in der Werkstätte der Hrn. Mechaniker Bartels und Dietrich in Göttingen unter Beihülfe des Hrn. Dr. Meyerstein angefertigt. Der Preis eines Tangentenmultiplicators mit einfacher Nadel beträgt 100 M.; die Einrichtung zum Gebrauch eines astatischen Nadelpaares erhöht denselben auf 125 M.

V. Ueber das Gleichgewicht eines Systems ausgedehnter Molecüle und die Theorie der elastischen Nachwirkung; von E. Warburg.

Wilh. Weber, welcher die elastische Nachwirkung entdeckte, hat auch eine physikalische Vorstellung von der Ursache dieser Erscheinung gegeben und zwar rührt nach ihm dieselbe von einer Drehung der kleinsten Theile um ihre Schwerpunkte her.¹⁾

In der That, wenn man die elastische Nachwirkung dahin beschreiben kann, dass bei gleichbleibender Gestalt eines Körpers die Spannungen in demselben sich ändern, so scheint vom Standpunkte der Atomistik aus die Weber'sche Ansicht der einfache Ausdruck der Thatsachen zu sein; es ist daher nicht zu verwundern, dass dieselbe Ansicht auch von andern Physikern ausgesprochen worden ist.

Wären nun die Molecüle isotrope Kugeln, so könnten Drehungen derselben um ihre Schwerpunkte keinen Einfluss auf die Spannungen haben; deshalb kann man vom Standpunkte der Atomistik die elastische Nachwirkung als ein Phänomen betrachten, welches durch die Abweichung der Molecüle von der Kugelgestalt bedingt ist.

Das Studium des Gleichgewichts eines Systems beliebig gestalteter Molecüle schien mir daher ein physikalisches Interesse zu bieten und Gesichtspunkte für das ex-

1) Pogg. Ann. LIV. p. 9.

perimentelle Studium der elastischen Nachwirkung zu versprechen; soviel mir bekannt, ist dieser Gegenstand noch nicht bearbeitet worden. Eine auf denselben bezügliche Untersuchung habe ich in den Berichten der naturforschenden Gesellschaft zu Freiburg i. Br. veröffentlicht.¹⁾ Es hat sich dabei ergeben, dass die Theorie die elastische Nachwirkung, insbesondere auch die Beobachtungen des Hrn. Braun²⁾, qualitativ erklärt, sowie einige bisher noch nicht beobachtete Thatsachen voraussehen lässt.

Hr. Neesen hat auch eine auf atomistischen Hypothesen beruhende Theorie der Nachwirkung gegeben³⁾; der Unterschied der Neesen'schen Vorstellungen von den hier zu entwickelnden wird genügend bezeichnet durch die Angabe, dass bei Neesen die Gestalt der Moleküle keine Rolle spielt. — L. Boltzmann⁴⁾ hat eine nicht auf atomistischen Hypothesen beruhende Theorie der elastischen Nachwirkung aufgestellt, der Erfolg eines bestimmten Experimentes ist nach dieser Theorie zu berechnen und hat dieselbe für das experimentelle Studium der Nachwirkung sich als nützlich erwiesen; indessen liefert sie nicht das von Hrn. Braun beobachtete Phänomen.

Deshalb glaube ich, obgleich die von mir verfolgte Hypothese noch nicht soweit entwickelt ist, dass quantitative Bestimmungen aus derselben abzuleiten wären, dennoch die bisher gewonnenen Resultate mittheilen zu dürfen, wobei ich mich bezüglich der Beweise auf die genannte Abhandlung berufe.

Die Aufgabe, welche gestellt wird, ist folgende: Gegeben ist ein System beliebig gestalteter, gleicher, starrer Moleküle, deren Schwerpunkte im natürlichen Zustande gleichförmig angeordnet sind; ferner die Verschiebungen der

1) Ber. d. naturf. Ges. zu Freiburg i. Br. VII. Heft 2.

2) Pogg. Ann. CLIX. p. 337—98. Eine ähnliche Erklärung ist schon von Hrn. Braun am Schlusse seiner Arbeit angedeutet, aber nicht entwickelt worden.

3) Pogg. Ann. CLVII. p. 579 ff.

4) Pogg. Ann. Ergbd. VII. p. 624 ff. Wien. Ber. LXX.

Schwerpunkte für einen Zustand, der von dem natürlichen unendlich wenig verschieden ist. Es sollen erstens die zum Schwerpunkt relativen stabilen Gleichgewichtslagen der Molecüle für diesen Zustand gefunden werden; zweitens sollen die Spannungen für den Fall, dass die Molecüle in ihren stabilen Gleichgewichtslagen ruhen, berechnet und verglichen werden mit den Spannungen für den Fall, dass bezüglich der Einstellung der Molecüle an jeder Stelle keine Richtung des Raumes bevorzugt ist.

Diese Aufgabe wird gelöst unter der Annahme, dass die linearen Dimensionen d der Molecüle unendlich klein sind gegen den Abstand r ihrer Schwerpunkte. Die Lösung beruht gänzlich auf der Entwicklung des Potentials des Systems in Bezug auf ein beliebiges seiner Molecüle.

