Theorie der allgemeinen Periodicität.

Von

OTTO RAUSENBERGER in Frankfurt a. M.

Die Theorie der transcendenten Functionen kann auf verschiedenen Grundlagen aufgebaut werden. Man kann das bestimmte Integral als Grundelement ansehen und dadurch zu den wichtigeren Transcendenten gelangen, dass man die Integrale algebraischer Ausdrücke und deren Umkehrungen als neue Functionen einführt. Dieses Verfahren ist bei den elliptischen und in modificirter Weise auch bei den Abel'schen Functionen das historische und konnte in neuerer Zeit durch die Ausbildung der Theorie der complexen Integrale zu hoher Vollkommenheit gebracht werden. Nichtsdestoweniger haben viele der bedeutendsten Analytiker diesen Weg nicht als den naturgemässen erkannt; wenn derselbe auch zu allen Eigenschaften der genannten Transcendenten führt, so ist doch nicht zu verkennen, dass er keinen Einblick in die eigentliche analytische Natur derselben gewährt. Andererseits kann man die unendlichen Reihen und Producte, sowie gewisse Grenzausdrücke zur Definition von Transcendenten benutzen. Der grosse Vorzug dieses Verfahrens liegt darin, dass die genannten Gebilde als Erweiterung der algebraischen Functionen betrachtet werden können und viele Eigenschaften der letzteren auch ihnen zukommen. In der That erscheint die unendliche, für beliebige endliche x convergente Potenzreihe als ganze Function von unendlich hohem Grade; ihre zweite Darstellungsform ist das unendliche Product, zu dem ein nirgends Null werdender Factor hinzutreten kann. Die Erweiterung der rationalen Function ist der Quotient zweier unendlichen Potenzreihen oder Producte; in anderer Form dargestellt giebt sie die unendliche Partialbruchreihe. An diese Gebilde schliessen sich solche unendliche Reihen oder Quotienten derselben an, welche nach Potenzen von rationalen Functionen von x (im einfachsten Fall von $\frac{1}{x}$) fortschreiten. Die verallgemeinerte algebraische Function $y = f(x)$ endlich wird durch eine Gleichung $F(x, y) = 0$ defnirt, in der $F(x, y)$ eine unendliche, aus Potenzen von rationalen Functionen der Grössen x und y gebildete Reihe darstellt.

Das Gebiet der hier skizzirten Functionen ist ein unendlich mannigfaltiges, und es tritt an uns die Frage heran: *Nach welchen Principien sollen wir aus dieser zahllosen Menge Transcendenten auswählen, welche so hervorragende Eigenschaften besitzen, dass sie eine besondere Behandlung verdienen?* Auf diese Frage ist nach meinem Dafürhalten noch keine befriedigende Antwort gegeben worden; die Einführung der periodischen Functionen geschah entweder durch ziemlich willkürliche Definition oder wurde auf Principien von zu geringer Allgemeinheit gestützt. Die vorliegende und einige später nachfolgende Abhandlungen stellen sich die Aufgabe, in der Beantwortung dieser Frage, wenn vielleicht auch nicht ganz zum Ziele, so doch einen Schritt weiter zu gelangen.

§ 1.

Die periodischen Functionen.

Da die eingeführten Functionen, die wir kurzweg als analytische bezeichnen wollen, nur eine Erweiterung der algebraischen sind, so werden wir behufs einer Auswahl uns nach Analogien in der Theorie der letzteren umsehen müssen. Sei, um den einfachsten Fall zu nehmen, die ganze Function

$$y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

gegeben, so kann zu jedem x das zugehörige y mittelst elementarer Operationen berechnet werden. Dagegen lassen sich, wenn $n > 4$ ist, die zu einem gegebenen y gehörigen Werthe von x im Allgemeinen nicht durch Wurzelgrössen u. s. w. ausdrücken, da die definirende Gleichung nicht allgemein algebraisch auflösbar ist. Doch ist bekannt, dass es eine Gruppe höherer Gleichungen giebt, welche eine algebraische Lösung zulassen. Diese sogenannten Abel'schen Gleichungen sind so beschaffen, dass sich ihre Lösungen in der Form darstellen lassen:

$$a, \vartheta(a), \vartheta^2(a), \dots, \vartheta^{n-1}(a),$$

wobei ϑ^* die κ mal iterirte Function ϑ bedeutet und angenommen wird, dass $\vartheta^n(a) = a$ ist.

Abel setzt ausserdem voraus, dass ϑ eine *eindeutige* Function ist; doch lassen sich jedenfalls auch für *mehrdeutige* ϑ ähnliche Betrachtungen durchführen. Durch Anwendung auf algebraische Functionen entspringt hieraus folgender Satz: *Eine algebraische Function $y = F(x)$ ist dann algebraisch umkehrbar* (d. h. ihre Umkehrung ist durch Wurzelgrössen darstellbar), *wenn sie der Functionalgleichung genügt:*

$$F(\vartheta(x)) = F(x),$$

aus der weiter folgt:

$$F(x) = F(\vartheta(x)) = F(\vartheta^2(x)) = \dots = F(\vartheta^{n-1}(x)),$$

wobei wieder angenommen werden muss, dass $\vartheta^n(x) = x$ ist.

Die Ausdehnung dieser Betrachtung auf transcendente Functionen liegt sehr nahe. Lassen wir die Bedingung fallen, dass $\vartheta^n(x) = x$ ist, so wird $F(x)$ für unendlich viele verschiedene x denselben Werth annehmen, also keine algebraische Function mehr sein können, somit, wenn sie überhaupt existirt, eine transcendente Function sein müssen, von der wir wenigstens vermuthen dürfen (die strengere Durchführung muss für später vorbehalten bleiben), dass sich ihre Umkehrung durch eine (im Allgemeinen unendlich grosse) Anzahl von Wurzelgrössen (mit im Allgemeinen unendlich grossen Exponenten) darstellen lassen wird. Die hervorragende analytische Bedeutung dieser Functionen ist hiernach unmittelbar evident. Wenn nun $F(x)$ der Functionalgleichung genügt:

$$F(\varphi(x)) = F(x),$$

wobei wir uns $y = \varphi(x)$ als eine beliebige algebraische Function, d. h. durch eine algebraische Gleichung

$$\varphi_1(x, y) = 0$$

definirt denken wollen, so nennen wir sie eine *periodische Function im weiteren Sinn**) oder auch nur kurzweg eine *periodische Function*, auch wohl zum Unterschied von später einzuführenden Functionen eine *periodische Function erster Gattung*. Die gewöhnlich sogenannten periodischen Functionen sind ein specieller Fall der hier definirten; es ist bei ihnen

$$F(x + n) = F(x).$$

§ 2.

Das algebraische Functionaltheorem.

1. Wir beweisen jetzt einen Satz, welcher die Erweiterung (auch in Bezug auf den Beweis) eines, soviel mir bekannt, von Herrn Weierstrass herrührenden Theorems ist und von einem ganz anderen Gesichtspunkte aus den periodischen Functionen eine hervorragende Wichtigkeit verleiht. Wir fragen: für welche Functionen $f(x)$ besteht ein algebraisches Functionaltheorem derart, dass

$$(1) \quad f[\psi(x, y)] = \varphi[f(x), f(y)]$$

ist, wobei φ und ψ algebraische, d. h. durch algebraische Gleichungen definirte Functionen bedeuten; oder in Worten ausgesprochen: *Wann lässt sich eine Function einer algebraischen Function zweier Variabeln algebraisch ausdrücken durch die Functionen der einfachen Variabeln?*

*) Vgl. hiermit: Comptes rendus, 1879, I, p. 807, Note de M. Appell.

2. Zunächst ist klar, dass wenn für $f(x)$ jenes Functionaltheorem gültig ist, auch für die Umkehrung desselben, $F(x)$, ein solches stattfinden muss. Denn nehmen wir von beiden Seiten die Function F und setzen statt x und y $F(x)$ und $F(y)$, so wird aus (1):

$$F[f[\psi(F(x), F(y))]] = F[\varphi[f(F(x)), f(F(y))]],$$

oder wenn man beachtet, dass

$$F[f(x)] = x \quad \text{und} \quad f[F(x)] = x$$

ist,

$$\psi[F(x), F(y)] = F[\varphi(x, y)].$$

In Bezug auf die Vieldeutigkeit der vorkommenden Functionen bemerken wir zu dem Vorhergehenden wie zu dem Folgenden, dass wir die betreffenden Gleichungen als befriedigt ansehen, wenn mindestens eine Gruppe der möglichen Werthe denselben genügt.

