**Sopra le *coupures* del sig. Hermite,
i *Querschnitte* e le superficie di Riemann,
ed i concetti d'integrazione
sì reale che complessa.**

(Osservazioni e ricerche di F. CASORATI, a Pavia.)

ARTICOLO SECONDO.

**Rami di un integrale definito, considerato come funzione di un parametro,
e superficie rappresentativa di questa funzione.**

§ 5. Le superficie riemanniane di cui in oggi, se non largamente, tuttavia con qualche estensione si fa uso, sono quelle che rappresentano funzioni algebriche, e sono quindi composte di un numero finito di strati. Ma, anche le superficie costituite da una infinità di strati possono facilitare lo studio delle funzioni, e quindi meritare di esser prese in considerazione. Io credo aver già dato non dubbie prove della loro utilità nelle due Memorie: *Les fonctions d'une seule variable à un nombre quelconque de périodes*; e *Les lieux fondamentaux des fonctions inverses des intégrales abéliennes* (*). Nondimeno, colgo volentieri l'occasione delle *coupures* del sig. HERMITE per confermare sempre più la mia affermazione.

Per giungere al concetto di *coupure*, il sig. HERMITE definisce (pag. 12 del su citato esemplare) una grandezza Φ qual funzione della variabile complessa z mediante l'integrale

$$\Phi(z) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{F(t, z)}{G(t, z)} dt, \quad (1)$$

da prendersi lungo il cammino reale; reali essendo i limiti t_0 e t_1 . Supposte *holomorphes* in t e z le funzioni F e G , egli osserva che Φ avrà valore unico e finito per tutti quei valori di z pei quali G non si annulla lungo il cammino

---

(*) *Acta Mathematica*, tomo 8.º.

Annali di Matematica, tomo XVI.

d'integrazione, e dimostra (pag. 13-15) che lungo le linee del piano z , corrispondenti giusta $G = 0$ al cammino d'integrazione, la Φ presenta discontinuità finite. Sono queste linee ch'egli chiama *coupures* relative alla funzione Φ .

L'illustre scrittore principia coll'ipotesi di t_0 , t_1 e t reali per mostrare come il concetto di *coupure* scaturisca da quello d'integrazione anche puramente reale. Ma, poichè nel seguito della Memoria fa bensì cenno, ma non uso, dei cammini curvilinei, e non piglia a considerare e confrontare tra loro le diverse determinazioni che pei diversi cammini la Φ potrebbe ricevere, qualche lettore potrebb'essere indotto a credere che ogni funzione così definita fosse per sua essenza *univalente* (*), e che le relative *coupures* fossero sempre linee *totalmente* individuate dalla natura della funzione; la quale rimarrebbe dunque essenzialmente separata da ogni altra, così da doversi o potersi anche affatto isolatamente studiare.

Ora, queste interpretazioni non corrispondono, in generale, al vero. La Φ definita dall'equazione (1), coll'*aggiunta restrittiva* che il cammino d'integrazione da t_0 a t_1 deva essere *uno particolare*, non sarà molte volte che un ramo di una funzione plurivalente. Gli altri rami, formanti col primo *un tutto continuo*, ossia fluenti da esso con continuità, saranno parimenti espressi dall'integrale (1), da prendersi non più lungo il particolare cammino di prima, ma lungo opportuno cammino nuovo per ciascun ramo; sempre, ben'inteso, da t_0 a t_1 . Le *coupures*, in tali casi, altro non essendo che linee separanti ciascun ramo dagli altri, si potranno immaginare tracciate in infinite guise diverse; essendone invariabilmente determinati *soltanto i punti estremi*, che sono quelli del piano z che soddisfanno le particolari equazioni

$$G(t_0, z) = 0, \quad G(t_1, z) = 0.$$

Le ricerche di questo articolo metteranno in piena luce queste verità. Però, anticipando anche sull'articolo quarto, nella mira di metter più presto i giovani in guardia contro interpretazioni meno rette, voglio sin d'ora far loro notare, che, non eccezionalmente, ma con qualche frequenza si trovano usati in senso univalente simboli o formole suscettibili di molteplici significati, e ciò in riguardo del vantaggio che lo scrittore ne ritrae per lo scopo a cui mira.

Come è utile molte volte, per esempio, di significare con $\log z$ e z^a soltanto il *principale* fra i logaritmi naturali e la *principale* fra le potenze a -esime

---

(*) Alle frasi, usate nella nostra *Teorica delle funz. di var. comp.*, § 44: *funzioni a un valore*, *funzioni a più valori* abbiamo sostituito nei posteriori nostri corsi universitarii le seguenti: *funzioni univalenti*, *funzioni plurivalenti* (*n-valenti* od *∞ -valenti*).

di z , così può far comodo di significare con

$$\int_{t_0}^{t_1} f \cdot dt,$$

pur trattandosi di ricerche del dominio della variabilità complessa, soltanto quel valor dell'integrale che corrisponde ad un particolare cammino. Ma importa di non dimenticare che queste sono restrizioni introdotte dalla volontà dello scrittore; le quali, alterando quell'armonia fra talune parti dell'analisi che senza di esse vi regnerebbe, possono condurre chi non le avverta a contraddizioni ed errori. A render ciò manifesto basterà ch'io accenni, per esempio, al facile occorrere del caso seguente.

Abbiasi la funzione $\Phi(z)$ definita da

$$\Phi(z) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, z) dt, \quad (2)$$

essendo f una data formola univalente in t e z . Siasi dedotta da questa un'equazione differenziale fra z e Φ :

$$\Psi\left(z, \Phi, \frac{d\Phi}{dz}, \dots\right) = 0. \quad (3)$$

Se si conserva al simbolo integrale tutta la sua generalità, così da poter prendere qualsivoglia linea del piano t come cammino d'integrazione, le conclusioni che si potranno fare partendo dalla (2) armonizzeranno con quelle alle quali si perverrà pigliando le mosse dalla (3). Non altrettanto nel caso contrario. Se nella (2) non si pensasse che l'integrale, per esempio, rettilineo, essa ci farebbe credere, come dicemmo, la Φ funzione univalente, mentre dalla (3) potrebbero fluire per la Φ stessa, pur sempre in casi di f univalente, più rami, in numero finito od infinito (*).