§. 1. Um diese Grösse zu bilden, wird zuerst im §. 1 das Potential U zweier Molecüle 1 und 2 aufeinander entwickelt. $f(r)$ wird das Potential der Masseneinheit in Bezug auf die Masseneinheit genannt, beide Einheiten je in Punkten vom Abstand r concentrirt gedacht; über die Function f wird nur vorausgesetzt, dass $r \cdot f'(r)$, $r^2 \cdot f''(r)$, $r^3 \cdot f'''(r)$ nicht sehr gross sind gegen $f(r)$; das Vorzeichen des Potentials wird so genommen, dass dessen Abnahme die von den wirkenden Kräften geleistete Arbeit angibt. Das Potential von 1 auf 2 hängt ab von dem Abstand der Schwerpunkte und der Lage der Hauptträgheitsachsen der beiden Molecüle gegen die Verbindungslinie ihrer Schwerpunkte. Man findet denjenigen Theil desselben, welcher von der Richtung der Hauptträgheitsachsen von 1 gegen die Verbindungslinie der Schwerpunkte abhängt, unabhängig von der Richtung der Hauptträgheitsachsen von 2; daraus ergibt sich, dass die Gleichgewichtslage von 1 relativ zum Schwerpunkte von 1 unabhängig ist von der Lage von 2 relativ zum Schwerpunkte von 2; dieses Verhalten, welches daher rührt, dass $\frac{d}{r}$ unendlich klein gegen die Einheit ist, trägt wesentlich zur Erleichterung der weiteren Untersuchung bei.

§. 2. Zu der Entwicklung des Potentials W des ganzen Systems in Bezug auf eines seiner Molecüle 1, der Aufgabe des §. 2, ist Folgendes zu bemerken.

In der Theorie ruhender Molecüle von Poisson und Cauchy muss man sich bekanntlich, um das Gleichgewicht im natürlichen Zustande zu erhalten, die Molecularkräfte bei gewissen Entfernungen anziehend, bei anderen abstossend denken. Nach den Ansichten der mechanischen Wärmetheorie kann man sich die Molecularkräfte durchweg anziehend vorstellen; am Zusammenfallen wird das System gehindert durch die Stösse der Molecüle gegen einander, welche Stösse man sich alsdann ersetzt denken muss durch abstossende Kräfte, die in den Schwerpunkten der Molecüle angreifen, da die Stösse wegen ihrer Unregelmässigkeit eine bestimmte Richtung der Molecüle relativ zu ihren Schwerpunkten nicht hervorzubringen streben.

Wenn man daher mit ruhenden Molecülen rechnen will, so muss man dem im §. 1 gefundenen Potential U das Potential jener Ersatzkraft, welches $m_1 m_2 \cdot \varphi(r)$ sei, hinzufügen, um das Potential U_S von 2 auf 1 in dem System zu erhalten; daher:

$$(1) \quad U_S = U + m_1 m_2 \cdot \varphi(r).$$

Diese Betrachtung soll darauf hinweisen, dass die mit $f(r)$ bezeichnete Function nicht diejenige ist, von welcher der von der Richtung der Molecüle unabhängige Theil der Spannungen abhängt.

Es wird nun zur Lösung der gestellten Aufgabe nur erforderlich sein, denjenigen Theil W_1 von W zu bilden, welcher von der Richtung der Hauptträgheitsachsen von 1 abhängt; dieser ist gänzlich unabhängig von $\varphi(r)$.

Die Deformation, welche das System erfahren hat, wird in gewöhnlicher Weise ausgedrückt, indem man dasselbe auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem x, y, z bezieht, x, y, z die Coordinaten des Schwerpunktes eines Molecüls im natürlichen Zustande nennt, $x + u, y + v,$

$z + v$ dieselben Grössen nach der Deformation; wir setzen $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x, \frac{\partial u}{\partial y} = u_y$ etc.

Die Richtung eines Molecüls relativ zu seinem Schwerpunkte wird festgelegt durch die 9 Richtungscosinus $a, a', a''; b, b', b''; c, c', c''$ der Hauptträgheitsachsen desselben, welche A, B, C genannt werden, gegen die Koordinatenachsen.

Sei ferner m die Masse eines Molecüls, α, β, γ seien die Coordinaten eines Massenelementes dm in Bezug auf ein durch den Schwerpunkt des Molecüls gelegtes Coordinatensystem, dessen Axen die Hauptträgheitsachsen A, B, C sind, so werde:

$$(2) \int \alpha^2 dm = \kappa^2 \cdot m, \quad \int \beta^2 dm = \lambda^2 \cdot m, \quad \int \gamma^2 dm = \mu^2 \cdot m,$$

gesetzt, wobei die Integrale über die Masse m zu erstrecken sind.