Beispiel: Für $\tan x$ gilt das Functionaltheorem

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y};$$

hieraus folgt:

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x + y}{1 - xy}.$$

3. Dass alle algebraischen Functionen Gleichungen von der Form (1) genügen, ist unmittelbar evident; es handelt sich nur darum, die transcendenten analytischen Functionen aufzusuchen, welchen diese Eigenschaft zukommt. Dieselben sind alle der Art, dass sie entweder für unendlich viele x denselben Werth $a = f(x)$ annehmen, oder dass dies wenigstens bei ihrer Umkehrung stattfindet. Im letzteren Fall brauchen wir nach dem Vorhergehenden nur ihre Umkehrung zu untersuchen. Seien nun $y_1, y_2, \dots, y_n$, wobei n die Anzahl der verschiedenen Werthe von F übersteigen muss, so gewählt, dass

$$f(y_1) = f(y_2) = \dots = f(y_n) = a$$

wird, ohne dass jedoch $\psi(x, y_r) = \psi(x, y_s)$ ist, eine Wahl, die immer getroffen werden kann, da wir unendlich viele y , die der ersten Bedingung genügen, zur Verfügung haben und $\psi(x, y)$ als algebraische Function nur für eine endliche Anzahl der y denselben Werth annimmt. Dann haben wir

$$\varphi[f(x), a] = f[\psi(x, y_1)],$$

$$\varphi[f(x), a] = f[\psi(x, y_2)],$$

$$\vdots$$

$$\varphi[f(x), a] = f[\psi(x, y_n)].$$

Da aber die Zahl dieser Gleichungen die Zahl der verschiedenen Werthe von $\varphi[f(x), a]$ übersteigt, so müssen mindestens 2 dieser Grössen übereinstimmen, woraus folgt, dass etwa

$$f[\psi(x, y_r)] = f[\psi(x, y_s)]$$

ist. Setzen wir nun aber x statt $\psi(x, y_s)$, so ist $\psi(x, y_r)$ eine algebraische Function $\vartheta(x)$ dieses neuen x , und wir erhalten für $f(x)$ die Functionalgleichung:

$$f[\vartheta(x)] = f(x),$$

d. h. $f(x)$ ist eine periodische Function. Wir haben somit folgenden Satz bewiesen:

Jede Function, welche ein algebraisches Functionalththeorem der oben definirten Art besitzt, ist entweder algebraisch, oder periodisch, oder die Umkehrung einer periodischen Function.

§ 3.

Die Periodicitätsgleichung.

1. Ist $F[\varphi_1(x)] = F(x)$, so bezeichnen wir $y = \varphi_1(x)$ oder auch die entsprechende implicite Gleichung $f(x, y) = 0$, welche zwei der Argumente, für die $F(x)$ denselben Werth annimmt, mit einander verbindet, als die zu $F(x)$ gehörige Periodicitätsgleichung. Wir setzen dieselbe in der Folge stets als algebraisch voraus. Bedeutet nun $\varphi_{-x}(x)$ die x -fach iterirte Function $\varphi_1(x)$, $\varphi_{-1}(x)$ die Umkehrung von $\varphi_1(x)$ und $\varphi_{-x}(x)$ die x -fach iterirte Function $\varphi_{-1}(x)$, so ergeben sich, wenn man an Stelle von x $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\dots$, $\varphi_{-1}(x)$ u. s. w. setzt, aus der Gleichung

$$F[\varphi_1(x)] = F(x)$$

die folgenden:

$$\begin{aligned} F(x) &= F[\varphi_1(x)] = F[\varphi_2(x)] = \dots \\ &= F[\varphi_{-1}(x)] = F[\varphi_{-2}(x)] = \dots \end{aligned}$$

Man ersieht hieraus, dass man $F(x)$ auch die Periode $\varphi_{-1}(x)$ zuschreiben und somit in der Periodicitätsgleichung $f(x, y) = 0$ x mit y vertauschen darf. Dass ausserdem $F(x)$ auch die Periode $\varphi_x(x)$ hat, ist ohne Weiteres evident.

2. Setzen wir in $F(x)$ statt x eine algebraische Function dieser Grösse, $\psi_1(x)$, so dass wir haben $F_1(x) = F[\psi_1(x)]$, und hat wieder $F(x)$ die Periodicitätsgleichung $y = \varphi_1(x)$ oder $f(x, y) = 0$, so behaupte ich, dass $F_1(x)$ ebenfalls periodisch ist und (wenn wir, wie in der Folge, die sich häufenden Klammern theilweise weglassen) die Periodicitätsgleichung $y = \psi_{-1} \varphi_1 \psi_1(x)$ oder in impliciter Form $f[\psi_1(x), \psi_1(y)] = 0$ hat. Setzen wir nämlich y in $F_1(x)$ und beachten, dass $\psi_1 \psi_{-1}(x) = \psi_{-1} \psi_1(x) = x$ ist, so erhalten wir

$$F_1[\psi_{-1} \varphi_1 \psi_1(x)] = F[\psi_1 \psi_{-1} \varphi_1 \psi_1(x)] = F[\varphi_1 \psi_1(x)],$$

oder da

$$F[\varphi_1(x)] = F(x)$$

und

$$F(x) = F_1[\psi_{-1}(x)]$$

sein muss,

$$F_1[\psi_{-1}\varphi_1\psi_1(x)] = F[\psi_1(x)] = F_1(x).$$

Haben wir daher die Functionen aufgestellt, welchen die Periodicitäts-gleichung $y = \varphi_1(x)$ oder $f(x, y) = 0$ zukommt, so können wir durch die angegebene Functionalsubstitution alle herleiten, welche die Periodicitäts-gleichung

$$y = \psi_{-1}\varphi_1\psi_1(x) \quad \text{oder} \quad f[\psi_1(x), \psi_1(y)] = 0$$

besitzen. Wir werden daher diese doppelte Substitution, welche auch bei anderen, verwandten Untersuchungen von Wichtigkeit ist, anwenden, um verschiedene Arten von Perioden auf gewisse Normalfälle zurückzuführen.

Beispiel: Es ist $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, so dass $\sin x$ die Periodicitäts-gleichung $y = x + 2\pi$ zukommt. Wählen wir nun $\psi_1(x) = x^2$, also $\psi_{-1}(x) = \sqrt{x}$, so finden wir, dass $\sin x^2$ die Periodicitäts-gleichung

$$y^2 = x^2 + 2\pi \quad \text{oder} \quad y = \sqrt{x^2 + 2\pi}$$

hat. In der That erhalten wir, wenn wir y statt x in $\sin x^2$ einsetzen:

$$\sin [\sqrt{x^2 + 2\pi}]^2 = \sin(x^2 + 2\pi) = \sin x^2.$$

§ 4.

Die wiederkehrenden Perioden.

1. Unter den algebraischen Periodicitäts-gleichungen $y = \varphi_1(x)$ oder $f(x, y) = 0$ werden wir zunächst diejenigen auszusuchen haben, welche wiederkehrende Perioden liefern und in Folge dessen zu keinen transcendenten periodischen Functionen führen, d. h. solche, bei denen $\varphi_n(x) = x$ ist. Es handelt sich also darum, alle algebraischen Functionen aufzufinden, welche n mal iterirt wieder auf x zurückführen. Bemerkt muss werden, dass die folgende Untersuchung für mehrdeutige (etwa n -deutige) Functionen $\varphi_1(x)$ nur insofern gültig ist, als wir bloß verlangen, dass *einer* der n^* Werthe, die $\varphi_n(x)$ eventuell annehmen kann, gleich x ist.

Eine Function der gesuchten Art lässt sich sofort angeben. Setzen wir nämlich $y = \varphi_1(x) = \alpha x$, wobei α eine n^{te} Einheitswurzel bedeutet, so ist

$$\varphi_n(x) = \alpha^n x = x.$$

Aber auch die Functionen, welche durch Anwendung der Functionalsubstitution aus der eben gefundenen hergeleitet werden können, genügen der Bedingung*); denn ist

*) Die Anwendung der Functionalsubstitution auf $y = \alpha x$, um Functionen der besprochenen Art aufzustellen, findet sich bereits in einem Werke von Hill; doch

oder kürzer

$$\varphi_1(x) = \psi_{-1}[\alpha \cdot \psi_1(x)]$$

so haben wir

$$\varphi_1(x) = \psi_{-1} \alpha \psi_1(x),$$

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \psi_{-1} \alpha \psi_1 \psi_{-1} \alpha \psi_1 \cdots \psi_{-1} \alpha \psi_1(x) = \psi_{-1} \alpha^n \psi_1(x) \\ &= \psi_{-1} \psi_1(x) = x, \end{aligned}$$

wobei auf die oben gemachte Bemerkung über die Vieldeutigkeit der vorkommenden Functionen Rücksicht zu nehmen ist.

Ich behaupte nun aber, dass alle möglichen Functionen $\varphi_1(x)$ von der gesuchten Art durch die Functionalsubstitution aus $y = \alpha x$ (wobei α alle vorhandenen n^{ten} Einheitswurzeln darstellen mag) hergeleitet werden können. Dies ist bewiesen, wenn ich wirklich eine Substitution angebe, welche das Verlangte leistet. Diese ist aber

$$\psi_1(x) = x + \alpha^{n-1} \varphi_1(x) + \alpha^{n-2} \varphi_2(x) + \cdots + \alpha \varphi_{n-1}(x).$$

Führen wir nämlich dieselbe in $y = \alpha x$ ein, so wird daraus

$$\psi_1(y) = \alpha \psi_1(x),$$

oder

$$\begin{aligned} y + \alpha^{n-1} \varphi_1(y) + \alpha^{n-2} \varphi_2(y) + \cdots + \alpha \varphi_{n-1}(y) \\ = \alpha [x + \alpha^{n-1} \varphi_1(x) + \alpha^{n-2} \varphi_2(x) + \cdots + \alpha \varphi_{n-1}(x)]. \end{aligned}$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist in der That $y = \varphi_1(x)$; denn setzen wir darin diese Grösse für y ein, so wird die linke Seite, da $\alpha^n = 1$, $\varphi_n(x) = x$ ist, zu

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) + \alpha^{n-1} \varphi_2(x) + \alpha^{n-2} \varphi_3(x) + \cdots + \alpha x \\ = \alpha [x + \alpha^{n-1} \varphi_1(x) + \alpha^{n-2} \varphi_2(x) + \cdots + \alpha \varphi_{n-1}(x)], \end{aligned}$$

was mit der rechten Seite übereinstimmt.