§ 6. Procediamo ormai all'oggetto proprio di quest'articolo, che è di ricercare tutti i rami e quindi abbracciare nella sua totalità ed intuire, mediante una superficie riemanniana, una funzione che sia definita per mezzo di un integrale, in cui la variabile entri qual parametro del differenziale, come appunto sta espresso nella (2).

(*) Se t_0 e t_1 significassero costanti arbitrarie, e la (3) risultasse dall'eliminazione di queste costanti fra la (2) e le sue derivate 1^a e 2^a rispetto a z ; la (2) stessa sarebbe la primitiva completa o generale della (3), conformemente all'ordinaria teoria delle equazioni differenziali. La funzione generale Φ e tutte o parte delle funzioni particolari, che se ne ottengono dando particolari valori a t_0 e t_1 , potranno anche non essere univalenti; e, vogliamo ripeterlo, non è che nel caso dell'univalenza che non si troverebbe contraddizione riferendo il simbolo integrale (2) ad un solo cammino.

Tratteremo dapprima il caso in cui la $f(t, z)$ sia razionale in t e z ; poi il caso di f irrazionale, cioè radice di un'equazione algebrica a coefficienti razionali in t e z ; ed infine alcuni casi di f trascendente.

Indicando con $F(t, z)$ e $G(t, z)$ due funzioni razionali ed intere in t e z , vogliamo dunque studiare dapprima la funzione $\Phi(z)$ definita dall'equazione

$$\Phi(z) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{F(t, z)}{G(t, z)} dt,$$

che è quella appunto del sig. HERMITE, per quando il differenziale debba essere algebrico.

Però, a familiarizzare più facilmente i principianti colle nostre considerazioni, premetteremo il caso semplicissimo in cui F sia costante e G lineare in t e z , cioè il caso di

$$\Phi(z) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{At + Bz + C}. \quad (4)$$

In questo caso, si può esprimere $\Phi(z)$ colla formola

$$\Phi(z) = \frac{1}{A} \log \frac{At_1 + Bz + C}{At_0 + Bz + C};$$

epperò, chi avesse già studiato la funzione $\log z$ nella debita odierna sua generalità, dedurrebbe facilmente da questa formola come la Φ abbia una infinità di rami, estendentisi ciascuno per tutto il piano z , e differenti tra loro soltanto pei multipli della costante $\frac{2\pi i}{A}$; e come questi rami si continuino l'uno nell'

l'altro così da costituire un tutto unico, affatto continuo, che è la funzione $\Phi(z)$, intesa in tutta la sua generalità; e di cui $\log z$ può dirsi uno dei casi limiti.

Ma, oltre che non tutti studiano $\log z$ come funzione ∞ -valente, noi vogliamo ripigliare da capo l'analisi di questa $\Phi(z)$, affinchè serva, come dicemmo, quale esempio dell'applicazione di quei teoremi d'integrazione complessa e di quel modo di rappresentare le funzioni, di cui faremo uso in seguito.

Ed è anche per conservare, dirò quasi letteralmente, l'analogia di questo primo caso col caso generale, che prendo $At + Bz + C$ anzichè il semplice binomio $t + z$; il quale, se si risguardino t_0 e t_1 come costanti arbitrarie, somministrerebbe la stessa famiglia di funzioni che, per $A = 1$, viene espressa dalla (4), ovvero dall'equazione differenziale

$$A(1 + e^{Az}) \frac{d\Phi}{dz} + (1 - e^{Az}) \frac{d^2\Phi}{dz^2} = 0,$$

di cui la (4), col detto significato di t_0 e t_1 , è primitiva generale.

Prendendo dunque a considerare la Φ definita dalla (4), cerchiamo in primo luogo quanti e quali sieno i valori di Φ per uno stesso valore di z . Lasciemo espresso dalla stessa lettera z cotesto valore, benchè per ora sia da immaginarsi, non già come variabile, ma come numericamente fissato.

Per calcolare Φ devesi porre nella funzione

$$\frac{1}{At + Bz + C}$$

per z il numero fissato, e poi fare l'integrazione rispetto a t .

Noi terremo sempre presenti due piani, cioè il piano t per rappresentarvi i valori di t , ed il piano z . Ogni qualvolta vorremo immaginare una integrazione rispetto a t , ne penseremo il relativo cammino nel piano t .

Sia l un primo cammino in esso piano da t_0 a t_1 , e sia Φ_0 il valore dell'integrale (4) preso lungo l . Esprimeremo ciò scrivendo:

$$\Phi_0(z) = \int_l \frac{dt}{At + Bz + C}. \quad (5)$$

$\Phi_0(z)$ è dunque uno dei valori di $\Phi(z)$ corrispondenti al fissato valore z ; gli altri valori di Φ si otterranno integrando lungo gli altri cammini. Questi cammini sono in numero infinito; ma non tutti, come si sa, producono valori differenti. Sia ι uno qualsivoglia fra questi altri cammini. Designando con $-l$ il cammino l da percorrersi, non già da t_0 a t_1 , ma da t_1 a t_0 ; la eguaglianza

$$\int_{-l} \frac{dt}{At + Bz + C} = - \int_l \frac{dt}{At + Bz + C}$$

permette di surrogare al cammino ι , senza alterazione del risultato d'integrazione, il cammino $\iota - l + l$, ossia il cammino rientrante $\iota - l$ susseguito dal cammino l . Potremo dunque scrivere

$$\int_{\iota} \frac{dt}{At + Bz + C} = \int_{\iota - l} \frac{dt}{At + Bz + C} + \Phi_0(z); \quad (6)$$

perocchè, al termine del cammino $\iota - l$, il valore della funzione razionale ritorna ad essere lo stesso

$$\frac{1}{At_0 + Bz + C},$$

col quale fu cominciata la primiera integrazione (5).

Per ottenere tutti i possibili valori di Φ , basterà dunque aggiungere al già ottenuto, cioè Φ_0 , successivamente ognuno dei possibili risultati d'integrazione lungo cammini aventi principio e termine in t_0 .