Bei diesen Bezeichnungen findet man nach den Methoden von Poisson und Cauchy für ein Molecül 1, dessen Wirkungssphäre ganz im Innern des Systems liegt, wenn man setzt:

$$(3) \begin{cases} N_0 = (k' - 2k)(\kappa^2 + \lambda^2 + \mu^2) \\ N = 2(3k + k')(\alpha^2 \kappa^2 + \beta^2 \lambda^2 + \gamma^2 \mu^2) \\ N' = 2(3k + k')(\alpha'^2 \kappa^2 + \beta'^2 \lambda^2 + \gamma'^2 \mu^2) \\ N'' = 2(3k + k')(\alpha''^2 \kappa^2 + \beta''^2 \lambda^2 + \gamma''^2 \mu^2) \\ T = 2(3k + k')(\alpha \alpha' \kappa^2 + \beta \beta' \lambda^2 + \gamma \gamma' \mu^2) \\ T' = 2(3k + k')(\alpha \alpha'' \kappa^2 + \beta \beta'' \lambda^2 + \gamma \gamma'' \mu^2) \\ T'' = 2(3k + k')(\alpha'' \alpha \kappa^2 + \beta'' \beta \lambda^2 + \gamma'' \gamma \mu^2) \end{cases}$$

$$(4) \quad W_1 = k_0(\kappa^2 + \lambda^2 + \mu^2) + N_0(u_x + v_y + w_z)' + N \cdot u_x + N' \cdot v_y + N'' \cdot w_z + T(u_y + v_x) + T'(v_z + w_y) + T''(w_x + u_z).$$

k und k' sind Constanten, welche von der Beschaffenheit des Systems im natürlichen Zustande abhängen; $k_0 = 5k$. Das Vorzeichen der Constanten $2(3k + k')$ hängt von der Beschaffenheit der Function f ab; um eine bestimmte Vorstellung zu haben, wollen wir annehmen, dass diese Grösse in sich negativ sei und daher:

$$(5) \quad 2(3k + k') = -f^2$$

setzen. Ferner wollen wir immer voraussetzen:

$$(6) \quad \kappa^2 > \lambda^2 > \mu^2.$$

Die 9 Grössen a, a' etc., von welchen die Werthe N, N', N'', T, T', T'' abhängen, enthalten bekanntlich 3 unabhängige Variable und jedes Werthsystem dieser, das W_1 zu einem Minimum macht, entspricht einer stabilen Gleichgewichtslage.

Aus den Formeln (3) und (4) ergibt sich zunächst als allgemeine Consequenz, dass in den Gleichgewichtslagen der Moleküle deren Hauptträgheitsachsen die Richtungen der Hauptaxen des Elasticitätsellipsoids haben.¹⁾

Wir heben ferner hervor, dass, wie die Formeln unmittelbar zeigen, die Gleichgewichtslage der Moleküle relativ zu ihren Schwerpunkten nicht von dem absoluten Werthe der Zahlen u_x, u_y etc., sondern nur von deren Verhältniss abhängt; so ist sie z. B. bei der Torsion unabhängig vom Torsionswinkel. Dagegen ist das Drehungsmoment, welches ein aus der Gleichgewichtslage herausgedrehtes Molekül in diese zurückzuführen sucht, der Grösse der Deformation direct proportional. Dies ergibt sich aus (4) wenn man beachtet, dass $-\frac{\partial W_1}{\partial p}, -\frac{\partial W_1}{\partial q}, -\frac{\partial W_1}{\partial r}$ die Componenten des genannten Drehungsmomentes nach den Axen A, B, C sind, wobei p, q, r Drehungen um diese Axen bedeuten.

Was nun specielle Fälle betrifft, so sieht man zunächst, dass sowohl für den natürlichen Zustand ($u = v = w = 0$) als für den Zustand einer gleichförmigen Com-

1) Diesen Satz hatte ich in der früheren Arbeit nicht bemerkt. Um ihn zu beweisen, nenne man p, q, r Drehungen um die Axen A, B, C ; dann sind die ersten Bedingungen eines Maximums oder Minimums von W_1 : $\frac{\partial W_1}{\partial p} = 0, \frac{\partial W_1}{\partial q} = 0, \frac{\partial W_1}{\partial r} = 0$. Stellt man diese Gleichungen auf und wählt die Axen des Elasticitätsellipsoids zu Coordinatenachsen, so erhält man leicht den im Texte ausgesprochenen Satz.

pression ($u_x = v_y = w_z$; $u_y = v_x = w_x = u_z = v_z = w_y = 0$) W_1 in Bezug auf die Grössen a, b, c constant wird, also in diesen beiden Fällen das Gleichgewicht der Molecüle relativ zu ihren Schwerpunkten ein indifferentes ist. In dem folgenden Paragraphen werden die stabilen Gleichgewichtslagen für den Fall der Torsion und Dehnung eines Drahtes von kreisförmigem Querschnitt ausgerechnet und die Resultate sind folgende.

§. 3. Torsion. Es gibt nur eine stabile Gleichgewichtslage. Bei dieser fällt die B -Axe in den Radius vector des Punktes, den man betrachtet, während die beiden andern Hauptträgheitsaxen Winkel von 45° mit der Drahtaxe bilden. Um die Lage der Axen A und C vollständig zu beschreiben, denken wir unser Auge im freien Ende in der Axe des Drahtes und betrachten einen Punkt P eines Drahtquerschnittes, dessen Mittelpunkt O sei. Die B -Axe im Punkte P hat die Richtung des Radius vector OP . Ist der Sinn der Torsion der positive, so erscheint uns der Querschnitt gedreht in einem Sinne entgegengesetzt der Drehung des Uhrzeigers bei uns zugekehrtem Zifferblatt; blicken wir nun die an unserem Auge vorüberlaufenden Theile C_1 und A_1 der Axen C und A an, so ist die Drehung, durch welche C_1 auf dem kürzesten Wege in A_1 übergeführt wird, auch dem Laufe des Uhrzeigers entgegengesetzt.