Diese Substitution wird indessen unbrauchbar, wenn

$$\psi_1(x) = x + \alpha^{n-1} \varphi_1(x) + \alpha^{n-2} \varphi_2(x) + \cdots + \alpha \varphi_{n-1}(x)$$

identisch zu einer Constanten c wird. Setzen wir in diesem Ausdruck $\varphi_1(x)$ statt x , so wird daraus

$$\varphi_1(x) + \alpha^{n-1} \varphi_2(x) + \alpha^{n-2} \varphi_3(x) + \cdots + \alpha x = \alpha \psi_1(x) = \alpha \cdot c;$$

fehlt daselbst der Nachweis, dass man dieselben auf diese Weise *sämmtlich* erhält. Für *lineare* Functionen ist die allgemeine Untersuchung in verschiedener Weise durchgeführt von Herrn F. Klein, Annalen Bd. IX, pag. 183 und Herrn Gordan, Annalen Bd. XII, pag. 23, von Herrn Camille Jordan in Borchardt's Journal Bd. 84, p. 89. In den genannten Abhandlungen sind die binären Formen mit linearen Transformationen in sich aufgestellt, somit die *algebraischen* Functionen construirt, welche eine lineare Periodicitätsgleichung besitzen. Es ist hier nach gerechtfertigt, wenn die folgenden Untersuchungen auf *transcendente* Functionen beschränkt werden. — Ausserdem ist zu citiren: Serret, Handbuch der höheren Algebra, deutsche Uebersetzung, 1879, Bd. 2, pag. 290 ff.

es muss demnach $c = \alpha \cdot c$, also $c = 0$ sein; $\psi_1(x)$ verschwindet dann identisch. In diesem Falle wählen wir die Substitution:

$$\begin{aligned}\psi_1'(x) &= \alpha^{n-1} x \varphi_1(x) + \alpha^{n-2} x \varphi_2(x) + \dots + \alpha^{n-k_1} \alpha^{n-k_2} \varphi_{k_1}(x) \varphi_{k_2}(x) + \dots \\ &= \sum_{\substack{k_1=0, 1, 2, \dots, n-1 \\ k_2=0, 1, 2, \dots, n-1 \\ k_2 < k_1}} \alpha^{2n-k_1-k_2} \varphi_{k_1}(x) \varphi_{k_2}(x),\end{aligned}$$

und man überzeugt sich leicht wie oben, dass durch dieselbe $y = \varphi_1(x)$ aus $y = \alpha^2 \cdot x$ hergeleitet wird. Falls auch dieser Ausdruck identisch verschwindet (eine von 0 verschiedene Constante kann er wieder nicht sein), so leiten wir $y = \varphi_1(x)$ durch die Substitution

$$\psi_1''(x) = \sum \alpha^{3n-k_1-k_2-k_3} \varphi_{k_1}(x) \varphi_{k_2}(x) \varphi_{k_3}(x)$$

aus $y = \alpha^3 \cdot x$ her u. s. w.

So können wir weitergehen bis zu

$$\psi_1^{(n-2)}(x) = \sum \alpha^{(n-1)n-k_1-k_2-\dots-k_{n-1}} \varphi_{k_1}(x) \varphi_{k_2}(x) \dots \varphi_{k_{n-1}}(x).$$

Sollte auch diese Substitution nebst allen vorhergehenden zu Null werden, so wollen wir $\varphi_1(x)$ dadurch bestimmen, dass wir eine Gleichung bilden, welche die n Lösungen

$$x, \alpha^{n-1} \varphi_1(x), \alpha^{n-2} \varphi_2(x), \dots, \alpha \varphi_{n-1}(x)$$

besitzt und lautet:

$$(X-x)(X-\alpha^{n-1} \varphi_1(x))(X-\alpha^{n-2} \varphi_2(x)) \dots (X-\alpha \varphi_{n-1}(x)) = 0.$$

Multipliciren wir diese Gleichung aus, so nimmt dieselbe nach bekannten Regeln die Gestalt an:

$$X^n - \psi_1(x) X^{n-1} + \psi_1'(x) X^{n-2} - \dots \pm \psi_1^{(n-2)}(x) X - \Phi(x) = 0,$$

worin $\Phi(x)$ eine unbekannte Function bezeichnet. Da aber voraussetzungsmässig

$$\psi_1(x) = \psi_1'(x) = \dots = \psi_1^{(n-2)}(x) = 0$$

ist, so geht die Gleichung über in

$$X^n - \Phi(x) = 0 \quad \text{oder} \quad X = \sqrt[n]{\Phi(x)} = \alpha^k \chi(x).$$

Geben wir k alle Werthe von 0 bis $n-1$, so müssen wir für X die n Werthe

$$x, \alpha^{n-1} \varphi_1(x), \alpha^{n-2} \varphi_2(x), \dots, \alpha \varphi_{n-1}(x)$$

erhalten. Sei etwa

$$x = \alpha^r \chi(x) \quad \text{und} \quad \alpha^{n-1} \varphi_1(x) = \alpha^s \chi(x),$$

so folgt daraus durch Elimination von $\chi(x)$

$$\varphi_1(x) = \alpha^{s-n-r+1} x,$$

d. h. $\varphi_1(x)$ hat bereits die gewünschte Form.

2) In dem besonderen Falle, dass $\varphi_2(x) = x$ sein soll, haben wir $\alpha = -1$ zu setzen. Wir erhalten dann die Gleichung

$$\psi_1(y) = -\psi_1(x)$$

oder

$$\psi_1(y) + \psi_1(x) = 0,$$

d. h. die Periodicitätsgleichung ist in x und y symmetrisch. Dass auch das Umgekehrte gilt, leuchtet sofort ein.

§ 5.

Die rationale Periodicität.

1. Es handelt sich nunmehr darum, die algebraischen Periodicitätsgleichungen, welche transcendenten Functionen zugehören, mittelst der Functionalsubstitution auf gewisse Normalfälle zu reduciren*). Betrachten wir zuerst die allgemeinste in Bezug auf x und y rationale Periodicitätsgleichung

$$axy + bx + cy + d = 0,$$

in der vorläufig a von 0 verschieden sein möge.

Wir wenden auf dieselbe die Substitution

$$\psi_1(x) = \frac{\alpha + \beta x}{\gamma + \delta x}$$

an, deren Coefficienten noch unbestimmt und nur der Bedingung unterworfen sein sollen, dass ihre Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

nicht verschwindet. Wir erhalten dann

$$a \frac{\alpha + \beta x}{\gamma + \delta x} + b \frac{\alpha + \beta y}{\gamma + \delta y} + c \frac{\alpha + \beta x}{\gamma + \delta x} + d = 0,$$

oder ausmultipliziert

$$[a\beta^2 + (b+c)\beta\delta + d\delta^2]xy + [a\alpha\beta + b\beta\gamma + c\alpha\delta + d\gamma\delta]x + [a\alpha\beta + b\alpha\delta + c\beta\gamma + d\gamma\delta]y + [a\alpha^2 + (b+c)\alpha\gamma + d\gamma^2] = 0.$$

Man ersieht leicht, dass man unter allen Umständen β und δ so bestimmen kann, dass

$$a\beta^2 + (b+c)\beta\delta + d\delta^2 = 0$$

wird, ohne dass man gleichzeitig $\beta = 0$ und $\delta = 0$ annehmen müsste. Wir können daher der weiteren Transformation eine einfachere Periodicitätsgleichung zu Grunde legen, welcher das Glied mit xy fehlt:

$$ax + by + c = 0.$$

*) Die folgende Untersuchung ist, soweit sie sich auf lineare Transformationen bezieht, als bekannt anzunehmen und soll nur des Zusammenhangs wegen vollständig durchgeführt werden.

Durch die Substitution

$$\psi_1(x) = \alpha + \beta x$$

geht dieselbe über in

$$a \cdot (\alpha + \beta x) + b \cdot (\alpha + \beta y) + c = 0.$$

Diesen Ausdruck kann man auf die Normalform

$$y = p \cdot x$$

bringen, wenn man

$$a\alpha + b\alpha + c = 0,$$

also

$$\alpha = -\frac{c}{a+b},$$

$$b\beta = 1, \text{ also } \beta = \frac{1}{b}$$

und

$$a\beta = p, \text{ also } p = \frac{a}{b}$$

setzt. Diese Reduction wird nur dann unmöglich, wenn $a + b = 0$ ist, d. h. wenn die Periodicitätsgleichung in der Form

$$y = x + n$$

geschrieben werden kann. —

Hieraus folgt, dass sich alle rationalen Periodicitätsgleichungen auf 2 Normalformen zurückführen lassen:

$$1) \ y = px,$$

$$2) \ y = x + n.$$

2. Wir wollen nun weiter beweisen, dass diese beiden Normalfälle nicht durch eine algebraische Substitution in einander übergeführt werden können.