Ora riflettiamo, che, la funzione da integrarsi essendo razionale, l'integrazione lungo un cammino rientrante si potrà cominciare in qualsivoglia punto del medesimo, senza che siavi incertezza sul valore da prendersi per la funzione in quel punto. Inoltre, potremo deformare esso cammino (*) così che, non soltanto cessi di passare per t_0 , ma vada ognora più restringendosi intorno ai soli punti dove la funzione da integrarsi presenti singolarità.

Questa funzione non soffre altra singolarità tranne quella di diventare infinita dove si annulla il denominatore, cioè nel punto, che dirò t_z , determinato dalla:

$$t_z = -\frac{Bz + C}{A}.$$

Perciò, qualsiasi cammino rientrante potrà ridursi puramente ad una successione di giri positivi o negativi intorno al punto t_z ; da farsi, se si vuole, su un cerchio di centro t_z . Designando, dunque, con m un numero intero, positivo o nullo o negativo, sarà in ogni caso:

$$\int_{\Gamma} \frac{dt}{At + Bz + C} = m \int \frac{dt}{At + Bz + C},$$

dove l'integrale del secondo membro s'intende preso lungo un giro positivo di t intorno a t_z . Ma questo integrale ha, com'è noto, il valore

$$\int \frac{dt}{At + Bz + C} = \frac{1}{A} \int \frac{dt}{t - t_z} = \frac{2\pi i}{A}.$$

Dunque, tutti i possibili valori di Φ si otterranno dalla formola

$$\Phi(z) = m \frac{2\pi i}{A} + \Phi_0(z), \quad (7)$$

dando ad m tutti i diversi valori interi possibili. Questa funzione ammette, come si vede, una infinità di valori per ogni z , ossia è ∞ -valente.

Facendo variare z , varia il valore di $\Phi_0(z)$, e dai secondi membri della (7) corrispondenti ai valori

$$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

di m , fluiscono con continuità altrettanti rami della funzione Φ , che distingueremo momentaneamente coi simboli

$$\dots, \Phi_{-2}, \Phi_{-1}, \Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots \quad (8)$$

(*) Intendasi, sempre, rimanendo inalterato il risultato dell'integrazione.

Ciascuno di questi rami è funzione univalente, ma discontinua lungo quella linea del piano z che corrisponde alla linea l del piano t secondo l'equazione

$$At + Bz + C = 0.$$

Immaginando che la forma di l vada cambiando, andrà cambiando anche la linea di discontinuità, e ciascun ramo subirà, alla destra e alla sinistra della medesima, prolungamenti e raccorciamenti continui corrispondenti.

La giacitura della linea di discontinuità non è dunque fissata dalla natura della relazione (4), intesa nella sua generalità; essa linea può diventare una qualsivoglia fra tutte quelle che hanno principio e termine nei due punti del piano z determinati dalle equazioni:

$$At_0 + Bz + C = 0, \quad At_1 + Bz + C = 0. \quad (9)$$

Ed i sistemi continui di valori che un ramo, per es. Φ_m , va guadagnando (o perdendo) quando vien prolungato (o raccorciato) sono quelli che va perdendo (o guadagnando) il ramo Φ_{m-1} od il Φ_{m+1} , secondochè il prolungamento (o raccorciamento) si effettua dalla sinistra alla destra della prima linea di discontinuità, o viceversa. Il che viene a dire che i rami (8) si fondono sostanzialmente in un unico sistema continuo, ossia costituiscono una sola funzione affatto continua, ∞ -valente. La discontinuità che si riscontra in ciascun ramo è puramente dovuta all'arbitraria separazione che si vuol fare di esso ramo dagli altri, e non ha nessun fondamento analitico nella relazione (4), se non si restringa volontariamente il concetto d'integrale, stabilendo, per esempio, che deva esser preso solamente lungo un particolare cammino (*).

Si intuiscono agevolmente insieme tutti i rami, e la connessione e le vicendevoli variazioni loro, raffigurandoli in altrettanti strati analitici (**), ossia pigliando in considerazione una superficie *distesa sul piano z* e composta di tanti strati quanti sono i rami o valori di Φ per ogni z , di guisa che ogni coppia (z, Φ) , ossia ogni possibile soluzione dell'equazione

$$\Phi - \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{At + Bz + C} = 0,$$

abbia nella superficie un punto rappresentativo, e qualunque variazione con-

---

(*) Le stesse osservazioni si possono fare (come noi femmo infatti nella su citata *Teorica delle funz. di var. comp.*) già completamente in analisi algebrica rispetto ai concetti ed alle relazioni che sono del dominio della medesima.

(**) Veramente, nel presente semplicissimo caso, la rappresentazione parrà superflua; noi la consideriamo allo scopo, già detto, di facilitare l'intelligenza dei casi del differenziale razionale qualunque e dei differenziali non razionali.

tinua della coppia si possa raffigurare in un movimento continuo del punto rappresentativo per entro la superficie; e reciprocamente. Perciò, noi passiamo ora a costruire cotesta superficie.

Imaginiamo, a tal fine, distesi sul piano z una infinità di piani

$$\dots\dots, P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, \dots\dots \quad (10)$$

succedentisi, per fissar le idee, l'uno al disopra dell'altro nell'ordine naturale dei loro indici, e destinati a rappresentare rispettivamente i rami (8). Il piano P_h starà dunque sopra P_{h-1} e servirà a rappresentare Φ_h nel solito modo, secondo il quale devesi immaginare deposto in ciascun punto di P_h , insieme col valore di z rappresentato dal sottoposto punto del piano z , il valore di Φ_h dato dalla formola

$$\Phi_h(z) = h \frac{2\pi i}{A} + \Phi_0(z).$$

Ora, dunque, P_h è un piano carico di coppie (z, Φ) , o, come usiamo dire, è un piano o strato analitico.

