_3\}$ gegeben seien. Die Beziehungen zwischen den Indices z_1, z_2, z_3 und den Indices der Zwillingsaxe $Z[\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3]$ sind:

$$(98) \quad \sqrt{\mathcal{A}} \frac{\zeta_k a_k}{a_1 a_2 a_3} = \sum_{i=1}^3 \mathcal{A}_{ik} \frac{z_i}{a_i}$$

$$(99) \quad \sqrt{\mathcal{A}} a_1 a_2 a_3 \frac{z_k}{a_k} = \sum_{i=1}^3 c_{ik} a_i \zeta_i$$

Ferner ist nach (94):

$$(100) \quad D(\mathbf{z}\mathbf{z}) = K(\zeta\zeta)$$

I. Wenn die Indices einer Fläche $H\{h_1 h_2 h_3\}$ des ersten Individuums bekannt sind, so sollen die Indices der jener Fläche H correspondirenden Fläche $H'\{h'_1 h'_2 h'_3\}$ des zweiten Individuums bezogen auf das Coordinatensystem des ersten Individuums berechnet werden.

Da die Zwillingsfläche Z den von den Flächen H und H' eingeschlossenen Winkel (HH') halbirt, so stehen die Coordinaten der drei Flächen Z, H, H' , welche wir beziehungsweise mit $p_1 p_2 p_3, u_1 u_2 u_3, u'_1 u'_2 u'_3$

bezeichnen nach S. 149 Bd. I. d. Zeitschr. in folgender Beziehung zu einander:

$$qp_i = u_i + u'_i$$

oder:

$$-u'_i = u_i - qp_i$$

worin:

$$q = \frac{\sin (H' H)}{\sin (H' Z)}$$

Die Winkel $(H' H)$ und $(H' Z)$ können durch den Winkel $(H Z)$, der unter den angegebenen Voraussetzungen als bekannt anzusehen ist, ausgedrückt werden. Es ist:

$$\begin{aligned} (H' Z) &= (Z H) \\ (H' H) &= (H' Z) + (Z H) = 2(Z H) \end{aligned}$$

Demnach erhalten wir:

$$q = \frac{\sin 2(Z H)}{\sin (Z H)} = 2 \cos (Z H)$$

oder nach (35) mit Rücksicht auf die oben S. 76 eingeführten Bezeichnungen:

$$q = \frac{2 D(z h)}{\sqrt{D(z z) D(h h)}}$$

so dass:

$$u'_i = \frac{2 D(z h)}{\sqrt{D(z z) D(h h)}} p_i - u_i$$

Führen wir an die Stelle der Coordinaten p_i, u_i, u'_i die Indices z_i, h_i, h'_i ein, so ist zu setzen:

$$p_i = q \frac{z_i}{a_i}, \quad u_i = q' \frac{h_i}{a_i}, \quad u'_i = q'' \frac{h'_i}{a_i}$$

und die Werthe der Proportionalitätsfactoren sind aus (34) zu entnehmen:

$$q = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{D(z z)}}, \quad q' = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{D(h h)}}$$

So ergeben sich die gesuchten Transformationsgleichungen:

$$\begin{aligned} \sigma h'_1 &= 2 D(z h) z_1 - D(z z) h_1 \\ (104) \quad \sigma h'_2 &= 2 D(z h) z_2 - D(z z) h_2 \\ \sigma h'_3 &= 2 D(z h) z_3 - D(z z) h_3 \end{aligned}$$

worin σ einen Proportionalitätsfactor bedeutet.

Zwischen einander entsprechenden Flächen H und H' besteht eine umkehrbare Beziehung, d. h. sucht man zu H die correspondirende Fläche, so findet man H' aus (104), und sucht man zu H' die correspondirende Fläche, so kommt man durch nochmalige Anwendung von (104) wieder auf H zurück. In der That, setzt man in:

$$\sigma h_i = 2 D(z h') z_i - D(z z) h'_i$$

für die Indices h'_i ihre Werthe nach (104) ein, so erhält man:

$$\sigma h_i = 2 z_i \{ 2 D(z z) D(z h) - D(z z) D(z h) \} - D(z z) \{ 2 D(z h) z_i - D(z z) h_i \}$$

oder :

$$(102) \quad \sigma h_i = D^2(zz) h_i$$

d. h. man erhält wieder h_i , wenn man von dem constanten Factor $D^2(zz)$, der aus den Verhältnissen $h_1 : h_2 : h_3$ herausfällt, absieht.