Wäre nämlich $z = \psi_1(x)$ eine algebraische Function, welche durch die Gleichung $F(x, z)$, die wir offenbar als irreductibel voraussetzen dürfen, da sie sonst in mehrere zerlegt werden könnte, definirt sein soll, so beschaffen, dass sie als Functionalsubstitution in die Gleichung $y = x + n$ eingesetzt dieselbe in $y = px$ überführte, so müsste

$$\psi_1(y) = \psi_1(x) + n$$

durch $y = px$ befriedigt werden, so dass wir hätten:

$$\psi_1(px) = \psi_1(x) + n.$$

Diese Relation kann aber, wenn wir zur definirenden Gleichung $F(x, z) = 0$ zurückgreifen, auch so ausgedrückt werden: die Gleichungen $F(x, z) = 0$ und $F(px, z + n) = 0$ sollen für übereinstimmende x durch ein gleiches z befriedigt werden. Da aber voraussetzungsmässig $F(x, z) = 0$ irreductibel und $F(px, z + n) = 0$ von dem nämlichen Grad in x und z sein muss, so folgt, dass $F(x, z)$ und $F(px, z + n)$ bis auf einen constanten Factor identisch sind. Seien

nun etwa die höchsten Glieder in Bezug auf z von $F(x, z)$ nach fallenden Potenzen von x geordnet:

$$z^k(a_1 x^{r_1} + a_2 x^{r_2} + \dots) + z^{k-1}(b_1 x^{s_1} + b_2 x^{s_2} + \dots) + \dots,$$

so hätten wir für beliebige x und z die Gleichung zu befriedigen:

$$\begin{aligned} & (z + n)^k \cdot (a_1 p^{r_1} x^{r_1} + a_2 p^{r_2} x^{r_2} + \dots) \\ & + (z + n)^{k-1} \cdot (b_1 p^{s_1} x^{s_1} + b_2 p^{s_2} x^{s_2} + \dots) + \dots \\ & = C \cdot [z^k(a_1 x^{r_1} + a_2 x^{r_2} + \dots) + z^{k-1}(b_1 x^{s_1} + b_2 x^{s_2} + \dots) + \dots]. \end{aligned}$$

Nach Entwicklung der Potenzen von $z + n$ ergibt aber die Coefficientenvergleichung der ersten Glieder mit z^k und z^{k-1} : $a_1 p^{r_1} = C a_1$, also, da wir a_1 als Coefficienten des höchsten Gliedes als von 0 verschieden annehmen müssen,

$$C = p^{r_1};$$

ferner

$$\begin{aligned} k n [a_1 p^{r_1} x^{r_1} + a_2 p^{r_2} x^{r_2} + \dots] + b_1 p^{s_1} x^{s_1} + b_2 p^{s_2} x^{s_2} + \dots \\ = C \cdot (b_1 x^{s_1} + b_2 x^{s_2} + \dots). \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann für beliebige x nur dann statthaben, wenn auf beiden Seiten gleich hohe Potenzen von x vorhanden sind, wenn also etwa $r_1 = s_1$ ist; dann haben wir

$$k n a_1 p^{r_1} + b_1 p^{r_1} = C \cdot b_1,$$

oder

$$k n a_1 p^{r_1} + b_1 p^{r_1} = p^{r_1} b_1,$$

oder

$$k n a_1 + b_1 = b_1,$$

eine Gleichung, die in keiner Weise zu befriedigen ist, da k, n, a_1 nothwendig von 0 verschieden sind. *Die beiden Normalfälle sind also wesentlich von einander verschieden.*

3. Wir haben nun noch zu untersuchen, wie weit sich die beiden Normalperiodicitätsgleichungen in andere *derselben* Art transformiren lassen. Wenden wir auf $y = x + n$ die Substitution $\psi_1(x) = \frac{n}{m} \cdot x$ an, so erhalten wir $y \cdot \frac{n}{m} = x \cdot \frac{n}{m} + n$ oder $y = x + m$, so dass wir jede Function mit einer additiven Periode durch eine lineare Substitution in eine andere derselben Art mit beliebiger anderer Periode verwandeln können.

4. Weniger einfach ist die Untersuchung, wann sich $y = px$ in $y = qx$ überführen lässt. Sei wieder $z = \psi_1(x)$ eine algebraische Substitution, die das Gewünschte leistet und die durch die irreductible Gleichung $F(x, z) = 0$ bestimmt ist. Dann müsste $\psi_1(y) = p \psi_1(x)$ durch $y = qx$ befriedigt werden, so dass wir hätten $\psi_1(qx) = p \psi_1(x)$, oder $F(qx, p\psi) = 0$ müsste mit $F(x, z) = 0$ eine gemeinschaftliche

Lösung haben, also wieder, da $F(x, z) = 0$ irreductibel ist, mit ihm bis auf eine multiplicatorische Constante übereinstimmen. Sind

$$a_1 x^{r_1} z^{s_1} + a_2 x^{r_2} z^{s_2} + \dots$$

einige Glieder von $F(x, z)$, so würden wir zu setzen haben

$$\begin{aligned} a_1 q^{r_1} p^{s_1} x^{r_1} z^{s_1} + a_2 q^{r_2} p^{s_2} x^{r_2} z^{s_2} + \dots \\ = C a_1 x^{r_1} z^{s_1} + C a_2 x^{r_2} z^{s_2} + \dots, \end{aligned}$$

und es wäre eine Reihe Gleichungen von der Form

$$a q^r p^s = C a$$

zu befriedigen. Sei nun a von 0 verschieden, so ist

$$C = q^r p^s;$$

eine andere dieser Gleichungen, etwa

$$a' q^u p^v = C a'$$

lässt sich nur dann befriedigen ohne $a' = 0$ zu setzen, wenn $q^u p^v = q^r p^s$ ist. Alle übrigen Glieder müssen nothwendiger Weise verschwinden. Die Gleichung wird daher lauten

$$a x^r z^s + a' x^u z^v = 0,$$

oder kürzer

$$z^k = C x^{k_1},$$

oder

$$z = c x^{\frac{k_1}{k}},$$

wobei k und k_1 ganze, positive oder negative Zahlen sind. Wir führen durch diese Substitution $y = p x$ über in $c y^{\frac{k_1}{k}} = c p x^{\frac{k_1}{k}}$ oder

$$y = p^{\frac{k}{k_1}} x.$$

Man kann also $y = p x$ in $y = q x$ nur dann durch eine algebraische Substitution verwandeln, wenn q eine rational gebrochene, positive oder negative Potenz von p ist.

5. Das Gesamtergebn lautet:

Es gibt nur 2 wesentlich verschiedene Arten von rationalen Perioden: die additive und die multiplicatorische. Für die additiv periodischen Functionen ist die Grösse der Periode nicht charakteristisch, während dies bei den Functionen mit multiplicatorischer Periode der Fall ist. Da die letzteren von einer gewissen constanten Grösse, einem Modul, abhängig sind, so schlage ich für sie den Namen *Modularfunctionen* vor, der von Gudermann den mit ihnen nahe verwandten elliptischen Functionen beigelegt wurde.

6. Obgleich ich die Construction dieser periodischen Functionen auf eine spätere Gelegenheit verschiebe, so will ich doch folgende Bemerkung über ihre Form beifügen. Ist $f(x + kn) = f(x)$, so wird

diese Gleichung auch für $k = \infty$ gelten müssen, d. h. eine additiv periodische Function nimmt für $x = \infty$ alle Werthe an, die sie überhaupt für irgend ein x besitzt; $x = \infty$ ist also ein wesentlicher Unstetigkeitspunkt derselben. Hat sie noch einen andern wesentlichen Unstetigkeitspunkt, etwa $x = a$, so müssen wegen der Periodicität auch $x = a + kn$ solche sein, d. h. eine additiv periodische Function hat entweder einen wesentlichen Unstetigkeitspunkt, nämlich $x = \infty$, oder unendlich viele. Im ersten Fall lässt sie sich, wenn sie eindeutig ist, als Potenzreihe von x mit nur positiven Potenzen oder als Quotient zweier solcher Reihen darstellen.

7. Eine entsprechende Betrachtung ergibt, dass eine multiplikatorisch periodische Function zwei wesentliche Unstetigkeitspunkte besitzt, nämlich $x = \infty$ und $x = 0$; hat sie deren noch mehr, so hat sie unendlich viele. Im ersten Fall muss sie sich (ihre Existenz überhaupt sowie ihre Eindeutigkeit vorausgesetzt) als Potenzreihe mit steigenden und fallenden Potenzen von x oder (was thatsächlich allein möglich ist) als Quotient zweier derartiger Reihen darstellen lassen.

§ 6.

Algebraische Hilfsuntersuchungen.

Jede Art von Periodicität, welche nicht durch die Gleichung

$$axy + bx + cy + d = 0$$

bestimmt ist, muss als irrational und mehrdeutig bezeichnet werden. Denn lautet etwa die Periodicitätsgleichung $y = x^2$, so wäre zwar y rational durch x , aber nicht x durch y ausgedrückt, und wenn $F(x^2) = F(x)$ ist, so muss auch $F(\sqrt{x}) = F(x)$ sein. Bevor wir in dessen der Untersuchung dieser irrationalen Perioden näher treten, müssen wir einige allgemeinere Betrachtungen über algebraische Functionen vorausschicken.