Però, questa formola assegna essa a Φ_h un valore per ogni z , senza eccezioni? Evidentemente no; perocchè l'integrale

$$\Phi_0(z) = \int_t \frac{dt}{At + Bz + C},$$

non ha significato se z sia tale che in qualche punto del cammino l riesca

$$At + Bz + C = 0.$$

Quali sono i punti del piano P_h dove giacciono siffatti valori di z ? Per ogni punto del piano t , l'equazione $At + Bz + C = 0$ determina un punto

Fig. 1 (sul piano t).

Fig. 2 (sul piano z).

del piano z . Alla linea l del piano t (fig. 1) essa fa corrispondere una linea sul piano z , che chiamerò σ , ed è rappresentata nella fig. 2 dalla ab . Chia-

mando σ_h la linea stessa, pensata nel piano P_h ; sono i punti di σ_h quelli pei quali la formola non dà valore per Φ_h . Mancando nei punti di σ_h i valori di Φ_h , questi punti non vanno considerati come *punti analitici*; epperò deve si riguardare lo strato come mancante della linea σ_h ; ond'è che per *strato analitico* P_h intenderemo il piano P_h tagliato lungo la linea σ_h e caricato delle coppie (z, Φ_h) .

Ora osserviamo, che, in qualunque prossimità del taglio, la definizione d'integrale assegna a $\Phi_h(z)$, e quindi anche a $\Phi_h(z)$, un valore perfettamente determinato, il quale tende a limite affatto determinato col tendere di z ad un punto di σ_h . Ciò è quanto dire che sono affatto determinati i valori di Φ_h lungo l'orlo sinistro e lungo l'orlo destro del taglio (*).

Per mettere ciò in tutta luce, consideriamo un punto qualunque dell'orlo sinistro ed il punto dirimpetto nell'orlo destro. Sia ζ il valore che ha z in questi due punti, che chiameremo anche punti ζ (**). Sieno, inoltre, N e N' due punti di P_h tendenti rispettivamente ai punti ζ . I valori di Φ_h spettanti ai punti N e N' sono quelli dati rispettivamente da:

$$\Phi_h(N) = h \frac{2\pi i}{A} + \int \frac{dt}{At + BN + C}, \quad \Phi_h(N') = h \frac{2\pi i}{A} + \int \frac{dt}{At + BN' + C},$$

dove, ben s'intende, sotto il simbolo integrale, N e N' significano i valori di z spettanti ai punti N e N' .

Per riconoscere come si comportino questi valori di Φ_h al tendere di N e N' a ζ , conviene mutare il cammino dei due integrali per modo che essi serbino significato anche quando N e N' raggiungano il limite ζ (***). Sic-

(*) Il senso secondo cui supponiamo fatto il taglio è quello stesso da a a b (fig. 2) secondo cui vien descritta la linea σ dalla radice z dell'equazione $At + Bz + C = 0$ mentre t descrive la linea l . I punti a e b sono determinati dalle equazioni $At_0 + Ba + C = 0$ $At_1 + Bb + C = 0$.

(**) Giova evitare la molteplicità dei simboli. Nel caso d'una variabile complessa, va sempre più estendendosi l'uso di designare con la stessa lettera la variabile, un punto che la rappresenti ed il luogo di esso punto. Occorrendo, si toglie ogni ambiguità con opportuna aggiunta. Nel discorso si dirà, per es., la variabile z , il punto z , il piano z . Similmente qui potremo dire: punto ζ del taglio, punto ζ dell'orlo sinistro, punto ζ dell'orlo destro, valor ζ di z .

A designare però i punti degli orli di un taglio e valori ad essi relativi, preferiamo molte volte il modo usato da RIEMANN nella *Theorie der Abelschen Functionen*, secondo il quale scriveremmo

ζ^+ , ζ^- , Φ_h^+ , Φ_h^- invece di $\lim N$, $\lim N'$, $\lim \Phi_h(N)$, $\lim \Phi_h(N')$.

(***) Così, ben giustamente, procedeva il sig. E. GOURSAT, in una Memoria del 1883 (*Acta Mathematica*, 5:2), riferendosi alla stessa lettera del sig. HERMITE, che stiamo commentando.

come i valori di questi integrali restano inalterati se il cammino si deforma senza sorpassare punti del piano t ove s'annulli il denominatore; così immagineremo che il cammino pel primo integrale si deforma alcun poco verso destra (*), e pel secondo alcun poco verso sinistra. Significando con λ e λ' questi nuovi cammini, che rappresentiamo tratteggiati nella fig. 1, scriveremo:

$$\Phi_h(N) = h \frac{2\pi i}{A} + \int_{\lambda} \frac{dt}{At + BN + C}, \quad \Phi_h(N') = h \frac{2\pi i}{A} + \int_{\lambda'} \frac{dt}{At + BN' + C}.$$

Queste formole, che, ripetiamo, somministrano per Φ_h nei punti circostanti al taglio gli stessi valori delle due formole relative al cammino l , fanno vedere che questi valori, col tendere di N e N' a ζ , tendono rispettivamente ai limiti determinati da:

$$\lim \Phi_h(N) = h \frac{2\pi i}{A} + \int_{\lambda} \frac{dt}{At + B\zeta + C}, \quad \lim \Phi_h(N') = h \frac{2\pi i}{A} + \int_{\lambda'} \frac{dt}{At + B\zeta + C}.$$

Questi secondi membri esprimono dunque i valori da immaginarsi depositi per Φ_h nel punto ζ dell'orlo sinistro e nello ζ dell'orlo destro.

Questi valori non sono eguali tra loro. Infatti, la loro differenza è espressa dalla differenza dei due integrali, ossia dall'integrale unico

$$\int \frac{dt}{At + B\zeta + C},$$

esteso a tutta la linea rientrante costituita da λ e $-\lambda'$. Ma, entro la linea chiusa $\lambda - \lambda'$ (fig. 1), non havvi che il punto θ di l , determinato dall'equazione

$$A\theta + B\zeta + C = 0,$$

pel quale riesca zero il denominatore. Perciò, l'integrale lungo $\lambda - \lambda'$ non è che il prodotto di $2\pi i$ pel solito residuo di CAUCHY; cioè si ha

$$\lim \Phi_h(N) - \lim \Phi_h(N') = \int \frac{dt}{At + B\zeta + C} = \int \frac{dt}{A(t - \theta)} = \frac{2\pi i}{A}.$$

Questo risultamento esprime che i valori di Φ_h lungo l'orlo sinistro di σ_h superano della costante $\frac{2\pi i}{A}$ quelli posti dirimpetto nell'orlo destro.