Wir setzen noch die Componenten des Drehungsmomentes nach den Axen C, A, B hierher, welches ein aus seiner Gleichgewichtslage herausgedrehtes Molecül in dieselbe zurückzuführen strebt. Dieselben sind für ein Molecül, dessen Schwerpunkt von der y -Axe getroffen wird (indem die z -Axe in die Richtung der Drahtaxe vom befestigten nach dem freien Ende hin gelegt wird):

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial W_1}{\partial r} = \frac{q\vartheta}{l} \cdot f^2 (\lambda^2 - \mu^2) (a''b + b''a) \\ \frac{\partial W_1}{\partial p} = \frac{q\vartheta}{l} \cdot f^2 (\lambda^2 - \mu^2) (b''c + c''b) \\ \frac{\partial W_1}{\partial q} = \frac{q\vartheta}{l} \cdot f^2 (\mu^2 - \lambda^2) (c''a + a''c) \end{cases}$$

Hier ist l die Länge des Drahtes, ϑ der Torsionswinkel, ρ der Radius vector des betrachteten Punktes.

Dehnung und Compression. Bei der Dehnung ist ein Molecül bezüglich einer Drehung um die Axen B und A dann und nur dann im stabilen Gleichgewicht, wenn die A -Axe die Richtung der Drahtaxe hat; bezüglich einer Drehung um die A -Axe ist dabei das Gleichgewicht ein indifferentes. Bei der Compression tritt die C -Axe an die Stelle der A -Axe.

Derselbe Ausdruck W_1 nun, welcher die stabile Gleichgewichtslage der Molecüle kennen lehrt, dient zur Lösung des zweiten Theiles der Aufgabe, nämlich zur Ermittlung der Spannungen oder Druckcomponenten; diese Aufgabe wird im §. 4. allgemein behandelt.

§. 4. Ist W das Potential des Systems bezüglich eines Molecüls, dessen Wirkungssphäre ganz im Innern des Systems liegt, so sind die Druckcomponenten an dessen Stelle, wenn n die Zahl der Molecüle in der Raumeinheit bedeutet:

$$(8) \quad X_x = - \frac{\partial W}{\partial u_x} \cdot \frac{n}{2} \quad X_y = - \frac{\partial W}{\partial u_y} \cdot \frac{n}{2} \text{ etc.}^1)$$

Wir haben es hier nur zu thun mit demjenigen Theile der Druckcomponenten, welcher abhängt von der Richtung der Molecüle. Für diesen Theil kommt nur der von der Richtung der Molecüle abhängige Theil des Potentials W in Betracht. Wir wollen diesen Theil von W durch $\mathfrak{B}$ bezeichnen und die entsprechenden Theile der Druckcomponenten durch $\mathfrak{X}_x$, $\mathfrak{X}_y$ etc. Dann ist:

$$(9) \quad \mathfrak{X}_x = - \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial u_x} \cdot \frac{n}{2} \quad \mathfrak{X}_y = - \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial u_y} \cdot \frac{n}{2} \text{ etc.}$$

Unter der Voraussetzung, dass innerhalb der Wirkungssphäre der Molecularkräfte die Richtung der Mole-

1) S. C. Neumann, Crelle's Journal 57, p. 293.

Die Grössen X_x , X_y etc. brauche ich in der Bedeutung, welche Kirchhoff ihnen in seinen Vorlesungen beilegt.

cüle sich nicht merklich ändert, folgt aus dem Werthe von U sogleich, dass man hat:

$$(10) \quad \mathfrak{B} = 2W_1,$$

wo W_1 die §. 2 angegebene Bedeutung und den in Gleichung (4) angegebenen Werth hat.

Auf diesen Fall lässt sich auch derjenige zurückführen, in welchem an jeder Stelle die Hauptträgheitsaxen nach allen Richtungen des Raumes gleichmässig vertheilt liegen. In Fällen, in welchen die Molecüle in ihren stabilen Gleichgewichtslagen ruhend gedacht werden, kommen aber Stellen des Körpers vor, an welchen innerhalb der Wirkungssphäre die Richtung der Molecüle sich erheblich ändert; solche Stellen sind z. B. in dem Falle der Torsion nach §. 3 die der Drahtaxe nahen. Wir gehen hier auf die Betrachtung solcher singulären Stellen nicht ein. Nimmt man an, dass an solchen Stellen die Druckcomponenten $\mathfrak{X}_x$ etc. von derselben Ordnung sind, wie an den anderen, und dass sich eine Länge angeben lässt, welche sehr gross ist gegen den Radius der Wirkungssphäre und sehr klein gegen den Radius des Drahtes, so kann man bei einem solchen Drahte die singulären Stellen vernachlässigen. Ferner gilt für Punkte, welche der Oberfläche des Körpers so nahe sind, dass ihre Wirkungssphäre zum Theil ausserhalb des Körpers fällt, weder Gleichung (4) noch Gleichung (10). Auch mit solchen Stellen beschäftigen wir uns hier nicht; dieselben würden zu berücksichtigen sein, wenn man in der Theorie der Capillarität fester Körper die Ausdehnung der Molecüle berücksichtigen wollte.

