I. *Ueber das Verhältniß der Quercontraction zur Längendilatation bei Stäben von federhartem Stahl; von G. Kirchhoff.*

Wenn ein homogener cylindrischer Stab, dessen Elasticität in verschiedenen Richtungen dieselbe ist, in der Richtung seiner Länge durch einen Zug ausgedehnt wird, so erleiden seine Querdimensionen eine Contraction. Nach theoretischen Betrachtungen von Poisson sollte das Verhältniß der Quercontraction zur Längendilatation immer $\frac{1}{4}$ seyn, Wertheim schloß aus seinen Versuchen, daß dasselbe $\frac{1}{3}$ ist; nach einer mehrfach ausgesprochenen Ansicht hat es weder den einen noch den anderen Werth und ist verschieden bei verschiedenen Substanzen. Bei den meisten Körpern, bei denen man eine gleiche Elasticität in verschiedenen Richtungen annehmen kann, stellt sich der experimentellen Bestimmung dieses Verhältnisses der Umstand hindernd in den Weg, daß bei ihnen, auch bei sehr kleinen Formänderungen, bleibende Dehnung und elastische Nachwirkung in erheblichem Grade sich zeigen. Es ist dieses der Fall bei ausgeglühten Metalldrähten und Glasstäben. Bei hart gezogenen Metalldrähten ist eine bleibende Dehnung und eine elastische Nachwirkung viel weniger bemerklich; aber bei ihnen ist sicher die Elasticität in verschiedenen Richtungen verschieden. Bei gehärteten Stahlstäben dagegen kann man wohl mit Wahrscheinlichkeit eine Gleichheit der Elasticität in verschiedenen Richtungen voraussetzen; und da diese überdies mehr noch als hart gezogene Drähte einem idealen elastischen Körper ähnlich sind, so erscheinen sie vorzugsweise geeignet zu Versuchen über den Werth jenes

Verhältnisses. Ich habe an mehreren runden Stäben von federhartem Stahl, von etwa 2,85^{mm} Durchmesser und ungefähr 300^{mm} Länge, solche Versuche ausgeführt und will diese hier beschreiben.

Es stelle in Fig. 1, Taf. I $A^0 A'$ einen elastischen Stab vor, der in A^0 horizontal befestigt ist; in A' sey ein horizontaler Arm $A' B'$ senkrecht auf der Längsrichtung des Stabes an demselben angebracht. Wird in B' ein Gewicht P angehängt, so bewirkt dieses gleichzeitig eine Biegung und eine Torsion. An dem freien Ende des Stabes sey ein Spiegel C' so befestigt, daß seine Fläche nahe horizontal ist; gegen den Spiegel sey von oben her ein Fernrohr gerichtet, und eine Scale, die aus zwei Systemen senkrecht sich schneidender, gleich weit von einander abstehender Linien besteht, sey horizontal so angebracht, daß ihr Spiegelbild im Fernrohr erscheint. An dieser Scale läßt sich dann gleichzeitig die Biegung und die Torsion beobachten. Angenommen, daß der Querschnitt des Stabes ein Kreis ist, so kann man aus dem Radius desselben, dem Gewicht P , der Länge $A^0 A'$ und der beobachteten Biegung den Elasticitätscoefficienten, aus dem Radius, dem Gewichte P , den Längen $A^0 A'$, $A' B'$ und der beobachteten Torsion den Torsionscoefficienten berechnen; aus dem Verhältniß dieser beiden Coefficienten findet man dann leicht, unter der Voraussetzung der Gleichheit der Elasticität in verschiedenen Richtungen, das gesuchte Verhältniß der Quercontraction zur Längendilatation. Bei der Bestimmung dieses Verhältnisses ist die Kenntniß des Radius des Stabes unnöthig, da dieser in gleicher Weise in den Ausdrücken des Elasticitätscoefficienten und des Torsionscoefficienten vorkommt.

Die Stäbe, welche ich den Versuchen unterworfen habe, sind Stücke von gezogenen Drähten; man kann daher bei ihnen nicht mit Sicherheit voraussetzen, daß ihr Querschnitt ein Kreis ist; man wird aber ohne merklichen Fehler annehmen dürfen, daß der Querschnitt eine Ellipse ist, bei der das Quadrat der Excentricität vernachlässigt werden kann. Bei dieser Annahme kann man sehr leicht den Ein-

fluß der Abweichung des Querschnittes von der Kreisform eliminiren. Man hat nur nöthig, den Stab um seine Axe um 90° zu drehen, den Arm $A'B'$ wieder horizontal in A' zu befestigen und zum zweiten Male die Formänderung zu beobachten, die der Stab erleidet, wenn das Gewicht P in B' aufgehängt wird. Die Torsion muß dann eben so groß, als bei der ersten Lage des Stabes, gefunden werden, die Biegung im Allgemeinen aber anders; die Torsion bei der einen oder der anderen Lage und das arithmetische Mittel aus den beiden Biegungen sind so groß, wie die Torsion und die Biegung seyn würden, wenn der Querschnitt des Stabes ein Kreis wäre, 'dessen Radius das Mittel aus den beiden Halbaxen des elliptischen Querschnitts ist.

Der Arm $A'B'$ läßt sich nicht leicht mit Genauigkeit senkrecht zur Stabaxe machen; eine geringe Schiefe desselben hat auf die Torsion nicht Einfluß, wohl aber auf die Biegung. Diesen Einfluß habe ich auf folgende Weise unschädlich gemacht. Der Arm $A'B'$ ist die Hälfte eines Querstabes $B'D'$; nachdem das Gewicht P in B' gewirkt hat, hänge ich es in D' auf und nehme das Mittel aus den in beiden Fällen beobachteten Biegungen. Die Torsionen müssen in beiden Fällen dieselben seyn, wenn die Stabaxe durch die Mitte von $B'D'$ hindurchgeht; ist diese Bedingung nicht genau erfüllt, so sind auch die Torsionen verschieden, ihr Mittel ist dann aber so groß, wie die Torsion seyn würde, wenn die Länge eines jeden Armes genau der Hälfte von $B'D'$ gleich wäre.

Um mich von der Voraussetzung unabhängig zu machen, daß der Theil des Stabes bei A° genau seine Lage behält, wenn das Gewicht P an das Ende seines Hebelarms gehängt wird, habe ich die Einrichtung getroffen, daß der Stab $A^\circ A'$ die Hälfte eines Stabes $A'A''$ ist, der bei A'' einen Querstab $B''D''$ von denselben Dimensionen wie $B'D'$ und einen Spiegel C'' trägt, auf welchen ein zweites Fernrohr gerichtet ist. Der Stab ist bei A° in einem dünnen Blechstücke befestigt; es werden gleiche Gewichte bei B' und B'' oder bei D' und

D' angehängt und das Bild derselben Scale wird in beiden Spiegeln beobachtet.