(*) Poichè il punto $z = N$ è alla sinistra di σ (fig. 2), il punto del piano t che soddisfa la $At + BN + C = 0$ è pure alla sinistra di l . Quindi, se il cammino si deforma verso destra, cioè invade soltanto la regione alla destra di l , il denominatore $At + BN + C$ non riesce mai zero.

Prendendo, ora, a confrontare Φ_h cogli altri rami, dal detto risultamento segue che i valori di Φ_h nell'orlo sinistro di σ_h sono eguali ai valori che ha Φ_{h+1} nell'orlo destro di σ_{h+1} ; perocchè questi superano essi pure della costante $\frac{2\pi i}{A}$ i sottoposti valori di Φ_h , come sta espresso nella generale relazione

$$\Phi_{h+1}(z) = \frac{2\pi i}{A} + \Phi_h(z).$$

Questa conclusione c'insegna come devansi immaginare congiunti tra loro gli strati (10) per costituirne la desiderata superficie *completa*, cioè rappresentativa di *tutte quante* le soluzioni (z, Φ) , ossia di *tutto il contenuto* della relazione

$$\Phi - \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{At + Bz + C} = 0.$$

Questa conclusione ci dice che si devono connettere:

gli orli sinistri di . . . . ., $\sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots$

rispettivamente coi destri di . . . . ., $\sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$ (*).

Fatte queste connessioni, non esistono più i tagli, ed al loro posto si presentano le linee di passaggio da uno ad altro degli strati costituenti l'unica superficie che n'è risultata. Le estremità di queste linee, cioè i punti dove $z = a$ e $z = b$, sono punti di diramazione logaritmica, comuni a tutti quanti gli strati. Seguitando a girare in senso positivo intorno a b , un punto mobile nella superficie passerebbe di mano in mano da uno strato P_h agli strati sovrapposti $P_{h+1}, P_{h+2}, \dots$; mentre passerebbe ai sottoposti se girasse in senso positivo intorno ad a . Il cammino di questo punto ci raffigura ad un tempo il variare di z ed il modo di comportarsi della Φ , relativamente al riprendere essa, o no, il medesimo valore ogniquale volta z ritorni sopra un medesimo punto del piano z .

I punti a e b restano invariabilmente determinati dai limiti t_0 e t_1 dell'integrale (4). Ma, alle linee di passaggio si può dare quella forma che si

(*) La qui unita figura schematica può rappresentare il profilo della superficie risultante da queste connessioni, ottenuto con un piano normale a σ guardato da a verso b .

vuole fra tutte quelle che può assumere una linea σ che deva andare da a a b senza intersecare se medesima. Questa verità si riconosce, sia riflettendo che si può prendere come cammino l , da cui σ dipende, qualunque linea da t_0 a t_1 ; sia facendo subire alle linee di passaggio, una volta già ottenute, quelle deformazioni di cui s'è detto nel § 4. Ond'è che la superficie analitica, che abbiamo ottenuta, può riguardarsi come *indipendente dal particolare cammino l* , primitivamente immaginato per costruirla.

Affinchè questa verità appaja in tutta la sua luce, insistiamo nel raccomandare di considerare la superficie puramente come un sistema analitico a due dimensioni di coppie (z, Φ) succedentisi con continuità. Da questo giusto punto di vista analitico non è nè anche necessario di immaginare linee di passaggio; e pur volendole immaginare, ben si vede che le loro deformazioni non hanno a che fare colle grandezze dei numeri z e Φ deposti nei singoli punti ed obbedienti alla continuità.

Taluno vorrà anche notare, che il valore di Φ , deposto, per esempio, nel punto di P_h dove z ha il valor z_1 , è dato dalla formola

$$\Phi(z_1) = h \frac{2\pi i}{A} + \int_i \frac{dt}{At + Bz_1 + C},$$

in cui l'integrale non cambia di valore al deformarsi di l ; ben'inteso, finchè l non sorpassi il punto ove sarebbe nullo il denominatore.

§ 7. Passiamo, ora, al caso del differenziale razionale qualunque, cioè al caso di

$$\Phi(z) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{F(t, z)}{G(t, z)} dt, \quad (11)$$

significando F e G due polinomii interi in t e z , non aventi fattori comuni razionali in t e z .

Cerchiamo, come nel passato paragrafo, quanti e quali sieno i valori di questa Φ per uno stesso valore di z .

Pigliando un primo cammino l da t_0 a t_1 nel piano t , otterremo un primo valore Φ_0 per Φ , giusta la formola

$$\Phi_0(z) = \int_i \frac{F(t, z)}{G(t, z)} dt. \quad (12)$$

Designando poi con ι un altro cammino qualsiasi da t_0 a t_1 , avremo, analogamente alla (6), la

$$\int_{\iota} \frac{F(t, z)}{G(t, z)} dt = \int_{\iota-i} \frac{F(t, z)}{G(t, z)} dt + \Phi_0(z). \quad (13)$$

Per ottenere tutti i possibili valori di $\Phi(z)$ bisogna dunque quì pure cercare tutti i risultati che possono provenire dalla integrazione di $\frac{F}{G} dt$ lungo cammini aventi principio e termine in t_0 , ossia lungo tutti i possibili cammini chiusi.

Un cammino chiuso può sempre ridursi a successioni di giri intorno ai punti dove hanno luogo singolarità per la funzione $\frac{F}{G}$. Questa funzione non ha altre singolarità fuorchè gli infiniti, i quali hanno luogo in quei punti del piano t nei quali è nullo il denominatore G .

Per semplicità, nel nostro articolo prenderemo in considerazione soltanto, quelle G che non hanno fattori multipli razionali in t e z (*).