Für Stellen, an welchen die Gleichung (10) besteht, hat man nach Gleichung (4):

$$(11) \quad \begin{cases} \mathfrak{X}_x = -n.(N + N_0) & \mathfrak{X}_y = -n.T & \mathfrak{Y}_z = -n.T' \\ \mathfrak{Y}_y = -n.(N' + N_0) & \mathfrak{Z}_x = -n.T'' \\ \mathfrak{Z}_z = -n.(N'' + N_0) \end{cases}$$

Diese Werthe sind unabhängig von u_x , u_y etc., da wir $\mathfrak{B}$ nur bis auf Grössen 1. Ordnung bezüglich jener Zahlen entwickelt haben. Sie gelten daher insbesondere für

einen Zustand des Systems, in welchem die Schwerpunkte der Molecüle ihre natürliche Lage einnehmen, aber die Axen in bestimmter Weise gerichtet sind und innerhalb der Wirkungssphäre diese Richtung sich nicht merklich ändert. Man kann sich übrigens leicht überzeugen, dass die Werthe der Gleichungen (11) auch nach der von Cauchy bei seiner Untersuchung eines Systems materieller Punkte befolgten Methode¹⁾ erhalten werden; man geht dabei aus von der Kraft, mit welcher zwei gleiche gleich gerichtete Molecüle aufeinander wirken, und deren Componenten nach den Coordinatenaxen aus dem Werth U §. 1 zu berechnen sind.

Wir wollen noch die Werthe $\bar{x}_n$ etc. bestimmen für ein System, in welchem die Axen A, B, C an jeder Stelle nach allen möglichen Richtungen in gleicher Weise vertheilt sind, und jene Werthe für diesen Fall durch $\bar{x}_n^0$ etc. bezeichnen. Wir können dieses System auffassen als eine Uebereinanderlagerung unendlich vieler Systeme, von denen jedes eine unendlich kleine Dichtigkeit hat und in deren jedem alle Molecüle gleich gerichtet sind. Durch diese Betrachtungsweise findet man:

$$(12) \quad \begin{cases} \bar{x}_x^0 = -n \cdot N_0 + 2f^2 \cdot \frac{n}{8} (x^2 + y^2 + z^2) = \bar{y}_y^0 = \bar{z}_z^0 \\ \bar{x}_y^0 = \bar{y}_x^0 = \bar{x}_z^0 = \bar{z}_x^0 = 0. \end{cases}$$

Unter der Voraussetzung, dass die Gleichung (10) überall besteht, lässt sich folgender Satz beweisen:

Wenn ein elastischer Körper unter dem Einfluss von Kräften, die auf seine Oberfläche wirken, eine gegebene Formänderung erleidet, so ist die dabei von diesen Kräften geleistete Arbeit ein Minimum, wenn während der Formveränderung die zu ihren Schwerpunkten relative Lage der Molecüle die dieser Formveränderung entsprechende stabile Gleichgewichtslage ist.

Für die Auffassung dieses Satzes ist es wesentlich zu bemerken, dass die stabile Gleichgewichtslage von der absoluten Grösse der Werthe u_n, v_n etc. unabhängig ist

¹⁾ Exercices de mathématiques. III année. Paris 1828. p. 218.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. IV.

und nur von deren Verhältniss abhängt. Die stabile Gleichgewichtslage der Molecüle ist also schon eine bestimmte, wenn ein unendlich kleiner Theil der Formveränderung stattgefunden hat, und ändert sich nicht in deren Verlauf, indem wir uns nämlich vorstellen, dass das Verhältniss der Grössen u_x, u_y etc. während des ganzen Vorganges das nämliche bleibt.

Rücksichtlich des Beweises wird auf die ausführliche Abhandlung verwiesen.

Die vorstehenden Entwicklungen werden nun im §. 5 angewandt auf den Fall der Torsion und Dehnung.

§. 5. Torsion. Nehmen wir an, ein Draht von kreisförmigem Querschnitt werde tordirt und stellen uns weiter vor, die Molecüle befänden sich relativ zu ihren Schwerpunkten in ihren stabilen Gleichgewichtslagen, so wollen wir berechnen, welche Kräfte auf die Oberfläche des Drahtes wirken müssen, damit der beschriebene Zustand ein Gleichgewichtszustand sei.

Aus dem von der Richtung der Molecüle unabhängigen Theil von W ergibt sich bekanntlich ein auf den unteren Drahtquerschnitt wirkendes Drehungsmoment:

$$(13) \quad \Delta = \frac{\phi \cdot R^4}{l} \cdot \frac{\pi s}{2},$$

wo R der Radius des Drahtes und s eine Constante ist. Dazu kommen nun die von $\mathfrak{B}$ herrührenden Kräfte, welche mittelst der Gleichungen (3) und (11) berechnet werden, indem die Werthe der a, b, c aus der Untersuchung des §. 3 bekannt sind.