Der Apparat, den ich benutzt habe, ist in Fig. 2, Taf. I perspectivisch dargestellt. An der Wand des Beobachtungszimmers sind vier Bretter *A*, *B*, *B*, *C* befestigt; das erste von diesen trägt die Scale, die beiden folgenden die beiden Fernröhre, das letzte den den Versuchen zu unterwerfenden Stab. An dem Brette *A* sitzen zwei horizontale, zu ihm senkrechte Leisten *a*, *a*; an jeder von diesen sind zwei kleine, nach Innen vorspringende, Holzstücke angebracht, durch welche von unten her die Schrauben α , α geführt sind; auf diesen Schrauben ruht die Scale und ist durch sie mit Hülfe einer Libelle horizontal gestellt. Die Scale ist auf Papier gedruckt und auf eine Glasplatte aufgespannt. Fig. 3, Taf. I zeigt einen Theil derselben. Die eine Axe ist parallel der Wand, die andere senkrecht zu dieser; ich werde die erste die ξ Axe, die zweite die η Axe nennen.

Die Bretter *B*, *B*, *C* tragen die Holzleisten *b*, *b*, *c*, die etwas weiter als die Leisten *a*, *a* vorspringen, und von denen die beiden ersten zwei Fernröhre β , β von etwa 30maliger Vergrößerung halten. Die Gesichtslinien dieser sind vertical gestellt. Um das zu erreichen, ist unter dem Objective eines jeden ein Kreuz von zwei Fäden ausgespannt und das Fernrohr so gerichtet, daß das Spiegelbild, welches ein Quecksilberhorizont von dem Schnittpunkte dieser Fäden gewährt, mit dem Mittelpunkte des Fadenkreuzes im Fernrohr zusammenfällt.

An der Leiste *c* hängt der Stab, dessen Formänderungen gemessen werden sollen. In der Nähe des vorderen Endes der Leiste ist durch dieselbe eine verticale rechteckige Oeffnung gestemmt, die theilweise von einem Holzstücke ausgefüllt wird, das von den vier seitlichen Schrauben γ , γ , γ' , γ' gehalten wird, welche mit ihren Spitzen in Vertiefungen eingreifen, die in demselben angebracht sind. Von diesen vier Schrauben liegen die beiden ersten in einer horizontalen, die beiden letzten in einer verticalen Ebene. Mit Hülfe derselben kann das Holzstück in der

Richtung der ξ Axe verschoben und um zwei Axen gedreht werden, von denen die eine nahe vertical, die andere nahe parallel der η Axe ist. Das Holzstück ist vertical durchbohrt; durch die Durchbohrung ist von unten nach oben der Stiel eines kleinen Schraubstocks geführt und mit Hülfe einer Schraubenmutter so weit an dem Holzstücke befestigt, daß er nur mit starker Reibung in demselben sich drehen läßt. In das nach unten gekehrte Maul des Schraubstocks ist ein dünnes Stückchen Stahlblech gespannt, welches eine Oeffnung hat, die so groß wie der Querschnitt des zu untersuchenden Stabes ist. Durch diese Oeffnung ist der Stab bis zu seiner Mitte gesteckt und hier mit einer sehr kleinen Menge Zinn festgelöthet. Diese Vorrichtungen gestatten dem Stabe (der in Fig. 2 Taf. I durch d bezeichnet ist) eine Lage zu geben, bei der seine Axe horizontal und der ξ Axe parallel ist und die an ihm befestigten Querstäbe e, e so nahe horizontal sind, als es möglich ist, wenn sie nicht vollkommen parallel einander sind. Zu diesem Zwecke wird an den Stab d eine mit Haken versehene Libelle so gehängt, daß ihre Mitte unter der Mitte des Stabes sich befindet, und durch Drehung der Schrauben γ', γ' ihre Blase zum Einspielen gebracht. Darauf wird die Libelle an einen der Querstäbe e, e gehängt, und dieser durch Drehung des Blechstücks, welches den Stab d hält, horizontal gemacht. Sind beide Querstäbe einander parallel, so muß auch der zweite jetzt horizontal seyn. Ob das der Fall ist, erkennt man, indem man die Libelle an ihn anhängt. Eine kleine Abweichung ist nicht zu fürchten. Findet sie statt, so stellt man den Stab d am zweckmäßigsten so, daß die beiden Querstäbe um gleich viel nach entgegengesetzten Seiten von der Horizontalen abweichen. Die Bewegung endlich, welche nöthig ist, um die Axe des Stabes d der ξ Axe parallel zu richten, kann theils durch Drehung des Schraubstocks in dem Holzstücke, das diesen trägt, theils durch die Schrauben γ, γ ausgeführt werden. Um zu beurtheilen, ob der beabsichtigte Parallelismus besteht, habe ich das folgende Verfahren ein-

geschlagen. In zwei Punkten der ξ Axe der Scale sind die Fäden f, f befestigt, die unten in zwei Schlingen endigen. In diese Schlingen ist ein Stab g von ähnlichen Dimensionen, wie der Stab d , eingelegt. Die Länge der Fäden ist so gewählt, daß beide Stäbe ungefähr in derselben Höhe, der eine hinter dem andern, sich befinden. An dem Stabe g wird ein Spiegelstreifen aufgehängt, der mit zwei Haken versehen ist, die den Haken einer Libelle ähnlich sind, Fig. 4, Taf. I; gegen diesen Spiegel richtet man ein Fernrohr, vor dessen Objectiv ein Loth angebracht ist, so, daß das Spiegelbild des Lothes von dem Verticalfaden des Fadenkreuzes gedeckt wird. Darauf hängt man denselben Spiegelstreifen an den Stab d und richtet diesen so, daß bei unveränderter Stellung des Fernrohrs dieselbe Deckung stattfindet.

An den Enden des Stabes d sind die Träger zweier Silberspiegel h, h angeschraubt, deren Mitten nahezu von den Gesichtslinien der beiden Fernröhre getroffen werden sollen. Um zu beurtheilen, ob das stattfindet, dienen zwei Lothe i, i , die an den Schnittpunkten der Fäden aufgehängt sind, welche, wie schon erwähnt, unter jedem der beiden Objective sich befinden. Jeder Spiegel kann gegen seinen Träger mit Hülfe dreier Paare von Schraubchen in engen Gränzen bewegt und so gerichtet werden, daß passende Punkte der Scale in dem Gesichtsfelde des zugehörigen Fernrohrs erscheinen.