Escludendo pel momento quei particolari valori di z che sono radici dell'equazione risultante dall'eliminare t fra le

$$G(t, z) = 0, \quad \frac{\partial G(t, z)}{\partial t} = 0,$$

potremo porre

$$G(t, z) = A(t - t')(t - t'') \dots (t - t^n), \quad (14)$$

essendo A una costante od una funzione intera della sola z , e

$$t', \quad t'', \dots, \quad t^n,$$

le radici, tutte diverse fra loro, dell'equazione $G = 0$, i cui valori dipendono dal valore attribuito a z .

Sono dunque $t', t'', \dots, t^n$ i punti del piano t intorno a ciascun dei quali la integrazione potrà dare risultati diversi da zero.

La funzione ad integrarsi può scomporsi come segue:

$$\frac{F(t, z)}{G(t, z)} = E(t, z) + \frac{F(t', z)}{G'(t', z)} \frac{1}{t - t'} + \dots + \frac{F(t^n, z)}{G'(t^n, z)} \frac{1}{t - t^n},$$

dove, per semplicità, G' significa la derivata di G rispetto a t ; ed E una funzione razionale in t e z , ed intera rispetto a t .

Integrando lungo una linea del piano t che racchiuda t' e non $t'', \dots, t^n$, si ha:

$$\int \frac{F(t, z)}{G(t, z)} dt = \frac{F(t', z)}{G'(t', z)} \int \frac{dt}{t - t'},$$

(*) Letto quest'articolo, il giovane potrà trattare facilmente da sé il caso di qualunque altra G ; avvertendo essere sempre soltanto il termine che diventa infinito di prim'ordine quello da cui dipende il risultato dell'integrazione intorno al posto dell'infinito.

essendo nulli i risultati dell'integrazione di ogni altro termine del secondo membro. Dunque, il contributo che, nel risultato totale dell'integrazione lungo un cammino chiuso, deriverà dall'esistenza del punto t' sarà

$$m' \frac{F(t', z)}{G'(t', z)} 2\pi i,$$

significando m' il numero dei giri positivi diminuito di quello dei negativi che il cammino compie intorno a t' .

Epperò, designando con $m'', \dots, m^v$ altrettanti numeri interi, ciascun dei quali possa essere positivo o nullo o negativo, il risultato totale potrà esprimersi colla formola

$$\int_{t-t} \frac{F(t, z)}{G(t, z)} dt = m' \frac{F(t', z)}{G'(t', z)} 2\pi i + m'' \frac{F(t'', z)}{G'(t'', z)} 2\pi i + \dots + m^v \frac{F(t^v, z)}{G'(t^v, z)} 2\pi i.$$

Ad ogni particolare cammino chiuso spetta un particolare sistema di valori delle m , e per ogni sistema di valori delle m si possono imaginare quanti si vogliono cammini chiusi corrispondenti. Quindi, ricordando la (13), si conchiude, che la funzione Φ ha, per ogni data z , tutti e soli i valori ricavabili dalla formola:

$$\Phi(z) = m' \frac{F(t', z)}{G'(t', z)} 2\pi i + \dots + m^v \frac{F(t^v, z)}{G'(t^v, z)} 2\pi i + \Phi_0(z), \quad (15)$$

col sostituire alle m tutti i possibili sistemi di ν numeri interi, positivi, nulli o negativi.

Facendo variare z , varia il valore di Φ_0 , e dal secondo membro (15) fluiscce con continuità un ramo della funzione Φ per ogni particolare sistema di valori delle m .

Prendansi ν interi particolari $h_1, h_2, \dots, h_\nu$, e se ne formino tutte le $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \nu = \nu!$ permutazioni. Sostituendo successivamente ciascuna di queste permutazioni alla $m', m'', \dots, m^v$ nella formola (15), otterremo le espressioni di $\nu!$ rami della funzione Φ le cui differenze da Φ_0 sono i $\nu!$ rami di una funzione algebrica, cioè di una funzione che soddisfa un'equazione algebrica del grado $\nu!$ a coefficienti razionali in z . Come si ottiene quest'equazione?

Posto

$$\Phi(z) - \Phi_0(z) = u,$$

l'equazione si avrà eguagliando a zero il prodotto del fattor lineare

$$u - h_1 \frac{F(t', z)}{G'(t', z)} 2\pi i - \dots - h_\nu \frac{F(t^v, z)}{G'(t^v, z)} 2\pi i,$$

per tutti gli altri che ne provengono permutando i numeri h . Significheremo l'equazione colla scrittura

$$\Pi \left[u - h_1 \frac{F(t', z)}{G'(t', z)} 2\pi i - \dots - h_\nu \frac{F(t', z)}{G'(t', z)} 2\pi i \right] = 0. \quad (16)$$

Questo prodotto è simmetrico, oltre che razionale, in $t', t'', \dots, t^\nu$; epperò si può esprimere razionalmente nei coefficienti dell'equazione (14), che sono funzioni razionali di z .

Coteste equazioni algebriche (16) interessano sotto varii aspetti. Per lo studio della presente funzione Φ hanno fondamentale importanza. Qui, però, noi ci limitiamo a far vedere come esse permettano di concepire la costruzione di una superficie, a infinità di strati distesi sul piano z , che rappresenti nella solita maniera la funzione $\Phi(z)$.

Costruiremo questa superficie al modo stesso di quella del paragrafo precedente; però servendoci, non già dei semplici piani $\dots P_{-1}, P_0, P_1, \dots$, bensì delle superficie riemanniane corrispondenti alle singole equazioni (16); le quali equazioni, dipendendo dai ν interi arbitrarii $h_1, h_2, \dots, h_\nu$, sono in numero ∞^ν , mentre le analoghe del paragrafo precedente, delle quali non abbiamo neppur fatto cenno, cioè le

$$u - h \frac{1}{A} 2\pi i = 0,$$

sono in numero ∞^1 .

Seguitando a pensare con $h_1, h_2, \dots, h_\nu$ un fissato sistema di ν interi, immaginiamo distesa sul piano z una superficie riemanniana rappresentante l'equazione algebrica (16); ogni punto della quale porterà dunque una delle coppie (z, u) soddisfacenti l'equazione.