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Diese Kräfte ergeben nach bekannten Methoden} \\ \text{1) für die Mantelfläche die constante Druckkraft} \\ \quad P_1 = n(2\lambda^2 f^2 - N_0) \\ \text{in der Richtung der innern Normale.} \\ \text{2) für die Endfläche die constante Druckkraft} \\ \quad P_2 = n[f^2(x^2 + \mu^2) - N_0] \\ \text{in der Richtung der innern Normale und das Dre-} \\ \text{hungsmoment:} \\ \quad \Delta' = -n \cdot f^2(x^2 - \mu^2) \cdot \frac{2\pi R^3}{3} \end{array} \right.$$

Es ist nun von Wichtigkeit, zu bemerken, dass A' und A entgegengesetztes Vorzeichen haben; es ist dies nicht etwa eine Folge davon, dass wir in Gleichung (5) die Annahme gemacht haben:

$$2(3k + k') = -f^2 < 0,$$

denn hätten wir $2(3k + k') = +f^2 > 0$ gesetzt, so wäre die stabile Gleichgewichtslage eine andere geworden, und zwar wäre die C -Axe an die Stelle der A -Axe getreten und umgekehrt; wären wir daher von dieser Annahme ausgegangen, so hätten wir erhalten:

$$(14a) \quad A' = n \cdot f^2 (\mu^2 - \kappa^2) \cdot \frac{2\pi R^3}{3},$$

was mit dem Werth (14) übereinstimmt.

Für die Anwendung der Theorie ist es vornehmlich von Interesse, die Druckkräfte für die stabile Gleichgewichtslage der Molecüle zu vergleichen mit den Druckkräften, welche bei gleichförmiger Vertheilung der Axen A, B, C nach allen Richtungen des Raumes stattfinden. Für diesen Fall ergibt (12) einen Druck in der Richtung der inneren Normale:

$$(15) \quad P^0 = n \cdot \left(2f^2 \cdot \frac{\kappa^2 + \lambda^2 + \mu^2}{3} - N_0 \right).$$

Stellen wir uns nun vor, ein Draht werde tordirt und nehmen an, die Molecüle gingen aus ihrer natürlichen Lage in die der Torsion entsprechende stabile Gleichgewichtslage über, so fragt es sich, welche Druckkräfte man den schon vorhandenen hinzufügen muss, um den Draht im Gleichgewicht zu erhalten. Nach Gleichung (14) und (15) muss man hinzufügen:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{auf der Mantelfläche den Druck in der Richtung} \\ \text{der inneren Normale:} \\ \quad P_1 - P^0 = \frac{2nf^2}{3} \left((\lambda^2 - \mu^2) - (\kappa^2 - \lambda^2) \right) \\ \text{auf der Endfläche den Druck:} \\ \quad P_2 - P^0 = -\frac{2nf^2}{3} \left((\lambda^2 - \mu^2) - (\kappa^2 - \lambda^2) \right) \end{array} \right.$$

$$(16) \left\{ \begin{array}{l} \text{und das Drehungsmoment:} \\ \mathcal{A}' = - \frac{2n \cdot f^2}{3} (\kappa^2 - \mu^2) \cdot \pi R^3. \end{array} \right.$$

Das Drehungsmoment, welches den Draht tordiert erhält, muss also nachlassen, wenn der Draht in seiner Lage verharren soll. Wird der Sinn der Torsion umgekehrt, so wechselt $\mathcal{A}'$ das Zeichen, während $P_1 - P^0$ und $P_2 - P^0$ ungeändert bleiben.

Während das Vorzeichen von $\mathcal{A}'$ immer dem Zeichen der Torsion entgegengesetzt ist, hängt das Vorzeichen von $P_1 - P^0$ und $P_2 - P^0$ von der Gestalt der Molecüle ab. Wären z. B. diese abgeplattete Rotationsellipsoide ($\lambda^2 = \kappa^2$), so wäre $P_1 - P^0$ positiv, wären sie verlängerte Rotationsellipsoide ($\lambda^2 = \mu^2$), so wäre $P_1 - P^0$ negativ.

Dehnung. Ein Draht von kreisförmigem Querschnitt werde gedehnt; die Molecüle sollen sich dabei in den dieser Deformation entsprechenden stabilen Gleichgewichtslagen befinden; wir suchen die Drucke, welche auf die Oberfläche wirken müssen, damit der beschriebene Zustand des Drahtes ein Gleichgewichtszustand sei.

Nach §. 3 ist ein Molecül bezüglich einer Drehung um die Axen B und C im stabilen Gleichgewicht, wenn seine A -Axe nach der Stabaxe gerichtet ist, dabei ist bezüglich einer Drehung um die A -Axe das Gleichgewicht ein indifferentes; wir nehmen daher an, dass die B - und C -Axen in dem Querschnitt an jeder Stelle desselben nach allen Richtungen gleichmässig vertheilt sind. Unter dieser Annahme findet man für die Mantelfläche den Druck in der Richtung der inneren Normale:

$$P_1 = n \cdot \left(2f^2 \cdot \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2} - N_0 \right),$$

für die freie Endfläche den Druck in der Richtung der inneren Normale:

$$P_2 = n(N_0 - 2f^2 \kappa^2),$$

daher, indem P^0 in derselben Bedeutung wie vorhin, Gleichung (15), gebraucht wird:

$$(17) \left\{ \begin{array}{l} \text{für die Mantelfläche den nach innen gerichteten} \\ \text{Normaldruck:} \\ P_1 - P^0 = -\frac{n \cdot f^2}{4} \cdot ((x^2 - \lambda^2) + (x^2 - \mu^2)) \\ \text{für die Endfläche:} \\ P_2 - P^0 = \frac{2n \cdot f^2}{8} \cdot ((x^2 - \lambda^2) + (x^2 - \mu^2)). \end{array} \right.$$

$P_1 - P^0$ ist nothwendig negativ, $P_2 - P^0$ aber positiv. Gehen daher bei der Dehnung die Molecüle aus ihrer natürlichen in die stabile Gleichgewichtslage über, so muss dabei, wenn die Deformation bestehen bleiben soll, die Zugkraft, welche auf die Endfläche wirkt, nachlassen, auf der Mantelfläche aber eine Kraft angebracht werden, welche den Stab hindert, sich weiter in die Quere zu contrahiren.

