Über die Trajektorien bestimmter Kurvenscharen.

Von L. Braude in Bierstadt.

1. In einer vor zwei Jahren erschienenen Veröffentlichung¹⁾ der „Rend. Circ. Mat. Palermo“ hat Herr Prof. F. G. Teixeira-Porto die orthogonalen Trajektorien der bei Variation von c in der Polargleichung

$$\rho = c e^{m\varphi} \sin^n \varphi \quad (1)$$

entstehenden Kurvenschar betrachtet, und zwar unter Anwendung kartesischer Koordinaten. Man kann nun allgemein die orthogonalen oder schiefen Trajektorien der durch

$$\rho = c e^{m\varphi} \sin^n a\varphi \quad (2)$$

bei variablem c definierten Schar untersuchen, die ja eine ganze Reihe bekannter Kurvenfamilien umfaßt, nämlich:

I. Für $m=0$ die vielfach als Radialen²⁾ der durch die natürliche Gleichung³⁾

$$s = \lambda \int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{c}\right)^\alpha - 1}} \quad (3)$$

dargestellten Kurvenfamilie behandelten Kurven mit der Polargleichung:

$$\rho = c \sin^n a\varphi. \quad (4)$$

Hierunter befinden sich

a) für $n = \pm \frac{1}{a}$ die Sinusspiralen,⁴⁾ die ja auch in der Funktionentheorie bei der konformen Abbildung $w = z^n$ als Bilder von Geraden der z -Ebene auftreten,

¹⁾ Sur les courbes représentées par l'équation polaire $\rho e^{n\theta} \sin^m \theta = c$, XXXVII, 1914. Siehe übrigens auch die Aufgabe der Bestimmung orthogonaler Trajektorien für gewisse Sinusspiralen von W. Gäddecke, Arch. Math. Phys., XIX, S. 361 und meine Lösung, ebenda, XX, S. 289.

²⁾ Ort der Endpunkte der den Krümmungsradien äquipollenten Radienvektoren; siehe etwa H. Wieleitner, Spezielle ebene Kurven. S. Schubert, 1908, S. 362; G. Loria, Spezielle ebene Kurven, Theorie und Geschichte, zweite Aufl., Bd. II, Leipzig 1911; L. Braude, Les coordonnées intrinsèques, théorie et applications, Coll. Scientia, Paris 1914, S. 64.

³⁾ E. Cesàro, Vorlesungen über natürl. Geometrie, Leipzig 1901, p. 76,

⁴⁾ F. Teixeira, Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches, Coimbra 1909, pag. 259; G. Loria, II, pag. 470; H. Wieleitner, pag. 134.

β) für $n = 1$ die Rosenkurven,¹⁾
 γ) für $n = -1$ deren Inversen, die Ährenkurven,²⁾
 δ) für $n = +2$ bestimmte Konchoiden der Rosenkurven, die, wie die beiden vorangehenden, mit den Zykloidalen eng verwandt sind.

ε) für $a = 1$ die Clairautschen Multiplikatrixkurven.³⁾

II. α) für $m \neq 0$ und $n = 1$ die als Verallgemeinerung der Rosenkurven aufzufassenden Kurven

$$\rho = ce^{m\varphi} \sin a\varphi \quad (5)$$

Es sind dies Fußpunktkurven oder auch Radialen der zuerst wohl von Herrn E. Koestlin, bald darauf eingehend von mir betrachteten Kurven mit der natürlichen Gleichung:

$$R = ce^{m\varphi} \sin n\varphi \text{ oder speziell } (n = 0) \quad (6)$$

$$R = ce^{m\varphi} \varphi, \quad (6')$$

die ich als Logarithmoidalen bezeichnet habe.⁴⁾

β) Für $m \neq 0$ und $n = 2$ ergeben sich Kurven, für die (6) oder (6') Evolutoiden sind.