Aus den Gleichungen (101) ergibt sich, dass diejenigen Flächen, welche der Zone der Zwillingssaxe angehören, beiden Individuen des Zwillings gemein sind. Denn die Indices einer so beschaffenen Fläche $\{x_1 x_2 x_3\}$ erfüllen die Bedingungs Gleichung :

$$x_1 \zeta_1 + x_2 \zeta_2 + x_3 \zeta_3 = 0$$

welche nach (98) übergeht in :

$$\sum_{ik=1}^3 A_{ik} \frac{z_i}{a_i} \frac{x_k}{a_k} = D(xz) = 0.$$

Mit Rücksicht hierauf folgt aus (101) :

$$(103) \quad \sigma x'_i = -D(zx) x_i$$

d. h. die Indices derjenigen Fläche, welche der Fläche $\{x_1 x_2 x_3\}$ entspricht, sind den Indices x_1, x_2, x_3 proportional, oder m. a. W. die beiden Flächen fallen in eine zusammen.

II. Wenn die Indices einer Kante $H[\eta_1 \eta_2 \eta_3]$ des ersten Individuums bekannt sind, so sollen die Indices der jener Kante entsprechenden Kante $H'[\eta'_1 \eta'_2 \eta'_3]$ des zweiten Individuums bezogen auf das Coordinatensystem des ersten Individuums berechnet werden.

Die Zwillingssaxe Z halbirte den Winkel (HH') . Wir können also die Lösung der vorliegenden Aufgabe mit Hülfe der Zwillingssaxe in analoger Weise durchführen wie die Lösung der vorhergehenden Aufgabe unter Benutzung der Zwillingsebene. Wir erhalten :

$$(104) \quad \begin{aligned} \tau \eta'_1 &= 2K(\zeta\eta) \zeta_1 - K(\zeta\zeta) \eta_1 \\ \tau \eta'_2 &= 2K(\zeta\eta) \zeta_2 - K(\zeta\zeta) \eta_2 \\ \tau \eta'_3 &= 2K(\zeta\eta) \zeta_3 - K(\zeta\zeta) \eta_3 \end{aligned}$$

worin τ einen Proportionalitätsfactor bedeutet.

Auch zwischen einander entsprechenden Kanten H und H' besteht eine umkehrbare Beziehung, wie daraus erhellt, dass :

$$\tau \eta_i = 2K(\zeta\eta') \zeta_i - K(\zeta\zeta) \eta'_i$$

mit Hülfe von (104) in :

$$(105) \quad \tau \eta_i = K^2(\zeta\zeta) \eta_i$$

übergeführt wird.

Die der Zwillingsebene parallel laufenden Kanten des einen Individuums haben zu entsprechenden Kanten des anderen Individuums solche, welche den ersteren Kanten parallel gehen. Denn eine mit der Fläche Z parallele Kante $[\xi_1 \xi_2 \xi_3]$ befriedigt die Gleichung :

$$z_1 \xi_1 + z_2 \xi_2 + z_3 \xi_3 = 0$$

oder nach (99) :

$$\sum_{ik=1}^3 c_{ik} a_i a_k \zeta_i \xi_k = 0$$

so dass:

$$K(\zeta\zeta) = 0$$

Daher ergibt sich aus (104):

$$(106) \quad \tau \xi'_i = -K(\zeta\zeta) \xi_i$$

d. h. die Indices derjenigen Kante, welche der Kante $[\xi_1 \xi_2 \xi_3]$ entspricht, sind den Indices ξ_1, ξ_2, ξ_3 proportional.

III. Es soll der Winkel berechnet werden, den eine Fläche $H\{h_1 h_2 h_3\}$ des einen Individuums mit einer Fläche $L\{l_1 l_2 l_3\}$ des anderen Individuums eines Zwillings einschliesst.

Die Indices der Fläche L bezogen auf das Axensystem des ersten Individuums seien l'_1, l'_2, l'_3 , dann ist nach (35):

$$\cos(HL') = \frac{D(hl')}{\sqrt{D(hh)D(l'l')}} \quad (107)$$

oder, wenn man für die Indices l'_1, l'_2, l'_3 ihre Werthe nach (104) einträgt:

$$(107) \quad \cos(HL') = \frac{2D(zh)D(zl) - D(zz)D(hl)}{D(zz)\sqrt{D(hh)D(ll)}}$$

Insbesondere ergibt sich hieraus der Cosinus des Winkels, welchen die einander entsprechenden Flächen H und H' einschliessen:

$$(108) \quad \cos(HH') = \frac{2D^2(zh) - D(zz)D(hh)}{D(zz)D(hh)}$$

IV. Es soll der Winkel berechnet werden, den eine Kante $H[\eta_1 \eta_2 \eta_3]$ des einen Individuums mit einer Kante $\mathcal{A}[\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3]$ des anderen Individuums eines Zwillings einschliesst.