Bei der Compression stellt sich die *C-Axe* in die Stabaxe, die Lage der *A-* und *B-Axe* im Querschnitt bleibt unbestimmt und wir erhalten daher die entsprechenden Werthe von $P_1 - P^0$ und $P_2 - P^0$, indem wir μ^2 an die Stelle von x^2 treten lassen, daher für die

Compression:

$$(18) \left\{ \begin{array}{l} \text{Mantelfläche } P_1 - P^0 = +\frac{n \cdot f^2}{8} ((\lambda^2 - \mu^2) + (x^2 - \mu^2)), \\ \text{freie Endfläche } P_2 - P^0 = -\frac{2n \cdot f^2}{8} ((\lambda^2 - \mu^2) + (x^2 - \mu^2)). \end{array} \right.$$

Es ist hier $P_1 - P^0$ positiv, $P_2 - P^0$ negativ. Soll daher der comprimirte Stab bei dem Uebergang der Molecüle aus ihrer natürlichen Lage in ihre stabile Gleichgewichtslage seine Gestalt nicht ändern, so muss die Druckkraft auf der Endfläche nachlassen, auf die Mantelfläche aber eine Druckkraft wirken, welche den Stab hindert, sich weiter in die Quere zu dilatiren. Dabei ist bemerkenswerth, dass, wenn nicht gerade $\lambda^2 - \mu^2 = x^2 - \lambda^2$, der Werth, um den bei der Dehnung die Zugkraft nachlassen muss, verschieden ist von dem Werth, um den bei der Compression die Druckkraft nachlassen muss.

Zum Schluss füge ich einige Worte darüber hinzu, wie ich mir auf Grund der erhaltenen Resultate die elastische Nachwirkung vorstelle. Ich gehe dabei aus von den Anschauungen der mechanischen Wärmetheorie, nach welcher die Molecüle der Körper sich in lebhafter Bewegung befinden, welche Bewegung theils besteht in Translationsbewegungen der Schwerpunkte der Molecüle, theils in Bewegungen der Molecüle relativ zu ihren Schwerpunkten. Trotz der unregelmässigen Bewegung, in welcher die Molecüle begriffen sind, kann man doch von einer mittleren Anordnung derselben reden, indem man darunter diejenigen Lagen versteht, von welchen sich die Molecüle während einer hinreichend langen Zeit ebenso weit in dem einen wie in dem anderen Sinne entfernen. Unter der Anordnung der Molecüle sei im folgenden immer diese mittlere Anordnung verstanden, unter den Axen der Molecüle ihre Hauptträgheitsaxen.

Im natürlichen Zustand eines isotropen Körpers sind die Schwerpunkte der Molecüle nach allen Richtungen hin gleichförmig angeordnet und ist daher keine Directions-kraft vorhanden, welche die Axen eines Molecüls in bestimmter Weise einzustellen suchte (§. 2). Daher nehme ich an, dass im natürlichen Zustand die Axen der Molecüle an jeder Stelle des Körpers unregelmässig und so liegen, dass keine Richtung im Raum vor einer anderen ausgezeichnet ist. Stellen wir uns nun vor, ein solcher Körper werde deformirt, z. B. ein elastischer Draht tordirt, dann wirkt auf jedes Molecül in der mittleren Anordnung des Systems ein Drehungsmoment, welches die Axen des Molecüls in eine bestimmte Lage einzustellen sucht, und dieses Drehungsmoment ist bei gleicher Position relativ zur stabilen Gleichgewichtslage proportional der Grösse des Torsionswinkels (§. 2). Es wird infolge dessen die zum Schwerpunkt relative Bewegung des Molecüls vermehrt werden um einen Betrag, welcher wächst mit der Grösse der Torsion. Ich nehme nun an, dass das Wärmegleichgewicht für eine bestimmte Temperatur eine be-

stimmte mittlere lebendige Kraft der zum Schwerpunkte relativen Bewegung erfordert; daher wird durch das Hinzutreten des genannten Betrages das Wärmegleichgewicht gestört werden und seine Herstellung eine Verkleinerung der Excursionen des Molecüls von seiner stabilen Gleichgewichtslage erfordern; es werden daher die Molecüle ihren stabilen Gleichgewichtslagen genähert werden, und zwar um so weiter, je grösser die Torsion; denn um so grösser das Drehungsmoment, um so kleiner muss bei gleicher lebendiger Kraft die Schwingungsamplitude werden.

Die Herstellung des Wärmegleichgewichts wird vermittelt durch die Wirkung (Stösse) der Molecüle auf einander, und es wird eine gewisse Zeit dauern, bis dasselbe eingetreten ist.