Fig. 5, Taf. I stellt einen der beiden Querstäbe dar. Derselbe ist aus Stahlblech gearbeitet; in seiner Mitte hat er einen Ausschnitt, dessen Seiten a, a, a Schneiden sind; diese greifen, wenn er auf den Stab d aufgesetzt ist, in seine Einschnitte ein, die in diesen mit der Feile gemacht sind, und sind hier mit einer sehr kleinen Menge Zinn festgelöthet. In die Enden des Querstabes, die verdickt sind, sind die stählernen Spitzen b, b eingeschraubt, die dazu dienen die Ringe c, c zu tragen, an denen feine, in Haken endigende Drähte sitzen, an welche die Gewichte gehängt werden, die den Stab d biegen und tordiren sollen.

Wenn man sich erlaubt, die Winkel als unendlich klein zu betrachten, unter welchen, die in die Fernröhre gelangenden Strahlen reflectirt werden, so können als Maafs für die Biegungen und Torsionen der beiden Stabhälften unmittelbar die Veränderungen der Coordinaten der Scalenspunkte dienen, deren Spiegelbilder von den Schnittpunkten der beiden Fadenkreuze gedeckt werden. Bei den angestellten Versuchen muß indessen Rücksicht auf die endliche Gröfse jener Winkel genommen werden. Diese Rücksicht macht einige näher eingehende Betrachtungen nöthig.

Ich führe ein dreiaxiges rechtwinkliges Coordinatensystem ein, zwei Axen desselben sollen die ξ Axe und η Axe der Scale seyn; von diesen hat die erste die Richtung der Linie $A'A''$ Fig. I, Taf. I, die zweite die Richtung der Linie $A'D'$; die dritte, welche ich die ζ Axe nennen will, soll vertical abwärts gekehrt seyn. Den den Versuchen zu unterwerfenden Stab denke ich mir zunächst gerade gemacht; es kann das dadurch geschehen, dafs in der Nähe seiner Enden Unterstüzungen angebracht und diese so gestellt werden, dafs eine Libelle, auf die eine oder auf die andere Stabhälfte gehängt, einsteht. Die Stabaxe ist dann parallel der ξ Axe. Von einem variablen Punkte der Stabaxe ausgehend stelle ich mir drei auf einander rechtwinklige Axen vor, die ich bezeichnen will als x Axe, y Axe, z Axe, die fest verbunden mit den Molekülen des Stabes und bei der eben bezeichneten Lage desselben den Axen der ξ , η , ζ parallel sind. Hat der Stab eine Aenderung der Lage und Gestalt erlitten, so bilden jene Axen mit diesen Winkel, deren Cosinus ich durch

$$\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$$

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$$

$$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$$

bezeichne, so, dafs die Indices 0, 1, 2 sich resp. beziehen auf die x Axe, y Axe, z Axe. Weiter seyen ξ , η , ζ die Coordinaten in Beziehung auf die ξ , η , ζ Axen des Punktes, von dem die x , y , z Axen ausgehen. Den Zeichen dieser drei Coordinaten und jener neun Cosinus werde ich oben °

oder ' oder " beifügen, wenn sie sich auf die Punkte der Stäbaxe A^0 , A' , A'' Fig. 1, Taf. I beziehen sollen.

Sind die Unterstützungen, durch welche der Stab gerade gemacht ist, entfernt, so hat sich derselbe gekrümmt in Folge seines eigenen Gewichtes, des Gewichtes der Spiegel, ihrer Träger und der Querstäbe. Um die Betrachtungen nicht unnötig zu compliciren, werde ich annehmen, daß diese Krümmung angesehen werden kann als hervorgebracht durch gleiche Gewichte, die in A' und A'' wirken; die Größe dieser Gewichte sey G . Die Größe der gleichen Gewichte, welche bestimmt sind in B' und B'' oder in D' und D'' angehängt zu werden, nenne ich, wie früher P . Die Hälfte von $A' A''$ bezeichne ich durch s , den vierten Theil der Summe von $B' B''$ und $D' D''$ durch l . Um die Rechnungen etwas zu vereinfachen, nehme ich an, daß

$$A' A^0 = A'' A^0$$

und

$$B' A' = D' A' = B'' A'' = D'' A''$$

ist, bemerke aber, daß das Endresultat auch Gültigkeit behält, wenn diese Gleichungen nicht genau erfüllt sind. Der Radius des als kreisförmig gedachten Querschnitts des Stabes sey ρ . Den Elasticitätscoefficienten setze ich in Uebereinstimmung mit den Bezeichnungen, welche ich in früheren Abhandlungen über Elasticität gebraucht habe,

$$= 2K \frac{1+3\theta}{1+2\theta},$$

das Verhältniß der Quercontraction zur Längendilatation in dem Falle, daß der Stab durch einen longitudinalen Zug ausgedehnt wird,

$$= \frac{\theta}{1+2\theta}.$$

Der Kürze wegen mache ich weiter:

$$L = \frac{\pi}{2} \rho^4 K, \quad N = \frac{\pi}{2} \rho^4 K \frac{1+3\theta}{1+2\theta}.$$

Die Formänderungen des Stabes sollen als unendlich klein betrachtet werden; es ist dann immer:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1, & \beta_1 &= 1, & \gamma_2 &= 1, \\ \beta_2 + \gamma_1 &= 0, & \gamma_0 + \alpha_2 &= 0, & \alpha_1 + \beta_0 &= 0. \end{aligned}$$

Für den Fall, daß die Gewichte P nicht wirken, hat man ¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_2 &= \alpha^0_2 + \frac{Gs^2}{2N} \\ \beta'_2 &= \beta^0_2 \\ \zeta' &= \zeta^0 + \alpha^0_2 s + \frac{Gs^3}{3N} \\ \alpha''_2 &= \alpha^0_2 - \frac{Gs^2}{2N} \\ \beta''_2 &= \beta^0_2 \\ \zeta'' &= \zeta^0 - \alpha^0_2 s + \frac{Gs^3}{3N} \end{aligned} \right\} (1),$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned} \alpha'_2 - \alpha''_2 &= \frac{Gs^2}{N} \\ \beta'_2 - \beta''_2 &= 0. \end{aligned}$$

Für den Fall, daß die Gewichte P in B' und B'' angebracht sind, ist:

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_2 &= \alpha^0_2 + \frac{(G+P)s^2}{2N} \\ \beta'_2 &= \beta^0_2 + \frac{Pls}{L} \\ \zeta' &= \zeta^0 + \alpha^0_2 s + \frac{(G+P)s^3}{3N} \\ \alpha''_2 &= \alpha^0_2 - \frac{(G+P)s^2}{2N} \\ \beta''_2 &= \beta^0_2 - \frac{Pls}{L} \\ \zeta'' &= \zeta^0 - \alpha^0_2 s + \frac{(G+P)s^3}{3N} \end{aligned} \right\} (2)$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned} \alpha'_2 - \alpha''_2 &= \frac{(G+P)s^2}{N} \\ \beta'_2 - \beta''_2 &= \frac{2Pls}{L} \end{aligned}$$

Ich werde die Veränderungen, welche die in Betracht kommenden Größen dadurch erleiden, daß die Gewichte P in

1) Vergl. meine Abhandlung: Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes; Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 56.