1) Sei $y = f(x)$ eine durch die *irreducible* Gleichung

$$F(y, x) = 0,$$

die in y vom n^{ten} Grade sein möge, definirte algebraische Function. Es ist bekannt, dass die n Werthe von y im Allgemeinen (einzelne x ausgenommen) von einander verschieden sind, aber dadurch sämmtlich in einander übergeführt werden können, dass man die Variable x einen geschlossenen Weg zurücklegen lässt. Werden nun diese n Werthe von y mit

$$y_1 = f^{(1)}(x), \quad y_2 = f^{(2)}(x), \quad \dots, \quad y_n = f^{(n)}(x)$$

bezeichnet, so ist einleuchtend, dass sich jeder derselben als algebraische Function eines beliebigen andern darstellen lässt; denn man braucht nur aus

$$y_r = f^{(r)}(x) \quad \text{und} \quad y_s = f^{(s)}(x)$$

x zu eliminiren, um eine algebraische Gleichung zwischen y_r und y_s herzuleiten. Wir nennen diese algebraische Beziehung zwischen je zwei Werthen einer algebraischen Function den *Zusammenhang* derselben und die Gleichung, welche denselben bestimmt, die *Zusammenhangsgleichung*.

Sei nun für beliebige x

$$y_2 = \varphi_1(y_1),$$

so ist klar, dass $\varphi_1(y_1)$ auch dann noch eine Lösung von $F(y, x) = 0$ darstellen wird, wenn y_1 durch stetige Aenderung von x in y_2 übergeführt wird, dass also etwa

$$y_3 = \varphi_1(y_2) = \varphi_2(y_1)$$

sein muss. Ebenso werden die übrigen Iterationen von $\varphi_1(y_1)$ (d. h. immer je *ein* Werth dieser im Allgemeinen *mehrdeutigen* Functionen) Lösungen von $F(y, x) = 0$ sein müssen. Da die Anzahl dieser Lösungen eine endliche ist, so muss φ_1 eine Function sein, welche nach einer endlichen Zahl von Iterationen wieder auf den Ausgangswerth zurückführt, mithin sich nach § 4. in der Form

$$\varphi_1(y_1) = \psi_{-1} \alpha \psi_1(y_1)$$

darstellen lassen (ψ_1 ist eine algebraische Function, α eine k^{te} Einheitswurzel). — Haben wir nun

$$\begin{aligned} y_2 &= \varphi_1(y_1), \\ y_3 &= \varphi_2(y_1), \\ &\vdots \\ y_k &= \varphi_{k-1}(y_1), \\ y_1 &= \varphi_k(y_1), \end{aligned}$$

so wird auch etwa

$$\begin{aligned} y_{k+2} &= \varphi_1(y_{k+1}), \\ y_{k+3} &= \varphi_2(y_{k+1}), \\ &\vdots \\ y_{2k} &= \varphi_{k-1}(y_{k+1}), \\ y_{k+1} &= \varphi_k(y_{k+1}) \end{aligned}$$

sein und kein y der zweiten Reihe wird mit einem der ersten übereinstimmen können. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens lassen sich sämtliche n Werthe von y in Reihen von je k Gliedern ordnen, woraus man erkennt, dass k ein Theiler von n sein muss. Ist ferner

$$y_{k+1} = \chi_1(y_1),$$

so wird $\chi_l(y_1) = y_1$ und l auch ein Theiler von n sein müssen u. s. w. Auf diese Weise können sich noch mehrere Reihen von Zusammenhangsgleichungen zwischen den Lösungen ergeben, falls n sich in

Factoren zerlegen lässt; ist dagegen n eine Primzahl, so muss der Zusammenhang ein einfacher sein, d. h. alle Lösungen lassen sich aus einer einzigen durch Iterirung *einer* Function herleiten. — Als primitiv wollen wir die Zusammenhangsgleichung

$$y_2 = \varphi_1(y_1)$$

bezeichnen, wenn $\varphi_1(y_1)$ nicht die Iterirung einer andern Function $\chi_1(y)$ ist, welche durch ihre Iterirungen eine grössere Anzahl von Functionalwerthen liefert wie $\varphi_1(y_1)$. — Wir sprechen von einem einfachen, doppelten, dreifachen u. s. w. Zusammenhang einer algebraischen Function, wenn sich alle Werthe derselben durch Iterirung einer, zweier, dreier u. s. w. primitiver Zusammenhangsfunctionen aus einer einzigen herleiten lassen.

Einige Beispiele werden die Sache deutlicher machen.

Beispiel 1:

$$(y - 1)^4 = x.$$

Wir haben

$$y_1 = 1 + \sqrt[4]{x},$$

$$y_2 = 1 + i \sqrt[4]{x},$$

$$y_3 = 1 - \sqrt[4]{x},$$

$$y_4 = 1 - i \sqrt[4]{x}.$$

Die Zusammenhangsgleichung zwischen y_2 und y_1 lautet:

$$y_2 - 1 = i(y_1 - 1),$$

oder

$$\varphi_1(y_1) = y_2 = i y_1 + 1 - i.$$

Dieselbe ist primitiv, denn wir haben

$$\varphi_2(y_1) = -y_1 + 2,$$

also

$$y_3 = \varphi_2(y_1),$$

und

$$\varphi_3(y_1) = -i y_1 + 1 + i,$$

also

$$y_4 = \varphi_3(y_1).$$

Dagegen ist

$$\psi_1(y_1) = \varphi_2(y_1) = -y_1 + 2$$

nicht primitiv, da schon

$$\psi_2(y_1) = y_1$$

ist.

Beispiel 2:

$$y^2 - 2yx + x^2 - x = 0,$$

also

$$y_1 = x + \sqrt{x},$$

$$y_2 = x - \sqrt{x},$$

und somit

$$\varphi_1(y_1) = y_2 = 1 + y_1 \pm \sqrt{1 + 4y_1};$$

setzt man hierin y_2 statt y_1 , so folgt

$$\varphi_2(y_1) = 2 + y_1 \pm \sqrt{1 + 4y_1} \pm (2 \pm \sqrt{1 + 4y_1}),$$

worin nur das erste und dritte Doppelzeichen correspondiren. Die Werthe von $\varphi_2(y_1)$ sind also

$$4 + y_1 \pm 2\sqrt{1 + 4y_1} \text{ und } y_1;$$

zwei Werthe geben also wieder die erste Lösung.

Beispiel 3:

$$y^4 - 2y^2 = x,$$

oder

$$y_1 = +\sqrt{1 + \sqrt{1 + x}},$$

$$y_2 = -\sqrt{1 + \sqrt{1 + x}},$$

$$y_3 = +\sqrt{1 - \sqrt{1 + x}},$$

$$y_4 = -\sqrt{1 - \sqrt{1 + x}}.$$

Hier ist der Zusammenhang ein doppelter; denn wir haben

$$y_1 + y_2 = 0$$

und

$$y_1^2 + y_3^2 = 2.$$

2. Die allgemeine Darstellung der Zusammenhangsgleichungen einer durch eine algebraische Gleichung definirten Function ist sehr leicht. Sei

$$y = f(x)$$

durch

$$F(y, x) = y^n + \chi_1(x) y^{n-1} + \chi_2(x) y^{n-2} + \cdots + \chi_{n-1}(x) y + \chi_n(x) = 0,$$

bestimmt, worin die $\chi(x)$ rationale Functionen von x bedeuten, so brauchen wir nur zwischen

$$F(y_r, x) = 0$$

und

$$F(y_s, x) = 0$$

x zu eliminiren. Etwas umständlicher, doch für die Theorie wichtig ist folgende Methode. Wir haben

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + \cdots + y_n &= -\chi_1(x), \\ y_1 y_2 + y_1 y_3 + \cdots + y_{n-1} y_n &= \chi_2(x), \\ &\vdots \\ y_1 y_2 \cdots y_n &= (-1)^n \chi_n(x). \end{aligned}$$

Eliminirt man aus diesen n Gleichungen x und $n - 2$ der y , so erhält man eine Gleichung zwischen den beiden übrigen y . Bei beiden Methoden ist ersichtlich, dass das Eliminationsresultat genau gleich ausfallen muss, welche beiden y man auch in die Zusammenhangsgleichung bringt. Die gefundene Gleichung umfasst daher den Zusammenhang aller Paare von Werthen mit Einschluss von $y_r = y_s$ und ist somit nicht irreductibel. — Bei dem zuletzt betrachteten Beispiel

$$y^4 - 2y^2 = x$$

ergiebt sich

$$y_r^4 - 2y_r^2 = y_s^4 - 2y_s^2$$

oder

$$y_r^4 - y_s^4 - 2y_r^2 + 2y_s^2 = 0,$$

eine Gleichung, die sich in die 3 Factoren

$$y_r - y_s = 0,$$

$$y_r + y_s = 0,$$

$$y_r^2 + y_s^2 - 2 = 0$$

zerlegen lässt.

3. Setzen wir in der Gleichung $F(x, y) = 0$ mit den Lösungen $y_k = f^{(k)}(x)$

$$y = \xi_1(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

so sind die Lösungen der transformirten Gleichung

$$z_k = \xi_{-1} f^{(k)}(x),$$

und wenn eine Zusammenhangsgleichung von $F(y, x) = 0$ lautete:

$$\Phi(y_r, y_s) = 0,$$

oder

$$y_s = \Psi_1(y_r),$$

so haben wir jetzt

$$\Phi(\xi_1(z_r), \xi_1(z_s)) = 0,$$

oder

$$z_s = \xi_{-1} \Psi_1 \xi_1(z_r).$$

Die Zusammenhangsgleichungen gestatten also dieselbe Transformation wie die Periodicitätsgleichungen, doch nur mittelst einer *linearen* Substitution.