Wird daher ein Draht tordirt und auf einem bestimmten Torsionswinkel erhalten, so nähern sich mit der Zeit die Molecüle bis auf einen gewissen Grad ihren stabilen Gleichgewichtslagen; dabei aber nimmt das Torsionsmoment ab, welches den Draht in seiner abgelenkten Lage zu erhalten nöthig ist (§. 5).

Führt man weiter, nachdem dies geschehen ist, den Draht in seine ursprüngliche Lage zurück, so sind die Molecüle noch in bestimmter Weise eingestellt und diese Einstellung verliert sich erst allmählich. So lange aber jene Einstellung besteht, muss auf den Draht, wenn er in seiner natürlichen Lage festgehalten werden soll, ein Drehungsmoment wirken, dessen Sinn dem Sinne der Torsion, die früher bestand, entgegengesetzt ist (§. 5); dieses Drehungsmoment verliert sich in dem Masse, als die Molecüle ihrer natürlichen unregelmässigen Lage wieder sich zu bewegen.¹⁾

1) Es mag erinnert werden, dass das Drehungsmoment, welches ein Molecül in seine stabile Gleichgewichtslage einzustellen sucht, nach Gleichung (7) dem Radius vector des betreffenden Molecüls proportional ist, also gegen den Rand hin wächst; es kann dadurch unter Umständen ein etwas complicirtes Verhalten bei der Torsionsnachwirkung eintreten.

Es muss daher ein System, wie wir es betrachtet haben, Phänomene zeigen, welche der elastischen Nachwirkung entsprechen.

Um noch eine Anwendung auf die Braun'schen Versuche¹⁾ zu machen, nehmen wir an, ein Draht, welcher eine Zeit lang tordirt erhalten war, werde sich selbst überlassen, nachdem die Schwingungen, die er etwa ausführt, beruhigt sind; er wird dann, wenn kein Drehungsmoment auf ihn wirkt, etwas tordirt bleiben, indem die Molecüle ihren §. 3 berechneten stabilen Gleichgewichtslagen noch genähert sind, und erst in dem Masse, als diese Richtung der Molecüle sich verliert, in seine ursprüngliche Lage zurückkehren. Lässt man nun, während dieser Process vor sich geht, eine dehnende Kraft wirken, so streben die Molecüle den §. 3 für die Dehnung gefundenen stabilen Gleichgewichtslagen zu, für welche das Torsionsmoment Null ist (§. 5); daher wird durch die Dehnung die Torsionsnachwirkung abnehmen. Es werden daher Phänomene eintreten, wie sie Hr. Braun beobachtet hat.

Noch sei erwähnt, dass nach der entwickelten Theorie ein Draht sich bei der Torsionsnachwirkung je nach der Gestalt der Molecüle in die Quere zusammenziehen oder ausdehnen muss (§. 5); sowie, dass die Nachwirkung bei der Dehnung im Allgemeinen von der bei der Compression eintretenden verschieden sein muss (§. 5); Beobachtungen darüber sind mir nicht bekannt.

Zu einer eingehenden Vergleichung mit der Erfahrung sind die entwickelten Vorstellungen deshalb noch nicht reif, weil der Erfolg eines bestimmten Versuchs sich noch nicht quantitativ berechnen lässt. Ich füge nur noch hinzu, dass nach den vorstehenden Entwicklungen bei einem System ausgedehnter Molecüle eine jede Deformation, wenn sie nicht eine gleichförmige Compression oder Ausdehnung ist, nothwendig begleitet ist von einer Erzeugung von Bewegung der Molecüle relativ zu ihren Schwerpunkten,

1) Pogg. Ann. CLIX. p. 337—93.

d. h. von einer Wärmeproduction, also von einem entsprechenden Verlust mechanischer Energie. Gewisse That- sachen, welche die Reibung der tropfbaren Flüssigkeiten betreffen, scheinen mir darauf hinzuweisen, dass bei diesem Phänomen die genannte Art der Wärmeerzeugung eine bedeutende Rolle spielt.

Freiburg i/Br., am 25. April 1878.

VI. *Ueber die elastische Nachwirkung; von
Oskar Emil Meyer.*

Die Beobachtungen und theoretischen Betrachtungen, welche ich in dieser Abhandlung mittheile, haben den Zweck, ein Urtheil über den Werth verschiedener Theorien zu gewinnen, welche zur Erklärung der elastischen Nachwirkung aufgestellt worden sind. Ich bespreche der Reihe nach einen von mir selbst gemachten Versuch, dann die von Boltzmann und darauf die von Neesen entwickelte Theorie. Endlich wende ich mich zu den von Weber und von Kohlrausch aufgestellten Hypothesen und schliesse mit einigen Formeln, welche nicht den Anspruch erheben, eine vollständige Theorie zu enthalten, welche jedoch einen von Kohlrausch ausgesprochenen Gedanken in einer mit den Beobachtungen übereinstimmenden Weise mathematisch wiederzugeben scheinen.

1. Die Theorie der elastischen Nachwirkung, welche ich vor einigen Jahren¹⁾ zu entwickeln versucht habe, geht von der Annahme aus, dass in festen Körpern ebenso wie in flüssigen und luftförmigen, eine innere Reibung zwischen ungleich bewegten Theilen wirke. Aus dieser Hypothese wird die Dämpfung berechnet, welche Schwingungen eines elastischen Drahtes durch die innere Rei-

1) Pogg. Ann. CLI. p. 108.