Ciò fatto, aggiungiamo in ciascun punto di essa superficie al valore di u quello di Φ_0 . La superficie così caricata rappresenta non più la funzione algebrica u , ma quei $\nu!$ rami della trascendente Φ che corrispondono alle $\nu!$ permutazioni dei numeri $h_1, h_2, \dots, h_\nu$ da sostituirsi alle $m', m'', \dots, m^\nu$ nella (15). Significheremo questa superficie analitica con

$$R(h_1, h_2, \dots, h_\nu) \text{ oppure } R_h.$$

I valori di $u + \Phi_0$ ossia di Φ , ond'è caricata, non si succedono dappertutto con continuità, come invece avveniva dei valori di u ; ma vi hanno nei singoli strati quelle linee di discontinuità o *coupures*, che il sig. HERMITE segnala per rispetto al ramo ch'egli prende in considerazione; il quale, nel caso di t_0 e t_1 reali, sarebbe il nostro (12) ove il cammino l fosse il rettilineo.

Infatti, comunque sia stato scelto il cammino l , vuolsi sempre riflettere col sig. HERMITE, che, l'integrale (12) non ha significato per quei valori di z pei quali riesca $G(t, z) = 0$ in qualche punto del cammino l .

Quali sono i punti di R_h dove giacciono siffatti valori di z ? Per ogni punto del piano t , l'equazione $G = 0$ determina tanti valori di z , ossia punti del piano z , quant'è il suo grado in z . Sia μ questo grado e sieno:

$$z', \quad z'', \dots, \quad z^\mu,$$

le radici dell'equazione. Esse sono funzioni di t , cioè sono i μ rami della funzione algebrica z di t definita dall'equazione $G(t, z) = 0$.

Se t parte dal punto t_0 del piano t e percorre il cammino l (fig. 1), le dette radici, raffigurate in punti del piano z , partiranno rispettivamente dai punti

$$a', \quad a'', \dots, \quad a^\mu, \text{ radici di } G(t_0, z) = 0,$$

e percorrendo rispettivamente μ linee

$$\sigma', \quad \sigma'', \dots, \quad \sigma^\mu, \tag{17}$$

giungeranno nei punti

$$b', \quad b'', \dots, \quad b^\mu, \text{ radici di } G(t_1, z) = 0.$$

Giova a chiarezza, e non scema, come si vedrà, la generalità della ricerca, il supporre, come noi qui vogliam fare (fig. 3), che ciascuna linea σ non intersechi se medesima nè alcuna delle altre (*).

Fig. 1 (sul piano t).

Fig. 3 (sul piano z).

In ciascun strato della R_h vi hanno le linee rispettivamente sovrapposte

(*) Per fissar le idee, ognuno può immaginare attuate momentaneamente queste supposizioni prendendo t_0 in modo che le radici $a', a'', \dots, a^\mu$ riescano diverse tra loro, e pigliando come cammino l una linea abbastanza corta.

alle $\sigma', \sigma'', \dots$ del piano z . È per i punti di tutte queste $\nu!$ linee che l'integrale (12) non ha significato. Perciò, noi riguarderemo queste linee come mancanti nella superficie analitica; ossia intenderemo, da qui innanzi, con R_h la superficie riemanniana, che abbiamo desunto dall'equazione algebrica (16), ma *tagliata lungo tutte le $\nu!$ linee suddette, e caricata delle coppie (z, Φ) nel modo su esposto.*

Come nel precedente paragrafo, osserveremo anche qui, che, in ogni punto prossimo quanto si sia ad un taglio, la definizione (12) assegna a $\Phi_0(z)$, e quindi anche a $\Phi = u + \Phi_0$, un valore perfettamente determinato, il quale tende a limite determinato col tendere del punto mobile ad un punto del taglio. I valori di Φ negli orli sinistro e destro di ciascun taglio riescono dunque affatto determinati.

Per riconoscere quali sieno questi valori, le cui differenze misurano le discontinuità, basta cercare quali sieno quelli di Φ_0 ; perocchè la funzione *algebrica* u , che va aggiunta a Φ_0 per formare Φ , non presenta, come dicemmo, discontinuità veruna. Le discontinuità della Φ sono puramente dovute e precisamente eguali a quelle di Φ_0 . Così che le discontinuità della Φ lungo i $\nu!$ tagli che stanno sopra una medesima σ sono eguali tra loro ed a quella che Φ_0 presenta per questa σ .

Per riconoscere come si comporti Φ_0 , ci riferiremo, per semplicità, al solo piano z , anzichè alla superficie rappresentativa della corrispondente equazione algebrica (16), che, essendo $h_1 = h_2 = \dots = h_\nu = 0$, riducesi a $\nu!$ piani separati.

Sieno dunque N e N' due punti del piano z tendenti ad un medesimo punto qualsivoglia ζ di una qualsisia fra le linee (17), che dirò σ . I valori di Φ_0 in N ed N' sono quelli espressi dagli integrali

$$\Phi_0(N) = \int_t \frac{F(t, N)}{G(t, N)} dt, \quad \Phi_0(N') = \int_t \frac{F(t, N')}{G(t, N')} dt,$$

nei quali, ben s'intende, N ed N' significano, non già i punti, ma i valori di z .

Per vedere che cosa avvenga di queste quantità $\Phi_0(N)$ e $\Phi_0(N')$ col tendere di N e N' a ζ , deformeremo il cammino d'integrazione per modo che gli integrali serbino significato anche quando N e N' raggiungano il limite ζ . I valori di questi integrali non cambiano, se si deforma il cammino senza fargli sorpassare punti del piano t ove si annulli il denominatore G . Noi dunque imagineremo, come nel paragrafo precedente (fig. 1), che pel primo integrale il cammino si deforma alcun poco verso destra, e pel secondo alcun poco verso sinistra; e scriveremo

$$\Phi_0(N) = \int_{\lambda} \frac{F(t, N)}{G(t, N)} dt, \quad \Phi_0(N') = \int_{\lambda'} \frac{F(t, N')}{G(t, N')} dt.$$

Da queste formole segue:

$$\lim \Phi_0(N) = \int_{\lambda} \frac{F(t, \zeta)}{G(t, \zeta)} dt, \quad \lim \Phi_0(N') = \int_{\lambda'} \frac{F(t, \zeta)}{G(t, \zeta)} dt. \quad (18)$$

Questi sono i valori di Φ_0 alla sinistra e alla destra di σ nel punto dove $z = \zeta$.