B' und B'' angehängt werden, durch Vorsetzen eines δ bezeichnen; es ist dann:

$$\delta\alpha'_2 - \delta\alpha''_2 = \frac{P\delta^2}{N}$$

$$\delta\beta'_2 - \delta\beta''_2 = \frac{2Pls}{L},$$

woraus sich ergibt:

$$\frac{N}{L} = 1 + \frac{\theta}{1+2\theta} = \frac{\delta\beta'_2 - \delta\beta''_2}{\delta\alpha'_2 - \delta\alpha''_2} \cdot \frac{s}{2l} \quad (3).$$

Werden die Gewichte P statt in B' und B'' in D' und D'' angebracht, so gelten dieselben Gleichungen, wenn nur in ihnen $-l$ statt l gesetzt wird.

Es handelt sich nun darum abzuleiten, wie $\delta\alpha'_2$, $\delta\alpha''_2$, $\delta\beta'_2$, $\delta\beta''_2$ aus den an der Scale zu machenden Ablesungen gefunden werden können. Zu diesem Zwecke werde ich die Richtungen der nach Unten gekehrten Spiegelnormalen in die Betrachtung einführen und durch n' und n'' bezeichnen. Der Kürze wegen will ich dabei setzen:

$$\cos(n'\xi) = \alpha', \quad \cos(n'\eta) = \beta', \quad \cos(n'\zeta) = \gamma'$$

$$\cos(n''\xi) = \alpha'', \quad \cos(n''\eta) = \beta'', \quad \cos(n''\zeta) = \gamma''.$$

In Fig. 6 Taf. I sey $O\xi$ die Gesichtslinie des ersten Fernrohrs, $O\xi$ und $O\eta$ seyen zwei Linien, die in der Ebene der Scale der ξ Axe und der η Axe parallel gezogen sind; dabei möge der Punkt ζ der Schnittpunkt der Gesichtslinie mit der Spiegelebene seyn, N der Schnittpunkt der aus dem Punkte ζ gezogenen Spiegelnormale mit der Ebene der Scale und S der Punkt der Scale, dessen Spiegelbild in der Gesichtslinie liegt. Ich bezeichne weiter die Coordinaten in Bezug auf die ξ , η , ζ Axen des Punktes ζ durch a' , b' , c' , des Punktes S durch X' , Y' , o , des Punktes N durch A' , B' , o . Es ist dann:

$$A' - a' = -N\xi \cdot \alpha'$$

$$B' - b' = -N\xi \cdot \beta'$$

$$-c' = -N\xi \cdot \gamma'$$

also

$$A' - a' = -\frac{\alpha'}{\gamma'} c'$$

$$B' - b' = -\frac{\beta'}{\gamma'} c'.$$

Da aber die Linie $N\xi$ in der Ebene des Dreiecks $OS\xi$ liegt und den Winkel desselben bei ξ halbt, so ist:

$$X' - a' = (A' - a') \frac{2\gamma'^2}{2\gamma'^2 - 1}$$

$$Y' - b' = (B' - b') \frac{2\gamma'^2}{2\gamma'^2 - 1}.$$

Daraus folgt:

$$\left. \begin{aligned} X' - a' &= -\alpha' \frac{2\gamma'}{2\gamma'^2 - 1} c' \\ Y' - b' &= -\beta' \frac{2\gamma'}{2\gamma'^2 - 1} c'. \end{aligned} \right\} (4).$$

Auf dieselbe Weise ergibt sich bei entsprechender Bezeichnung für den zweiten Spiegel:

$$\left. \begin{aligned} X'' - a'' &= -\alpha'' \frac{2\gamma''}{2\gamma''^2 - 1} c'' \\ Y'' - b'' &= -\beta'' \frac{2\gamma''}{2\gamma''^2 - 1} c''. \end{aligned} \right\} (5).$$

Sind $(n'x)$, $(n'y)$, $(n'z)$ die Winkel, welche die Spiegelnormale n' bildet mit den von A' ausgehenden Axen der x , y , z , so ist:

$$\alpha' = \cos(n'x) + \alpha'_1 \cos(n'y) + \alpha'_2 \cos(n'z)$$

$$\beta' = \beta'_0 \cos(n'x) + \cos(n'y) + \beta'_2 \cos(n'z).$$

Es ist α'_1 , oder $-\beta'_0$, der Winkel, um den sich der Stab um eine verticale Axe aus der Lage gedreht hat, bei der seine Axe der ξ Axe parallel ist; dieser Winkel ist, wenn nicht $= 0$, so doch sicher sehr klein, und da $\cos(n'y)$ und $\cos(n'x)$ auch nur kleine Größen sind, so wird man setzen dürfen:

$$\alpha' = \cos(n'x) + \alpha'_2 \cos(n'z)$$

$$\beta' = \cos(n'y) + \beta'_2 \cos(n'z).$$

Ich werde die Werthe, welche die in Betracht kommenden Größen in dem Falle annehmen, dafs der Stab auf die

oben angegebene Weise gerade gemacht ist, durch Uebersetzen eines — bezeichnen. Es ist dann:

$$\cos(n'x) = \overline{\alpha'}, \quad \cos(n'y) = \overline{\beta'}, \quad \cos(n'z) = \overline{\gamma'}.$$

Die letzten Gleichungen lassen sich in Folge dessen schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_2 &= \frac{\alpha' - \overline{\alpha'}}{\overline{\gamma'}} \\ \beta'_2 &= \frac{\beta' - \overline{\beta'}}{\overline{\gamma'}} \end{aligned} \right\} (6).$$

Ebenso findet man:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_2'' &= \frac{\alpha'' - \overline{\alpha''}}{\overline{\gamma''}} \\ \beta_2'' &= \frac{\beta'' - \overline{\beta''}}{\overline{\gamma''}} \end{aligned} \right\} (7).$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen sollen nun Ausdrücke für c' und c'' abgeleitet werden. Die Gleichung der Ebene des ersten Spiegels in Beziehung auf die aus dem Punkte A' gezogenen Axen der x, y, z sey:

$$x \cos(n'x) + y \cos(n'y) + z \cos(n'z) - D' = 0;$$

die Gleichung derselben Ebene in Beziehung auf die Axen der ξ, η, ζ ist dann:

$$(\xi - \xi') \alpha' + (\eta - \eta') \beta' + (\zeta - \zeta') \gamma' - D' = 0.$$