4. Von besonderer Wichtigkeit sind für uns diejenigen Functionen $y = f_1(x)$, welche durch eine Gleichung von der Form

$$(1) \quad \frac{a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 y^n + b_1 y^{n-1} + \dots + b_n} = \varphi_1(x),$$

oder, was dasselbe ist,

$$(2) \quad y^n + \frac{a_1 - b_1 \varphi_1(x)}{a_0 - b_0 \varphi_1(x)} y^{n-1} + \frac{a_2 - b_2 \varphi_1(x)}{a_0 - b_0 \varphi_1(x)} y^{n-2} + \dots + \frac{a_n - b_n \varphi_1(x)}{a_0 - b_0 \varphi_1(x)} = 0$$

bestimmt sind, worin $\varphi_1(x)$ eine *rationale* Function bedeutet. Die Zusammenhangsgleichung von (1) oder (2) lautet

$$(3) \quad \frac{a_0 y_r^n + a_1 y_r^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 y_r^n + b_1 y_r^{n-1} + \dots + b_n} = \frac{a_0 y_s^n + a_1 y_s^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 y_s^n + b_1 y_s^{n-1} + \dots + b_n},$$

ist also von $\varphi_1(x)$ unabhängig. Dividirt man (3) durch den Factor $y_r - y_s$, so liefert die übrigbleibende Gleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades genau die $n-1$ Werthe von $f_1(x)$, welche ausser y_r noch existiren. — Es ist aber auch leicht zu erweisen, dass jede n deutige algebraische Function, welche vollständig denselben Zusammenhang wie die durch (1) definirte hat, von der Form

$$\frac{a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 y^n + b_1 y^{n-1} + \dots + b_n} = \varphi_1'(x)$$

sein muss. Denn soll

$$(5) \quad y^n + \chi_1(x) y^{n-1} + \chi_2(x) y^{n-2} + \dots + \chi_n(x) = 0$$

die verlangte Eigenschaft haben, so müssen *alle* Gleichungen, welche sich zwischen den Lösungen von (1) oder (2): $y_1, y_2, \dots, y_n$ aufstellen lassen, identisch mit denjenigen sein, welche sich zwischen den Lösungen von (5): $y_1', y_2', \dots, y_n'$ ergeben. Da wir aber

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 + y_2 + \dots + y_n = -\frac{a_1 - b_1 \varphi_1(x)}{a_0 - b_0 \varphi_1(x)}, \\ y_1 y_2 + y_1 y_3 + \dots + y_{n-1} y_n = \frac{a_2 - b_2 \varphi_1(x)}{a_2 - b_0 \varphi_1(x)}, \\ \vdots \\ y_1 y_2 \dots y_n = (-1)^n \frac{a_n - b_n \varphi_1(x)}{a_0 - b_0 \varphi_1(x)} \end{array} \right.$$

und

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1' + y_2' + \dots + y_n' = -\chi_1(x), \\ y_1' y_2' + y_1' y_3' + \dots + y_{n-1}' y_n' = \chi_2(x), \\ \vdots \\ y_1' y_2' \dots y_n' = (-1)^n \chi_n(x) \end{array} \right.$$

haben, so werden die Resultate der Elimination von x zwischen

$$(8) \quad \sum y_1 y_2 \dots y_r = (-1)^r \frac{a_r - b_r \varphi_1(x)}{a_0 - b_0 \varphi_1(x)}$$

und

$$\sum y_1 y_2 \dots y_s = (-1)^s \frac{a_s - b_s \varphi_1(x)}{a_0 - b_0 \varphi_1(x)},$$

oder, was auf dasselbe hinausläuft,

$$(9) \quad \sum y_1 y_2 \dots y_r = (-1)^r \frac{a_r - b_r x}{a_0 - b_0 x}$$

und

einerseits und

(10)

und

$$\sum y_1 y_2 \cdots y_s = (-1)^s \frac{a_s - b_s x}{a_0 - b_0 x}$$

$$\sum y_1' y_2' \cdots y_r' = (-1)^r \chi_r(x)$$

$$\sum y_1' y_2' \cdots y_s' = (-1)^s \chi_s(x)$$

andererseits identisch sein müssen. Es ist aber leicht einzusehen (was weiter unten bei anderer Gelegenheit ausführlicher erörtert werden wird), dass dies nur dann zutrifft, wenn

(11)

und

$$\chi_r(x) = \frac{a_r - b_r \varphi_1'(x)}{a_0 - b_0 \varphi_1'(x)}$$

$$\chi_s(x) = \frac{a_s - b_s \varphi_1'(x)}{a_0 - b_0 \varphi_1'(x)}$$

ist, worin $\varphi_1'(x)$ nur eine rationale Function sein kann, weil sonst die Coefficienten der Gleichung vieldeutig würden und hierdurch der Zusammenhang eine Aenderung erlitte. Hiermit ist die Behauptung erwiesen. —

Mit diesen wenigen Resultaten ist natürlich die Theorie des Zusammenhangs nicht erschöpft; doch genügen dieselben, um die Untersuchungen über irrationale Periodicität bis zu einem gewissen Punkte zu erledigen.

§ 7.

Die irrationale Periodicität.

1. Um die recht schwierige Frage über die Zulässigkeit der irrationalen Periodicität klarer zu machen, will ich mich vorerst an ein Beispiel halten. Wenn die Periodicitätsgleichung der *eindeutigen* Function $F(x)$ lautet:

$$y = x^2,$$

so müssen die Relationen bestehen:

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x^2) = F(x^4) = F(x^8) = \cdots \\ &= F(\sqrt{x}) = F(\sqrt[4]{x}) = F(\sqrt[8]{x}) = \cdots \end{aligned}$$

$\sqrt{x}$ hat aber zwei Werthe, welche wir als $+\sqrt{x}$ und $-\sqrt{x}$ unterscheiden können. Es entsteht nun die Frage: sollen wir von der periodischen Function $F(x)$ verlangen, dass sowohl $F(+\sqrt{x})$ als auch $F(-\sqrt{x})$ mit $F(x)$ übereinstimmt, oder sollen wir es als genügend betrachten, wenn nur eine dieser Grössen, etwa $F(+\sqrt{x})$ gleich $F(x)$ wird? Nehmen wir für einen Augenblick das Letztere an, setzen aber voraus, dass $F(x)$ nur in einzelnen Punkten unstetig wird. Sei nun

$F(+\sqrt{x_1}) = F(x_1)$ und denken wir uns, dass x von x_1 eine continuirliche Reihe von Werthen durchläuft, ohne jedoch durch einen Unstetigkeitspunkt von $F(x)$ oder $F(+\sqrt{x})$ zu gehen, was nach der eben gemachten Voraussetzung immer möglich ist; so wird, da $F(x)$ und $F(\sqrt{x})$ nicht plötzlich ihren Werth ändern können, diese Uebereinstimmung fortwährend stattfinden müssen. Nun ist es aber bekanntlich immer möglich (und zwar auf unendlich vielen Wegen), die Variable so zu führen, dass, wenn x zu x_1 zurückkehrt, $+\sqrt{x_1}$ in $-\sqrt{x_1}$ übergegangen ist. Demnach müsste auch $F(-\sqrt{x}) = F(x)$ sein. Man übersieht sofort, dass, wenn eine für beliebige x (einzelne Punkte ausgenommen) stetige Function eine Periode $y = \varphi_1(x)$ haben soll, welche durch eine irreductible Gleichung definirt ist (was immer vorausgesetzt werden darf, da sich sonst die Gleichung in mehrere zerlegen liesse), die Gleichungen

$$F(\varphi_*(x)) = F(x) \quad \text{und} \quad F(\varphi_{-x}(x)) = F(x)$$

für *sämmtliche* Werthe von $\varphi_*(x)$ und $\varphi_{-x}(x)$ bestehen müssen. — Kehren wir jedoch zu unserem Beispiel zurück. Es müsste $F(\sqrt{x})$ für die 2 Werthe von $\sqrt{x}$, $F(\sqrt[2]{x})$ für die 2^* Werthe von $\sqrt[2^*]{x}$ mit $F(x)$ übereinstimmen. Allein wir könnten ja auch $F(x^2) = F(x)$ zum Ausgangspunkt nehmen; dann müsste $F(\pm\sqrt{x^2}) = F(x)$ oder $F(\pm x) = F(x)$, ferner $F(\pm \alpha \sqrt[2^*]{x}) = F(x)$ sein, wenn α eine 2^{*te} Einheitswurzel bedeutet. Hierbei würden wir also noch mehr Werthe des Arguments finden, für welche $F(x)$ sich gleich bleiben soll. Wenn man $F(x^4)$, $F(x^8)$ u. s. w. zum Ausgangspunkt wählt, so mehrt sich noch die Zahl dieser Werthe, so dass $F(x)$ für 2^∞ Werthe sich gleich bleiben müsste. Aehnliches tritt im Allgemeinen bei mehrdeutigen Periodicitätsfunctionen ein. Da es nun wahrscheinlich, wenn auch nicht erwiesen ist, dass eine stetige Function nur für ∞^2 Werthe des Arguments unverändert bleiben kann, so schliessen wir die Functionen mit mehrdeutiger Periodicitätsbeziehung im Allgemeinen von dem Kreis der zu untersuchenden aus.

2. Bemerkt zu werden verdient, dass diese nicht ganz exacten Betrachtungen in speciellen Fällen mit völliger Strenge durchgeführt werden können. Ist z. B. $y = \varphi_1(x) = x^n$, so ergiebt sich leicht, dass $F(\alpha x) = F(x)$ sein muss, wenn α eine n^{te} Einheitswurzel bedeutet. Die Reihe der n^{ten} Einheitswurzeln stellt aber für ein sehr grosses n einen geschlossenen Kreis von unendlich benachbarten Werthen dar, sodass wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von $F(x)$ diese Function für eine zusammenhängende Reihe von Werthen, also überhaupt unverändert bleiben müsste.