Questi valori non sono eguali tra loro. Infatti, la loro differenza equivale all'integrale unico

$$\int_{\lambda - \lambda'} \frac{F(t, \zeta)}{G(t, \zeta)} dt,$$

esteso a tutta la linea rientrante $\lambda - \lambda'$. Ora, questa linea può riguardarsi come il contorno, in direzione positiva, di una listerella di piano t contenente l , entro la quale il denominatore G non si annulla che nel punto di l corrispondente al punto ζ della linea σ . Sia θ il valore di t in quel punto. Esso è una radice dell'equazione $G(t, \zeta) = 0$, della quale tutte le altre radici sono rappresentate da punti del piano t situati fuori della listerella. Ciò è come dire, che, spezzando la funzione razionale di t

$$\frac{F(t, \zeta)}{G(t, \zeta)},$$

nelle sue frazioni semplici, la

$$\frac{F(\theta, \zeta)}{G'(\theta, \zeta)} \frac{1}{t - \theta},$$

è la sola fra queste frazioni che diviene infinita entro la listerella. Sarà dunque:

$$\int_{\lambda - \lambda'} \frac{F(t, \zeta)}{G(t, \zeta)} dt = \frac{F(\theta, \zeta)}{G'(\theta, \zeta)} \int \frac{dt}{t - \theta} = \frac{F(\theta, \zeta)}{G'(\theta, \zeta)} 2\pi i.$$

E quindi:

$$\lim \Phi_0(N) - \lim \Phi_0(N') = \frac{F(\theta, \zeta)}{G'(\theta, \zeta)} 2\pi i. \quad (19)$$

Questa è la formola a dimostrare e segnalare la quale è dedicata la parte generale, pag. 13-15, della porzione di lettera del sig. HERMITE, a cui il nostro lavoro si riferisce.

Questa formola, indicandoci di qual grandezza sia la discontinuità o differenza dei valori di Φ_0 , e quindi anche di Φ , tra ogni due punti di rimpetto negli orli destro e sinistro di ciascun taglio della R_h , ci fa subito trovare quali sieno tra le altre superficie R_m quelle che hanno gli orli caricati come gli orli della R_h , e che vanno quindi connesse colla R_h , lungo appunto gli orli che portano eguali successioni di coppie.

Prendiamo, poi, in considerazione tutti gli orli della $R(h_1, h_2, \dots)$ sovrastanti alla detta linea σ del piano z , cioè i $\nu!$ orli sinistri ed i $\nu!$ destri. I valori di Φ nei punti ξ di tutti questi orli sinistri saranno dati dalle $\nu!$ espressioni che risultano dal fare tutte le permutazioni dei numeri $h_1, h_2, \dots, h_\nu$ nella formola

$$h_1 \frac{F(\theta, \zeta)}{G'(\theta, \zeta)} 2\pi i + h_2 \frac{F(\theta'', \zeta)}{G'(\theta'', \zeta)} 2\pi i + \dots + h_r \frac{F(\theta^r, \zeta)}{G'(\theta^r, \zeta)} 2\pi i + \lim \Phi_0(N).$$

$$\frac{F(\theta, \zeta)}{G'(\theta, \zeta)} 2\pi i,$$
[illegible]

E similmente, considerando le superfici

[illegible]

Queste conclusioni, essendo σ una qualunque delle linee (17), devonsi intendere fatte tanto per i tagli sovrastanti a σ' , come per quelli sovrastanti a σ'' , a σ''' , ..., a σ^h .

Ecco dunque trovati i $2\mu \cdot \nu!$ orli che, essendo rispettivamente caricati delle stesse coppie (z, ϕ) che i $2\mu \cdot \nu!$ orli della $R(h_1, h_2, \dots, h_\nu)$, vanno connessi coi medesimi per costruire quella superficie, a infinità di strati insieme connessi, che diciamo *completa*, siccome rappresentativa di *tutto quanto il contenuto* della relazione

$$\phi - \int_{t_0}^{t_1} \frac{E'(t, z)}{E(t, z)} dt = 0,$$

cioè di tutte le soluzioni che la relazione ammette pigliando in considerazione ogni possibile cammino da t_0 a t_1 , nel piano t .

Nel sistema infinito delle $R(m', m'', \dots, m^\nu)$, che devonsi immaginare distese sul piano z per comporne la detta superficie, una particolare, quale immaginiamo che sia la $R(h_1, h_2, \dots, h_\nu)$, riuscirà in connessione immediata con tutte e sole le (20) e (21).

Riguardo a questa superficie completa sono a ripetersi le osservazioni fatte alla fine del paragrafo precedente per quella ivi costruita coi semplici strati P .

Ai tagli sono anche qui subentrate le linee di passaggio, da uno strato di una R ad uno strato di altra R .

Le estremità di queste linee, cioè i punti che stanno sopra ogni a ed ogni b del piano z , sono qui pure comuni ad una infinità di strati. Ma, nel caso $\nu = 1$ del paragrafo precedente, cravi sopra a , e parimenti sopra b , un solo punto di diramazione. Nel presente caso, invece, abbiamo $\nu!$ punti di diramazione sopra ciascuno dei medesimi. Perocchè, non avendo luogo, in generale, per $z = a$ o $z = b$ diramazione fra gli strati di una R , vi hanno in essa $\nu!$ distinti punti sopra ogni a e $\nu!$ distinti sopra ogni b . Nella infinità degli strati che diramansi intorno ad un medesimo punto ve n'ha uno ed uno solo di ogni R .

Oltre di questi $2\mu \cdot \nu!$ punti di diramazione non algebrica, vi hanno nella presente superficie completa quei punti di diramazione algebrica che ciascuna R separatamente possiede.

Infine vogliasi osservare che anche questa superficie analitica è indipendente dal particolare cammino l che da principio convenne immaginare di aver scelto.

(Continua.)