Die Indices der Kante $\mathcal{A}$ bezogen auf das Axensystem des ersten Individuums seien $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$, dann ist nach (40):

$$\cos(H\mathcal{A}') = \frac{K(\eta\lambda')}{\sqrt{K(\eta\eta)K(\lambda'\lambda')}} \quad (109)$$

oder, wenn man für die Indices $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$ ihre Werthe nach (104) einträgt:

$$(109) \quad \cos(H\mathcal{A}') = \frac{2K(\zeta\eta)K(\zeta\lambda) - K(\zeta\zeta)K(\eta\lambda)}{K(\zeta\zeta)\sqrt{K(\eta\eta)K(\lambda\lambda)}}$$

Insbesondere ergibt sich hieraus der Cosinus des Winkels, welchen die einander entsprechenden Kanten H und H' einschliessen:

$$(110) \quad \cos(HH') = \frac{2K^2(\zeta\eta) - K(\zeta\zeta)K(\eta\eta)}{K(\zeta\zeta)K(\eta\eta)}$$

Aus den Formeln (104) bis (110) fliessen durch Specialisirung folgende Ergebnisse.

Aus (104) erhalten wir die Verhältnisse der Indices der Axenebenen X'_1, X'_2, X'_3 des zweiten Individuums bezogen auf das Axensystem des

ersten Individuums, indem wir für $h_1 h_2 h_3$ successive 100, 010, 001 eintragen. Der Kürze wegen möge noch:

$$\frac{z_\mu}{a_\nu} \sum_{i=1}^3 \mathcal{A}_{i\nu} \frac{z_i}{a_i} = g_{\mu\nu}$$

gesetzt werden. Die gesuchten Indices verhalten sich wie:

$$(111) \quad \begin{array}{lll} X'_1 & 2g_{11} - D(zz) : 2g_{21} & : 2g_{31} \\ X'_2 & 2g_{12} & : 2g_{22} - D(zz) : 2g_{32} \\ X'_3 & 2g_{13} & : 2g_{23} : 2g_{33} - D(zz) \end{array}$$

Aus (104) erhalten wir die Verhältnisse der Indices der Axen x'_1, x'_2, x'_3 des zweiten Individuums bezogen auf das Axensystem des ersten Individuums, indem wir für $\eta_1 \eta_2 \eta_3$ successive 100, 010, 001 eintragen. Wir bedienen uns der abgekürzten Bezeichnung:

$$\frac{\zeta_\mu a_\nu}{a_1^2 a_2^2 a_3^2} \sum_{i=1}^3 c_{i\nu} a_i \zeta_i = \gamma_{\mu\nu}$$

Dann verhalten sich die gesuchten Indices wie:

$$(112) \quad \begin{array}{lll} x'_1 & 2\gamma_{11} - K(\zeta\zeta) : 2\gamma_{21} & : 2\gamma_{31} \\ x'_2 & 2\gamma_{12} & : 2\gamma_{22} - K(\zeta\zeta) : 2\gamma_{32} \\ x'_3 & 2\gamma_{13} & : 2\gamma_{23} : 2\gamma_{33} - K(\zeta\zeta) \end{array}$$

Aus (108) ergeben sich Ausdrücke für die Cosinus der Winkel, welche die Axenebenen X_1, X_2, X_3 des einen Individuums mit den Axenebenen X'_1, X'_2, X'_3 des anderen Individuums einschliessen:

$$(113) \quad \cos(X_i X'_k) = \frac{2\mathcal{A} a_i a_k \zeta_i \zeta_k - \mathcal{A}_{ik} a_1^2 a_2^2 a_3^2 K(\zeta\zeta)}{a_1^2 a_2^2 a_3^2 K(\zeta\zeta) \sqrt{\mathcal{A}_{ii} \cdot \mathcal{A}_{kk}}}$$

Aus (110) folgen Ausdrücke für die Cosinus der Winkel, welche die Axen x_1, x_2, x_3 des einen Individuums mit den Axen x'_1, x'_2, x'_3 des anderen Individuums einschliessen:

$$(114) \quad \cos(x_i x'_k) = \frac{2\mathcal{A} \frac{z_i z_k}{a_i a_k} - \cos(x_i x_k) D(zz)}{D(zz)}$$

Die Transformationsgleichungen (104) und (104) gelten für das asymmetrische System; aus ihnen sollen jetzt die entsprechenden Formeln für die übrigen Krystallisationssysteme abgeleitet werden.