Der Punkt, für den $\xi = a', \eta = b', \zeta = c'$ ist, gehört dieser Ebene an; es ist daher:

$$(a' - \xi') \alpha' + (b' - \eta') \beta' + (c' - \zeta') \gamma' - D' = 0,$$

woraus folgt:

$$c' = \zeta' + \frac{D' + (\xi' - a') \alpha' + (\eta' - b') \beta'}{\gamma'}.$$

Bei meinem Apparate betragen D' und $\eta' - b'$ wenige Millimeter, $\xi' - a'$ ist wenige Centimeter, c' mehr als 2 Meter; man wird deshalb in Anbetracht der Kleinheit von α' und β' statt dieser Gleichung schreiben dürfen:

$$c' = \zeta' + D' + (\xi' - a') \alpha',$$

und für α' wird es erlaubt seyn einen auch rohen Näherungswerth zu setzen. Ich mache

$$\left. \begin{aligned} \bar{c}' &= C + h \\ \bar{c}'' &= C - h, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

wo h eine gegen C sehr kleine Gröfse ist; dann werde ich in Folge der Gleichungen 4) setzen können:

$$\alpha' = -\frac{X' - a'}{2C} \quad (9)$$

Dann erhalte ich:

$$c' = \zeta' + D' - \frac{(\xi' - a')(X' - a')}{2C}.$$

Es folgt hieraus:

$$\bar{c}' = \bar{\zeta}' + D' - \frac{(\xi' - a')(\bar{X}' - a')}{2C};$$

es ist also auch mit Rücksicht auf die Gleichungen (8):

$$c' = C + h + \zeta' - \bar{\zeta}' - \frac{(\xi' - a')(X' - \bar{X}')}{2C},$$

oder, da $\bar{\zeta}' = \zeta^0$ ist,

$$c' = C + h + \zeta' - \zeta^0 - \frac{(\xi' - a')(X' - \bar{X}')}{2C}.$$

Auf dieselbe Weise findet man:

$$c'' = C - h + \zeta'' - \zeta^0 - \frac{(\xi'' - a'')(X'' - \bar{X}'')}{2C}.$$

Nun folgt aber aus den Gleichungen (1) und (2):

$$\zeta' - \zeta^0 = \frac{5}{6}s\alpha'_2 + \frac{1}{6}s\alpha''_2$$

$$\zeta'' - \zeta^0 = -\frac{1}{6}s\alpha'_2 - \frac{5}{6}s\alpha''_2;$$

aus den Gleichungen (6) und (9) folgt, dafs näherungsweise:

$$\alpha'_2 = -\frac{X' - \bar{X}'}{2C};$$

und ebenso ist:

$$\alpha''_2 = -\frac{X'' - \bar{X}''}{2C}.$$

Es ergibt sich daher:

$$c' = C + h - \frac{1}{2C} \left[\left(\frac{5}{6}s + \xi' - a' \right) (X' - \bar{X}') + \frac{1}{6}s (X'' - \bar{X}'') \right]$$

$$c'' = C - h + \frac{1}{2C} \left[\frac{1}{6}s (X' - \bar{X}') + \left(\frac{5}{6}s - (\xi'' - a'') \right) (X'' - \bar{X}'') \right]$$

Diese Werthe von c' und c'' substituirt man in die Gleichungen (4) und (5); dabei setze man für γ' und γ'' die Näherungswerthe:

$$\left. \begin{aligned} \gamma' &= 1 - \frac{(X' - a')^2 + (Y' - b')^2}{8C^2} \\ \gamma'' &= 1 - \frac{(X'' - a'')^2 + (Y'' - b'')^2}{8C^2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

welche sich leicht aus der Gleichung (9) und den dieser analog zu bildenden Gleichungen ergeben. Bei Vernachlässigung von kleinen Gliedern höherer Ordnung findet man dann:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= -\frac{X' - a'}{2C} \left\{ 1 - \frac{h}{C} - \frac{3}{8C^2} [(X' - a')^2 + (Y' - b')^2] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8C^2} \left[\left(\frac{10}{3}s + 4(\xi' - a') \right) (X' - \bar{X}') + \frac{2}{3}s (X'' - \bar{X}'') \right] \right\} \\ \beta' &= -\frac{Y' - b'}{2C} \left\{ 1 - \frac{h}{C} - \frac{3}{8C^2} [(X' - a')^2 + (Y' - b')^2] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8C^2} \left[\left(\frac{10}{3}s + 4(\xi' - a') \right) (X' - \bar{X}') + \frac{2}{3}s (X'' - \bar{X}'') \right] \right\} \\ \alpha'' &= -\frac{X'' - a''}{2C} \left\{ 1 + \frac{h}{C} - \frac{3}{8C^2} [(X'' - a'')^2 + (Y'' - b'')^2] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8C^2} \left[\left(\frac{2}{3}s (X' - \bar{X}') + \left(\frac{10}{3}s - 4(\xi'' - a'') \right) (X'' - \bar{X}'') \right) \right] \right\} \\ \beta'' &= -\frac{Y'' - b''}{2C} \left\{ 1 + \frac{h}{C} - \frac{3}{8C^2} [(X'' - a'')^2 + (Y'' - b'')^2] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8C^2} \left[\frac{2}{3}s (X' - \bar{X}') + \left(\frac{10}{3}s - 4(\xi'' - a'') \right) (X'' - \bar{X}'') \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Mit Hülfe dieser Ausdrücke kann man aus den Gleichungen (6) und (7) die Werthe von α'_2 , α''_2 , β'_2 , β''_2 bilden. Ich will aber diese Werthe selbst nicht aufstellen, sondern an ihrer Statt die von vier Gröfsen, die ich durch (X') , (Y') , (X'') , (Y'') bezeichne und durch die folgenden Gleichungen definire:

$$\left. \begin{aligned} (X') &= a' - 2C \left(\alpha'_2 + \frac{\bar{\alpha}'}{\bar{\gamma}'} \right) \\ (Y') &= b' - 2C \left(\beta'_2 + \frac{\bar{\beta}'}{\bar{\gamma}'} \right) \\ (X'') &= a'' - 2C \left(\alpha''_2 + \frac{\bar{\alpha}''}{\bar{\gamma}''} \right) \\ (Y'') &= b'' - 2C \left(\beta''_2 + \frac{\bar{\beta}''}{\bar{\gamma}''} \right) \end{aligned} \right\} (12).$$