2. Es seien nun die schiefen Trajektorien der durch Variation von c in

$$r = cf(\varphi) \quad (7)$$

entstehenden Kurvenschar bestimmt. Der Winkel der Normalen mit dem Radius vector ist

$$\Theta = \operatorname{arctg} \frac{dr}{r d\varphi} = \operatorname{arctg} \frac{r'}{r}. \quad (8)$$

Für die unter dem Winkel α durchsetzende Trajektorie wird $\Theta_1 = \Theta + \alpha$, also, wenn ρ und φ die Polarkoordinaten der Trajektorie sind:

$$\frac{d\rho}{\rho d\varphi} = \frac{r' + r \operatorname{tg} \alpha}{r - r' \operatorname{tg} \alpha}. \quad (9)$$

Folglich wird die Polargleichung der Trajektorien:

$$\rho = ce^{\int \frac{r' + r \operatorname{tg} \alpha}{r - r' \operatorname{tg} \alpha} d\varphi}. \quad (10)$$

Für die orthogonalen Trajektorien folgt:

$$\rho = ce^{-\int \frac{r}{r'} d\varphi}. \quad (10')$$

¹⁾ G. Teixeira, II, p. 211; G. Loria, I, p. 358.

²⁾ G. Teixeira, II, p. 237; G. Loria, II, p. 108.

³⁾ G. Loria, I, p. 379; C. de Jans, Les courbes multiplicatrices de Clairaut, Gand, 1912.

⁴⁾ L. Braude, Sur quelques généralisations d'une transformation de M. E. Koestlin, Annales Académie Porto, 1914.

Setzt man $r = \frac{1}{u}$, so findet man:

Die Trajektorie (α) der Inversen einer Kurvenschar ist die Inverse der gleichen Trajektorien der ersten Kurvenschar; allgemein ist die Trajektorie (α) der Kurven $f\left[\left(\frac{r}{c}\right), \varphi\right] = 0$ eine Trajektorie (α) der Kurven $f\left[\left(\frac{r}{c}\right)^n, n\varphi\right] = 0$.

Für die Kurven (2) ist nun

$$\frac{r'}{r} = m + n a \operatorname{ctg} a \varphi, \quad (11)$$

also für die Trajektorie (α):

$$\begin{aligned} \frac{\rho'}{\rho} &= \frac{m + \operatorname{tg} \alpha + n a \operatorname{ctg} a \varphi}{1 - m \operatorname{tg} \alpha - n a \operatorname{ctg} a \varphi} = \\ &= \frac{n a \cos a \varphi + (m + \operatorname{tg} \alpha) \sin a \varphi}{(1 - m \operatorname{tg} \alpha) \sin a \varphi - n a \operatorname{tg} \alpha \cos a \varphi}. \end{aligned} \quad (12)$$

Setzt man

$$\frac{n a \operatorname{tg} \alpha}{1 - m \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg} \beta,$$

so wird

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{n a \cos a \varphi + (m + \operatorname{tg} \alpha) \sin a \varphi}{\sin (a \varphi - \beta) \sqrt{(1 - m \operatorname{tg} \alpha)^2 + n^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \quad (12')$$

hier sei nun $\varphi = \psi + \frac{\beta}{a}$, was ja nur eine Drehung bedeutet, dann folgt:

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{n a \cos (a \psi + \beta) + (m + \operatorname{tg} \alpha) \sin (a \psi + \beta)}{\sin a \psi \sqrt{(1 - m \operatorname{tg} \alpha)^2 + n^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}} \quad (12'')$$

$$\frac{\rho'}{\rho} = a c_1 \operatorname{ctg} a \psi + c_2, \quad (13)$$

woraus durch Integration folgt:

$$\rho = A e^{c_2 \psi} \sin^{c_1} a \psi, \quad (14)$$

es sind also wieder ähnliche Kurven; im allgemeinen transzendent, aber wenn $c_2 = 0$ ist und c_1 sowie a rational, so sind sie algebraisch.¹⁾ Ebenso sind die schiefen Trajektorien der durch

$$r = c e^{m \varphi} \varphi^n \quad (15)$$

¹⁾ Man findet, daß dies für zwei Werte von $\operatorname{tg} \alpha$, als Funktionen von m, n, a eintritt.

dargestellten Kurven, die aus (2) durch einen passenden Grenzübergang zu $\lim a = 0$ entstehen, wieder ähnliche Kurven. Es sei noch bemerkt, daß sich auch die orthogonalen Trajektorien der durch

$$\varphi = cf(r) \quad (16)$$

bestimmten Kurvenschar durch Quadratur finden lassen; es wird:

$$\varphi = 2 \int \sqrt{c_1 - \int \frac{d \rho f(\rho)}{\rho^2 f'(\rho)}}$$

die Polargleichung derselben.