Im monosymmetrischen System ist:

$$(115) \quad \begin{aligned} \sigma h'_i &= 2 \left\{ \frac{z_1 h_1}{a_1 a_1} + \sin^2 \beta \frac{z_2 h_2}{a_2 a_2} + \frac{z_3 h_3}{a_3 a_3} - \cos \beta \frac{z_1 h_3 + z_3 h_1}{a_1 a_3} \right\} z_i \\ &\quad - \left\{ \frac{z_1 z_1}{a_1 a_1} + \sin^2 \beta \frac{z_2 z_2}{a_2 a_2} + \frac{z_3 z_3}{a_3 a_3} - 2 \cos \beta \frac{z_1 z_3}{a_1 a_3} \right\} h_i \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \tau \eta'_i &= 2 \{ a_1^2 \zeta_1 \eta_1 + a_2^2 \zeta_2 \eta_2 + a_3^2 \zeta_3 \eta_3 + \cos \beta a_1 a_3 (\zeta_1 \eta_3 + \zeta_3 \eta_1) \} \zeta_i \\ &\quad - 2 \{ a_1^2 \zeta_1^2 + a_2^2 \zeta_2^2 + a_3^2 \zeta_3^2 + 2 \cos \beta a_1 a_3 \zeta_1 \zeta_3 \} \eta_i \end{aligned}$$

Im rhombischen System ist:

$$(117) \quad \sigma h'_i = 2 \left\{ \frac{z_1 h_1}{a_1 a_1} + \frac{z_2 h_2}{a_2 a_2} + \frac{z_3 h_3}{a_3 a_3} \right\} z_i - \left\{ \frac{z_1 z_1}{a_1 a_1} + \frac{z_2 z_2}{a_2 a_2} + \frac{z_3 z_3}{a_3 a_3} \right\} h_i$$

$$(118) \quad \tau \eta'_i = 2 \{ a_1^2 \zeta_1 \eta_1 + a_2^2 \zeta_2 \eta_2 + a_3^2 \zeta_3 \eta_3 \} \zeta_i \\ - \{ a_1^2 \zeta_1^2 + a_2^2 \zeta_2^2 + a_3^2 \zeta_3^2 \} \eta_i$$

Im tetragonalen System ist:

$$(119) \quad \sigma h'_i = 2 \{ z_1 h_1 + z_2 h_2 + a^2 z_3 h_3 \} z_i - \{ z_1^2 + z_2^2 + a^2 z_3^2 \} h_i$$

$$(120) \quad \tau \eta'_i = 2 \{ a^2 \zeta_1 \eta_1 + a^2 \zeta_2 \eta_2 + \zeta_3 \eta_3 \} \zeta_i - \{ a^2 \zeta_1^2 + a^2 \zeta_2^2 + \zeta_3^2 \} \eta_i.$$

Im hexagonalen System ist bei Zugrundelegung von orthohexagonalen Axen:

$$(121) \quad \sigma h'_i = 2 \{ 3 z_1 h_1 + z_2 h_2 + 3 a^2 z_3 h_3 \} z_i - \{ 3 z_1^2 + z_2^2 + 3 a^2 z_3^2 \} h_i$$

$$(122) \quad \tau \eta'_i = \{ a^2 \zeta_1 \eta_1 + 3 a^2 \zeta_2 \eta_2 + \zeta_3 \eta_3 \} \zeta_i - \{ a^2 \zeta_1^2 + 3 a^2 \zeta_2^2 + \zeta_3^2 \} \eta_i.$$

Im regulären System ist:

$$(123) \quad \sigma h'_i = 2 \{ z_1 h_1 + z_2 h_2 + z_3 h_3 \} z_i - \{ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 \} h_i$$

$$(124) \quad \tau \eta'_i = 2 \{ \zeta_1 \eta_1 + \zeta_2 \eta_2 + \zeta_3 \eta_3 \} \zeta_i - \{ \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 \} \eta_i.$$

Die Formeln (104), 104 und (115) bis (124) dienen zu Beantwortung der Frage nach den Fällen, in denen die auf das Axensystem des einen Individuums bezogenen Flächen der beiden Individuen eines Zwillinges dem Gesetz der rationalen Indices unterworfen sind.

Es gehören hierher:

- 1) Die Zwillinge des regulären Systems*).
- 2) Diejenigen Zwillinge des tetragonalen Systems, bei denen eine Fläche $\{z_1 z_2 0\}$ aus der Verticalzone oder die Basis $\{001\}$ Zwillingsebene ist.
- 3) Diejenigen Zwillinge des hexagonalen Systems, bei denen eine Fläche $\{z_1 z_2 0\}$ aus der Verticalzone oder die Basis $\{001\}$ Zwillingsebene ist.
- 4) Diejenigen Zwillinge des rhombischen Systems, bei denen $\{100\}$, $\{010\}$ oder $\{001\}$ Zwillingsebene ist.

Daraus sind zugleich die Einschränkungen ersichtlich, welche der im Eingange erwähnte Satz von Fr. Naumann erleidet.

*) Vgl. Sénarmont a. a. O.