Einerseits folgt hieraus:

$$\begin{aligned} \delta(X') &= -2C \delta \alpha'_2, & \delta(Y') &= -2C \delta \beta'_2 \\ \delta(X'') &= -2C \delta \alpha''_2, & \delta(Y'') &= -2C \delta \beta''_2 \end{aligned}$$

und also bei Rücksicht auf die Gleichung (3):

$$1 + \frac{\theta}{1+2\theta} = \frac{\delta(Y'') - \delta(Y')}{\delta(X'') - \delta(X')} \frac{s}{2l} \} (13)$$

Andererseits folgt aus den Gleichungen (12), wenn man die Gleichungen (6) und (7) hinzuzieht:

$$\begin{aligned} (X') &= a' - 2C \frac{\alpha'}{\gamma'} \\ (Y') &= b' - 2C \frac{\beta'}{\gamma'} \\ (X'') &= a'' - 2C \frac{\alpha''}{\gamma''} \\ (Y'') &= b'' - 2C \frac{\beta''}{\gamma''} \end{aligned}$$

Benutzt man nun die Gleichungen (11), setzt für $\bar{\gamma}'$ und $\bar{\gamma}''$ die Näherungswerthe:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}' &= 1 - \frac{(\bar{X}' - a')^2 + (\bar{Y}' - b')^2}{8C^2} \\ \bar{\gamma}'' &= 1 - \frac{(\bar{X}'' - a'')^2 + (\bar{Y}'' - b'')^2}{8C^2}, \end{aligned}$$

die aus den Gleichungen (10) sich ergeben, und vernachlässigt wieder kleine Gröfsen höherer Ordnung, so findet man:

$$\begin{aligned}
(X') &= X' + (X' - a') F' \\
(Y') &= Y' + (Y' - b') F' \\
(X'') &= X'' + (X'' - a'') F'' \\
(Y'') &= Y'' + (Y'' - b'') F'',
\end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned}
F' = -\frac{h}{C} + \frac{1}{8C^2} \Big[(\bar{X}' - a')^2 + (\bar{Y}' - b')^2 - 3[(X' - a')^2 + (Y' - b')^2] \\
+ \left(\frac{10}{3}s + 4(\xi' - a') \right) (X' - \bar{X}') + \frac{2}{3}s (X'' - \bar{X}'') \Big]
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
F'' = \frac{h}{C} + \frac{1}{8C^2} \Big[(\bar{X}'' - a'')^2 + (\bar{Y}'' - b'')^2 - 3[(X'' - a'')^2 + (Y'' - b'')^2] \\
- \frac{2}{3}s (X' - \bar{X}') - \left(\frac{10}{3}s - 4(\xi'' - a'') \right) (X'' - \bar{X}'') \Big].
\end{aligned}$$

Nach diesen Formeln sind die angestellten Beobachtungen berechnet. Von den hier vorkommenden Größen ergaben sich X' , Y' , X'' , Y'' , $\bar{X}'$, $\bar{Y}'$, $\bar{X}''$, $\bar{Y}''$ unmittelbar aus den an den Spiegelbildern der Scale gemachten Ablesungen; a' , b' , a'' , b'' wurden gefunden aus den gemessenen Entfernungen der Lothe i , i (Fig. 2, Taf. I) und zweier Lothe, die aus den Fäden f , f gebildet waren; $\xi' - a'$ und $\xi'' - a''$ wurden mit einem Zirkel gemessen. Einer näheren Auseinandersetzung bedarf nur noch die Art, wie die Größen C und h , oder die mit diesen durch die Gleichungen (8) zusammenhängenden Größen $\bar{c}$, $\bar{c}''$ bestimmt wurden.

An der Leiste, welche den der Untersuchung unterworfenen Stab trug, war eine Spitze angebracht, deren Tiefe unter der Scale an einem langen Maafsstabe ein für alle Mal gemessen war. Vor dem elastischen Stabe war ein Kathetometer aufgestellt; mit diesem wurde, nachdem der Stab auf die oben beschriebene Weise eingestellt und gerade gemacht war, die Tiefe eines gewissen Punktes einer jeden Spiegelfläche unter jener Spitze gemessen. Es wurde nämlich, nachdem die Höhe der Spitze an der Scale des Kathetometers abgelesen war, das Fernrohr desselben durch Drehung um seine verticale Drehungsaxe so gestellt, daß

sein verticaler Faden eines der Lothe i deckte, und dann so lange gesenkt, bis der Schnittpunkt seiner Fäden in den vorderen Rand der entsprechenden Spiegelfläche zu fallen schien. Der Punkt, auf den das Fernrohr dann eingestellt war, ist der Schnittpunkt dreier Ebenen, deren Gleichungen gebildet werden sollen. Eine dieser Ebenen ist die Spiegelfläche; sie hat die Gleichung (wenn der Spiegel der erste ist):

$$(\xi - \alpha') \overline{\alpha'} + (\eta - b') \overline{\beta'} + (\zeta - \overline{c'}) \overline{\gamma'} = 0.$$

Eine zweite Ebene ist die verticale, durch den vorderen Rand des Spiegels gelegte; ihre Gleichung sey:

$$\eta - r' = 0.$$

Die dritte Ebene ist die, welche durch das Loth i und die Drehungsaxe der Kathetometers geht; sind a''' und b''' die ξ und η Ordinaten dieser Drehungsaxe, so ist die Gleichung der genannten Ebene:

$$(\xi - \alpha') (b''' - b') - (\eta - b') (a''' - \alpha') = 0.$$

Bezeichnet man durch Z' die ζ Ordinate des Punktes, auf den das Kathetometerfernrohr eingestellt war, so folgt aus diesen drei Gleichungen:

$$\overline{c'} = Z' + \frac{r' - b'}{\gamma'} \left(\overline{\beta'} + \frac{a''' - \alpha'}{b''' - b'} \overline{\alpha'} \right),$$

oder näherungsweise:

$$\overline{c'} = Z' - \frac{r' - b'}{2C} \left((\overline{Y'} - b') + \frac{a''' - \alpha'}{b''' - b'} (\overline{X'} - \alpha') \right)$$

Auf dieselbe Weise findet man bei ähnlicher Bezeichnung:

$$\overline{c''} = Z'' - \frac{r'' - b''}{2C} \left((\overline{Y''} - b'') + \frac{a''' - \alpha''}{b''' - b''} (\overline{X''} - \alpha'') \right).$$

Nach diesen Gleichungen sind $\overline{c'}$ und $\overline{c''}$ berechnet, indem für C ein Näherungswerth genommen ist.

Ich wende mich nun zur Angabe der numerischen Resultate, welche die Beobachtungen und die Abmessungen ergeben haben.

Was zunächst die Scale anbetrifft, so wurden die Theile einer jeden Axe derselben zwar nicht genau gleich gefunden doch waren die Unterschiede, die sich zeigten, so klein, dafs

sie hier vernachlässigt werden dürfen. Erheblicher ergab sich der Unterschied des mittleren Werthes eines Theiles der ξ Axe und des mittleren Werthes eines Theiles der η Axe; nach den ausgeführten Messungen ist jener $= 1,7993^{\text{mm}}$, dieser $= 1,8086^{\text{mm}}$.