3. Die in 1. gemachten Schlüsse gelten nur so lange, als $F(x)$ eine *eindeutige* Function ist; schon bei *endlich* vieldeutigen Functionen verlieren sie ihre Gültigkeit, wie das Beispiel

$$F(x) = \sin \sqrt[3]{x}$$

zeigt, welches eine dreideutige Function mit den Werthen ($\alpha^3 = 1$)

$$F^{(1)}(x) = \sin \sqrt[3]{x},$$

$$F^{(2)}(x) = \sin \alpha \sqrt[3]{x},$$

$$F^{(3)}(x) = \sin \alpha^2 \sqrt[3]{x}$$

und der Periodicitätsgleichung

$$\sqrt[3]{y} = 2\pi + \sqrt[3]{x},$$

oder

$$y = (2\pi + \sqrt[3]{x})^3$$

repräsentirt. Setzt man nämlich y statt x in $F(x)$, so erhält man die 9 Ausdrücke

$$\begin{aligned} & \sin(2\pi + \sqrt[3]{x}), & \sin(2\pi + \alpha \sqrt[3]{x}), & \sin(2\pi + \alpha^2 \sqrt[3]{x}), \\ & \sin \alpha(2\pi + \sqrt[3]{x}), & \sin \alpha(2\pi + \alpha \sqrt[3]{x}), & \sin \alpha(2\pi + \alpha^2 \sqrt[3]{x}), \\ & \sin \alpha^2(2\pi + \sqrt[3]{x}), & \sin \alpha^2(2\pi + \alpha \sqrt[3]{x}), & \sin \alpha^2(2\pi + \alpha^2 \sqrt[3]{x}), \end{aligned}$$

von denen der erste, zweite und dritte bezüglich $\sin \sqrt[3]{x}$, $\sin \alpha \sqrt[3]{x}$, $\sin \alpha^2 \sqrt[3]{x}$ gleich sind, während die übrigen andere Werthe annehmen. Auch ist es nicht möglich, derartige mehrdeutige Functionen mit *irrationaler* Periode auf eindeutige zurückzuführen, indem man sie als Lösungen einer algebraischen Gleichung darstellt, deren Coefficienten *eindeutige periodische* Functionen sind. Der eindeutige Ausdruck

$$\begin{aligned} & \sin \sqrt[3]{x} + \sin \alpha \sqrt[3]{x} + \sin \alpha^2 \sqrt[3]{x} = \\ & - \frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 8 \cdot 3} - \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 14 \cdot 5} + \dots \end{aligned}$$

ist überhaupt nicht periodisch, da die einzelnen Theile desselben nicht bei *gleichen* Aenderungen ungeändert bleiben. — Dass *unendlich* vieldeutige Functionen irrationale Periodicitätsgleichungen zulassen, die bei eindeutigen und endlich vieldeutigen Functionen unmöglich sind, zeigt folgende Function:

$$F(x) = \sin \left(2\pi \frac{\log \log x}{\log 2} \right);$$

diese bleibt ungeändert, wenn man x^2 oder $x^{\frac{1}{2}}$ statt x setzt; nur ist letzteres nicht für *beide* Werthe von $x^{\frac{1}{2}}$ der Fall. — Im Folgenden beschränken wir uns auf die Untersuchung *eindeutiger* Functionen.

4. Die Schwierigkeiten, auf welche die irrationale Periodicität führt, sind in 2 Fällen nicht vorhanden:

a) wenn die Periodicitätsfunction derart ist, dass keine Iterirung derselben mehr als eine bestimmte, endliche Anzahl von Werthen besitzt;

b) wenn die Zahl der Werthe von $\varphi_n(x)$ zwar ins Beliebigste wächst, allein unter denselben nur eine bestimmte, endliche Zahl von den Werthen früherer Iterirungen verschieden ist.

5. Der erste Fall, welchen ich allein erledigt habe, lässt sich leicht reduciren. Es ist vorerst klar, dass keine der Iterirungen der n -deutigen, durch eine irreductible Gleichung definirten Function $y = f_1(x)$ weniger als n -deutig sein kann. Denn seien $y_1, y_2, \dots, y_r$ die Werthe von $f_{x-1}(x)$, so haben wir für $f_x(x)$:

$$f_1(y_1), f_1(y_2) \dots f_1(y_r).$$

Jeder dieser Ausdrücke ist n -werthig, da $f_1(x)$ für dasselbe Argument n wesentlich verschiedene Werthe (einzelne Punkte ausgenommen) haben muss; die Gesamtzahl der Werthe von $f_x(x)$ muss daher mindestens n betragen. Nehmen wir nun an, dass die Vieldeutigkeit der Iterirungen von $f_1(x)$ bis zu einer s -fachen steige, und dass $f_x(x)$ dieselbe erreiche, so werden auch $f_{2x}(x), f_{3x}(x)$ u. s. w. gerade s -deutig sein, weil ein höherer Grad der Vieldeutigkeit nach der gemachten Annahme, ein niedrigerer aber nach dem eben Bewiesenen nicht möglich ist. Da nun eine Function mit der Periode $y = f_1(x)$ auch die Periode $y = f_x(x)$ hat, so genügt es, diejenigen Periodicitätsfunctionen $y = f_1(x)$ aufzusuchen, deren Iterirungen von derselben Vieldeutigkeit wie $f_1(x)$ sind.

6. Soll dies bei der ersten Iterirung der n -deutigen Function $f_1(x)$ der Fall sein, so werden, wenn $y_1, y_2, \dots, y_n$ die Werthe von $f_1(x)$ bezeichnen,

$$f_1(y_1), f_1(y_2), \dots, f_1(y_n)$$

dieselben Werthe liefern müssen, da jeder dieser Ausdrücke deren n besitzt und im Ganzen nur n vorhanden sein sollen. Die Ausdrücke $y_2, y_3 \dots y_n$ werden aber aus y_1 durch die Zusammenhangsgleichung von $y = f_1(x)$ hergeleitet, und da wir y_1 jeder Grösse gleich machen können, so folgt, dass $f_1(x)$ für solche Argumente denselben Werth annehmen muss, welche durch die Zusammenhangsgleichung von $y = f_1(x)$ in einander übergeführt werden können. Dies fällt aber mit der Forderung zusammen, dass $f_{-1}(x)$ denselben Zusammenhang wie $f_1(x)$ selbst besitzt. Wir haben daher nur solche Functionen zu untersuchen, deren Zusammenhang mit dem ihrer Umkehrung übereinstimmt.

7. Die fragliche Function $y = f_1(x)$ möge durch die Gleichung

$$(1) \quad y^n + \varphi^{(1)}(x)y^{n-1} + \varphi^{(2)}(x)y^{n-2} + \dots + \varphi^{(n)}(x) = 0,$$

ihre Umkehrung, welche nach dem Gesagten ebenfalls n -deutig ist, durch

$$(2) \quad y^n + \psi^{(1)}(x)y^{n-1} + \psi^{(2)}(x)y^{n-2} + \dots + \psi^{(n)}(x) = 0$$

bestimmt sein, sodass die Gleichungen (1) und (2) durch Vertauschung von y und x in einander übergehen. Sollen beide Gleichungen denselben Zusammenhang haben, so muss das Eliminationsresultat von

$$(3) \quad \sum y_1 y_2 \dots y_r = \varphi^{(r)}(x)$$

und

$$\sum y_1 y_2 \dots y_s = \varphi^{(s)}(x)$$

mit dem von

$$(4) \quad \sum y_1 y_2 \dots y_r = \psi^{(r)}(x)$$

und

$$\sum y_1 y_2 \dots y_s = \psi^{(s)}(x)$$

übereinstimmen, d. h. es muss, wenn

$$(5) \quad \psi^{(r)}(x) = \varphi^{(r)} \xi(x)$$

ist, auch

$$(6) \quad \psi^{(s)}(x) = \varphi^{(s)} \xi(x)$$

sein. Es ergibt sich dies leicht daraus, dass nach (3) und (4)

$$(7) \quad \varphi^{(r)} \varphi_{-1}^{(s)}(x) = \psi^{(r)} \psi_{-1}^{(s)}(x)$$

und zwar für *alle* Werthe dieser Ausdrücke sein muss, woraus bei der Annahme von (5) folgt

$$(8) \quad \varphi^{(r)} \varphi_{-1}^{(s)}(x) = \varphi^{(r)} \xi \psi_{-1}^{(s)}(x),$$

oder

$$(9) \quad \varphi_{-1}^{(s)}(x) = \xi \psi_{-1}^{(s)}(x),$$

oder endlich

$$(10) \quad \psi^{(s)}(x) = \varphi^{(s)} \xi(x).$$

Demnach kann (2) in die Form gesetzt werden

$$(11) \quad y^n + \varphi^{(1)} \xi(x) y^{n-1} + \varphi^{(2)} \xi(x) y^{n-2} + \dots + \varphi^{(n)} \xi(x) = 0.$$