Ein Näherungswerth für C ist 2357^{mm} . Bei den Versuchen, deren Einzelheiten ich mittheilen will, war, in Millimetern ausgedrückt:

$$\begin{aligned} a' &= -24,1, \quad b' = -147,0, \quad a'' = 329,6, \quad b'' = -152,3 \\ a''' &= 147,5, \quad b''' = -151,2. \\ 2l &= 108,85. \end{aligned}$$

Bei einem Stahlstabe von den schon im Eingange ungefähr angegebenen Dimensionen, den ich als No. 1 bezeichnen will, war:

$$s = 145,04^{\text{mm}},$$

und bei der ersten Einstellung:

$$\begin{aligned} \bar{X}' &= 143,2 \quad \bar{Y}' = 93,3 \quad \bar{X}'' = 12,4 \quad \bar{Y}'' = 98,0 \\ Z' &= 2355,2^{\text{mm}} \quad Z'' = 2355,5^{\text{mm}} \\ r' - b' &= -21 \dots r'' - b'' = -20 \dots \\ \xi' - a' &= 35 \dots \xi'' - a'' = -29. \end{aligned}$$

Bei Anwendung von Gewichten von 100^{gr} wurden folgende Scalenablesungen gewonnen:

	X'	Y'	X''	Y''
0	137,2	88,2	25,8	92,5
100	101,2	122,9	63,0	56,4
0	137,0	88,1	25,6	92,4
100	101,8	53,0	61,8	127,3
0	137,2	88,5	25,7	92,8
100	101,2	122,8	62,9	56,4
0	137,1	88,0	25,6	92,3
100	101,4	52,8	61,4	127,1
0	137,0	88,2	25,5	92,6

Die Ablesungen wurden gemacht zuerst bei Abwesenheit der Gewichte, dann, nachdem diese in D' und D'' (Fig. 1, Taf. I) angehängt waren, dann nach ihrer Entfernung, dann, als sie in B' und B'' wirkten, dann wieder nach ihrer Entfer-

nung, dann nachdem sie abermals in D' und D'' angebracht waren, und so fort. Ich habe den Stab mehrmals unter gleichen Bedingungen beobachtet, einmal, um eine grössere Genauigkeit zu erreichen, als eine einmalige Beobachtung sie hätte geben können, dann aber auch, um zu erkennen, ob nach dem Fortnehmen der Gewichte ein merklicher Theil der durch sie hervorgebrachten Biegung oder Torsion zurückblieb. Fand dieses statt, so verräth es sich in einer Verschiedenheit der Differenzen $X' - X''$ und $Y' - Y''$ bei den Beobachtungen, bei denen die Gewichte nicht wirkten. Eine solche Verschiedenheit zeigt sich, aber sie übersteigt bei allen Beobachtungssätzen nur in seltenen Fällen 0,2 eines Scalentheils und sie kann daher wohl aus Ablesungsfehlern und zufälligen Störungen erklärt werden.

Aus den unmittelbar beobachteten Werthen von X' , Y' , X'' , Y'' habe ich dadurch, daß ich die Mittel nahm zwischen den für gleiche Bedingungen geltenden, die folgenden gebildet:

	X'	Y'	X''	Y''
0	137,10	88,20	25,64	92,52
100	101,20	122,85	62,95	56,40
100	101,60	52,90	61,60	127,20

Aus diesen ergibt sich:

	(X')	(Y')	(X'')	(Y'')
0	136,00	86,96	26,91	91,08
100	100,20	121,07	63,45	55,81
100	101,20	52,43	62,67	125,42

Aus der ersten und zweiten dieser Horizontalreihen folgt:

$$\frac{\delta(X'') - \delta(X')}{2} = 36,17, \quad \frac{\delta(Y'') - \delta(Y')}{2} = -34,69$$

aus der ersten und dritten:

$$\frac{\delta(X'') - \delta(X')}{2} = 35,28, \quad \frac{\delta(Y'') - \delta(Y')}{2} = 34,43$$

Die halbe Summe der beiden Werthe von $\frac{\delta(X'') - \delta(X')}{2}$ will ich durch B , die halbe Differenz der beiden Werthe von $\frac{\delta(Y'') - \delta(Y')}{2}$ durch T bezeichnen: es wird dann:

$$B = 35,72 \quad T = 34,56.$$

Bei Anwendung von Gewichten von 200^{gr} wurde gefunden:

	X'	Y'	X''	Y''
0	131,5	93,1	20,1	97,5
200	65,8	157,2	100,3	20,0
0	136,8	87,7	25,5	91,9
200	64,2	16,7	95,4	161,0
0	137,0	89,2	25,7	93,6
200	66,1	156,8	100,5	19,6
0	136,7	87,3	25,3	91,5
200	67,0	17,7	98,0	162,0
0	137,2	88,2	25,8	92,5

also im Mittel:

0	135,84	89,10	24,48	93,40
200	65,95	157,00	100,40	19,80
200	65,60	17,20	96,70	161,50

Daraus folgt:

	(X')	(Y')	(X'')	(Y'')
0	134,74	87,86	25,75	91,96
200	65,05	154,28	100,51	19,66
200	65,52	17,10	97,76	158,47

und weiter

$$B = 71,42 \quad T = 69,00$$

Berechnet man aus diesen Werthen, indem man sie durch 2 dividirt, die Werthe von B und T für $P = 100^{\text{gr}}$, so ergibt sich in naher Uebereinstimmung mit den vorher direct gefundenen Zahlen:

$$B = 35,71 \quad T = 34,50.$$

Der Stab wurde nun um 90° um seine Axe gedreht, es wurden die Querstäbe wieder horizontal an ihm befestigt und dann Versuche derselben Art ausgeführt. Es fand sich:

$$\bar{X}' = 138,2 \quad \bar{Y}' = 100,2 \quad \bar{X}'' = 23,7 \quad \bar{Y}'' = 94,0$$

$$Z' = 2355,4^{\text{mm}} \quad Z'' = 2355,3^{\text{mm}}$$

$$r' - b' = -26 \dots r'' - b'' = -20 \dots$$

$$\xi' - a' = 32 \dots \xi'' - a'' = -32 \dots$$

	X'	Y'	X''	Y''
0	122,6	98,7	33,9	92,6
100	85,2	133,7	68,5	57,0
0	122,3	98,7	33,6	92,6
100	84,6	62,9	68,7	127,0
0	122,0	98,6	33,4	92,6
100	83,2	133,7	66,5	57,0
0	120,8	98,7	32,0	92,6
100	85,3	63,1	69,3	127,2
0	122,6	98,8	33,8	92,8

also im Mittel:

	X'	Y'	Y''	Y''
0	122,06	98,70	33,34	92,64
100	84,20	133,70	67,50	57,00
100	84,95	63,00	69,00	127,10
	(X')	(Y')	(X'')	(Y'')
0	121,05	97,35	34,49	91,27
100	83,28	131,68	67,95	56,45
100	84,57	62,44	70,07	125,11

$B = 35,82$

$T = 34,48$

	X'	Y'	X''	Y''
0	122,5	99,6	33,6	93,5
200	49,1	170,0	103,9	22,3
0	121,3	99,5	32,5	93,3
200	41,2	27,7	97,5	161,9
0	124,5	99,6	35,8	93,5
200	50,0	169,6	104,7	21,9
0	122,7	99,0	34,0	92,8
200	48,6	27,6	105,0	161,8
0	122,6	98,7	33,9	92,6

also im Mittel:

0	122,72	99,28	33,96	93,14
200	49,55	169,80	104,30	22,10
200	44,90	27,65	101,25	161,85

	(X')	(Y')	(X'')	(Y'')
0	121,71	97,93	35,11	91,77
200	48,75	166,61	104,39	21,97
200	44,82	27,50	102,23	158,90
	$B = 71,56$		$T = 69,01$	

und für $P = 100^{\text{gr}}$

$$B = 35,78 \quad T = 34,51.$$

In der folgenden kleinen Tafel will ich die Werthe von B und T für $P = 100^{\text{gr}}$, wie sie sich hiernach ergeben haben, zusammenstellen; dabei will ich die Temperaturen hinzufügen, die bei den Versuchen stattfanden.

B	T	
35,72	34,56	} bei der einen Lage; $21^{\circ},7 \text{ C.}$
35,71	34,50	
35,82	34,48	} bei der andern Lage; $22^{\circ},0 \text{ C.}$
35,78	34,51	

Im Mittel ist hiernach:

$$B = 35,76 \quad T = 34,51.$$

Die Einheiten, die diesen Angaben zu Grunde liegen, sind aber nicht dieselben, da, wie oben erwähnt, die Theile der ξ Axe und die der η Axe bei der benutzten Scale merklich verschieden von einander waren. Benutzt man die oben angegebenen mittleren Werthe der Scalentheile, so findet man

$$B = 64,34^{\text{mm}} \quad T = 62,41^{\text{mm}}$$

Nun folgt aber aus der Gleichung 13):

$$1 + \frac{\theta}{1+2\theta} = \frac{T}{B} \frac{s}{2l}; \quad (14)$$

daraus ergibt sich für den Stahlstab No. 1.

$$\frac{\theta}{1+2\theta} = 0,293.$$

Ganz eben solchen Versuchen, wie der Stahlstab No. 1 sind zwei andere Stahlstäbe von nahe denselben Dimensionen unterworfen. Ich begnüge mich für diese die folgenden Angaben zu machen.

Stahlstab No. 2.

<i>B</i>	<i>T</i>	
35,83	34,77	} bei der einen Lage: 12°,4 C.
35,82	34,78	
36,16	34,82	} bei der andern Lage: 16°,8 C.
36,14	34,84	

$$\begin{aligned}\text{Mittel: } B &= 35,99 & T &= 34,80 \\ &= 64,76^{\text{mm}} & &= 62,94^{\text{mm}} \\ s &= 145,01^{\text{mm}}\end{aligned}$$

$$\frac{\eta}{1+2\theta} = 0,295.$$

Stahlstab No. 3.

36,38	35,10	} bei der einen Lage: 22°,6 C.
36,33	35,10	
36,40	35,10	} bei der andern Lage: 22°,9 C.
36,35	35,11	

$$\begin{aligned}\text{Mittel: } B &= 36,37 & T &= 35,10 \\ &= 65,43^{\text{mm}} & &= 63,48^{\text{mm}} \\ s &= 145,16^{\text{mm}}\end{aligned}$$

$$\frac{\eta}{1+2\theta} = 0,294.$$

Im Mittel ist daher für die drei Stahlstäbe das gesuchte Verhältniß der Quervertraction zur Längendilation

$$= 0,294.$$

Es wäre von Interesse zu prüfen, ob bei Stahlstäben von anderem Querschnitte, als die hier untersuchten ihn haben, das genannte Verhältniß sich eben so groß findet. Wäre das der Fall, so würde dadurch die hier gemachte Annahme bestätigt werden, daß ein gehärteter Stahlstab als homogen und von gleicher Elasticität in verschiedenen Richtungen betrachtet werden darf. Gegen diese Annahme lassen sich Bedenken erheben; in der That kann man sich vorstellen, daß bei der Härtung, bei der die Wärme von der Axe nach der Peripherie hier abfließt, die Elasticität in der Richtung der Axe eine andere wird, als in den auf dieser senkrechten Richtungen, und daß die Molecüle in den äußeren Schichten eine andere Anordnung annehmen,

als in den der Axe näheren. Findet dieses statt, so findet es aber aller Wahrscheinlichkeit nach in verschiedenem Grade statt je nach der Dicke des Stabes, und es wird jenes Verhältniß anders bei dicken als bei dünnen Stäben sich ergeben müssen.

Ich erwähne schieflich noch Versuche, denen ich einen hart gezogenen Messingstab von nahe gleichen Dimensionen, wie die drei untersuchten Stahlstäbe sie besitzen, unterworfen habe. Die Versuche sind von genau derselben Art wie diejenigen, die mit jedem der Stahlstäbe angestellt sind; nur wurden statt der Gewichte von 100^{gr} und 200^{gr} Gewichte von 50^{gr} und 100^{gr} benutzt. Es fanden sich hier die folgenden Werthe von B und T für $P = 50^{\text{gr}}$:

B	T	
35,55	37,14	} bei der einen Lage; 24°, 1 C.
35,57	37,16	
35,94	37,07	} bei der andern Lage; 25°, 0 C.
35,95	37,12	
Mittel: $B = 35,75$ $T = 37,12$		
64,33 ^{mm} = 67,13 ^{mm}		

Es war hier $s = 144,65^{\text{mm}}$. Daraus folgt bei Anwendung der Gleichung 14):

$$\frac{\theta}{1+2\theta} = 0,387.$$

Diese Zahl hat hier aber sicher nicht die Bedeutung, die ich der entsprechenden bei den Stahlstäben geglaubt habe beilegen zu dürfen, weil die Elasticität des gezogenen Messingstabes sicher in der Richtung der Axe eine andere ist, als in anderen Richtungen.

Heidelberg, im Juni 1859.