Dabei muss $\xi(x)$ so beschaffen sein, dass die Coefficienten *eindeutige* Functionen werden. Es folgt hieraus

$$(12) \quad f_{-1}(x) = f_1 \xi(x).$$

Der letzteren Gleichung genügt aber nur

$$(13) \quad \xi(x) = f_{-2}(x),$$

und zwar ist klar, dass *alle* Werthe von $f_1 f_{-2}(x)$ mit denen von $f_{-1}(x)$ übereinstimmen, weil nach Früherem beide Ausdrücke gerade n Werthe

haben und $f_{-1}(x)$ durch eine irreductible Gleichung bestimmt ist. Daher wird $\varphi^{(*)}f_{-2}(x)$ eine *eindeutige* Function sein müssen, was nur möglich ist, wenn *alle* $\varphi^{(*)}(x)$ vom n^{ten} Grad oder Constanten sind. $f_{-2}(x)$ hat mit der Umkehrung von $\varphi^{(*)}(x)$ denselben Zusammenhang, woraus weiter folgt, dass die Umkehrungen *aller* $\varphi^{(*)}(x)$, soweit diese nicht Constanten sind, von gleichem Zusammenhang sein, d. h. nach § 6, 4 durch folgende Gleichung bestimmt sein müssen:

$$(14) \quad \frac{A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + \dots + A_n}{B_0 y^n + B_1 y^{n-1} + \dots + B_n} = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist bei allen $\varphi^{(*)}(x)$ dieselbe, während die rechte Seite nur vom ersten Grade zu sein braucht (da sonst die $\varphi^{(*)}(x)$ nicht rational wären), im Uebrigen aber verschieden sein kann. Die $\varphi^{(*)}(x)$ sind somit rationale Functionen des ersten Grades von *derselben* rationalen Function n^{ten} Grades. Weiter ist noch ersichtlich, dass die Nenner der erstgenannten rationalen Functionen übereinstimmen müssen, da sonst beim Wegmultipliciren derselben die Gleichung (1) in x von höherem als dem n^{ten} Grade würde. Wir erhalten daher für (1)

$$(15) \quad y^n + \frac{a_1 - b_1 \varphi_1(x)}{a_0 - b_0 \varphi_1(x)} y^{n-1} + \frac{a_2 - b_2 \varphi_1(x)}{a_0 - b_0 \varphi_1(x)} y^{n-2} + \dots \\ + \frac{a_n - b_n \varphi_1(x)}{a_0 - b_0 \varphi_1(x)} = 0$$

oder

$$(16) \quad \frac{a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 y^n + b_1 y^{n-1} + \dots + b_n} = \frac{c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n}{d_0 x^n + d_1 x^{n-1} + \dots + d_n}.$$

Durch nochmalige Anwendung von § 6., 4. ergibt sich aber hieraus leicht, dass $y = f_1(x)$ nur dann mit seiner Umkehrung denselben Zusammenhang haben kann, wenn (16) die Gestalt annimmt:

$$(17) \quad \frac{a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 y^n + b_1 y^{n-1} + \dots + b_n} = \varepsilon \left(\frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n} \right),$$

worin ε eine lineare Function bezeichnet. Hiermit ist bewiesen, dass *alle Periodicitätsgleichungen n^{ten} Grades, welche iterirt immer vom n^{ten} Grade bleiben, aus einer linearen durch Einsetzen einer rationalen Function n^{ten} Grades für y und x hergeleitet werden können.* Dass die gefundenen Gleichungen auch wirklich die gewünschte Eigenschaft besitzen, ist leicht ersichtlich*).

*) Das hier gefundene Resultat steht in naher Beziehung zu dem von Herrn S. Lie in seiner „Theorie der Transformationsgruppen I“, Mathematische Annalen, Bd. XVI, S. 455, ausgesprochenen; doch erkennt man leicht, dass die beiden Sätze nicht identisch sind. Die von Herrn S. Lie angewandten Methoden sind von den meinigen gänzlich verschieden.

8. Es wird nicht ohne Interesse sein, wenn wir den eben allgemein bewiesenen Satz für einen speciellen Fall durch directe Rechnung herleiten. Sei die Function $y = f_1(x)$ durch die Gleichung

$$ay^2 + byx + cx^2 + dy + ex + f = 0$$

bestimmt, so werden wir die definirende Gleichung für die iterirte Function $z = f_2(x)$ finden, wenn wir y aus der vorgelegten Gleichung und

$$az^2 + bzy + cy^2 + dz + ey + f = 0$$

eliminiren. Wir schreiben diese Gleichungen zuerst in der Form

$$(18) \quad y^2a + y(bx + d) + cx^2 + ex + f = 0,$$

$$(19) \quad y^2c + y(bz + e) + az^2 + dz + f = 0,$$

und erhalten dann nach einer bekannten Regel

$$(20) \quad \begin{vmatrix} a & cx^2 + ex + f \\ c & az^2 + dz + f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} cx^2 + ex + f & bx + d \\ az^2 + dz + f & bz + e \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & bx + d \\ c & bz + e \end{vmatrix} = 0.$$

Soll nun $z = f_2(x)$ eine höchstens zweideutige Function sein, so kann dies nur auf 2 Arten geschehen: entweder fallen in (20) die Potenzen von x und z , welche den zweiten Grad überschreiten, weg, oder (20) lässt sich als Quadrat darstellen. Dass das Erstere nicht der Fall sein kann, ersieht man daraus, dass die Coefficienten von z^4 und x^4 , a^4 und c^4 sind, die wir nicht beide als 0 annehmen dürfen. Das Letztere kann in 3 Fällen eintreten.

1. Es ist für beliebige x und z

$$\begin{vmatrix} cx^2 + ex + f & bx + d \\ az^2 + dz + f & bz + e \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$\begin{aligned} & bex^2z + bexz + bfx + cex^2 + e^2x + ef \\ &= abxz^2 + bdxz + bfx + adz^2 + d^2z + df, \end{aligned}$$

eine Gleichung, die nur identisch befriedigt werden kann, wenn wir

$$b = 0, \quad d = 0, \quad e = 0$$

annehmen. Die Gleichung

$$ay^2 + cx^2 + f = 0$$

kann aber aus der linearen Gleichung

$$ay + bx + f = 0$$

durch die Substitution $\varphi_1(x) = x^2$ hergeleitet werden.

2. Es ist identisch

$$\begin{vmatrix} a & bx + d \\ c & bz + e \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$abz + ae = bex + cd;$$

hier ist erforderlich, dass

$$b = 0 \quad \text{und} \quad ae = cd \quad \text{oder} \quad \frac{a}{c} = \frac{d}{e}$$

ist; (18) nimmt dann die Form an

$$ay^2 + dy + cx^2 + \frac{cd}{a}x + f = 0,$$

oder

$$y^2 + my + p(x^2 + mx) + f = 0,$$

eine Gleichung, die aus

$$y + px + f = 0$$

durch die Substitution

$$\psi_1(x) = x^2 + mx$$

hervorgeht.

3. Fällt der zweite Theil von (20) nicht weg, so setzen wir zur Abkürzung

$$r = bx + d,$$

$$s = bz + e,$$

$$u = cx^2 + ex + f,$$

$$v = az^2 + dz + f$$

und erhalten durch Ausrechnung von (20)

$$(21) \quad (av - cu)^2 - rs(av + cu) + as^2u + cr^2v = 0,$$

welcher Gleichung wir auch die beiden andern Formen geben können:

$$(22) \quad (av - cu)^2 - rs(av - cu) + as^2u + cr^2v - 2crsu = 0$$

und

$$(23) \quad (av - cu)^2 + rs(av - cu) + as^2u + cr^2v - 2arsv = 0.$$

Ein Ausdruck $A^2 + AB + C$ (dessen Bestandtheile A, B, C verschiedene Variablen enthalten) kann aber nur dann quadratisch sein, wenn $AB + C = 0$ (die beiden vorigen Fälle) oder $B^2 = 4C$ ist. Demnach haben wir wegen (22) und (23) die beiden Gleichungen zu befriedigen:

$$(24) \quad r^2s^2 = 4as^2u + 4cr^2v - 8crsu$$

und

$$(25) \quad r^2s^2 = 4as^2u + 4cr^2v - 8arsv,$$

aus deren Zusammenstellung sich als nothwendige, doch nicht hinreichende Bedingung ergibt

$$(26) \quad crsu = arsv.$$

Diese Gleichung ist befriedigt, wenn $r = 0$ oder $s = 0$ ist; aus (24) und (25) folgt, dass dann auch die andere der beiden Grössen verschwinden muss (die übrigen Combinationen erweisen sich leicht als unzulässig); hieraus würde wieder wie oben $b = 0$, $d = 0$, $e = 0$

folgen. Andernfalls muss $cu = av$ sein, was unmögliche Bedingungen ergibt.

Das Gesamtergebn lautet also: eine Function $y = \varphi_1(x)$, die durch eine Gleichung zweiten Grades defnirt ist, giebt nur dann und immer dann iterirt wieder eine Function zweiten Grades, wenn sie durch eine rationale Functionalsubstitution aus einer linearen Function hergeleitet ist.

9. Noch bleibt der Fall zu betrachten übrig, dass die Iterirungen einer n -deutigen Periodicitätsfunction zwar mehr als n -deutig, aber so beschaffen sind, dass ein Theil ihrer Werthe mit solchen früherer Iterirungen zusammenfällt und in Folge dessen immer höchstens n neue Werthe auftreten. Die erste Iterirung muss alsdann wieder x als einen Werth haben, mithin muss nach Früherem die definirende Gleichung von $y = f_1(x)$ in y und x symmetrisch sein. Es ist mir noch nicht gelungen, diesen Fall zu erledigen, und ich beschränke mich darauf, durch ein Beispiel die vorkommenden Verhältnisse zu erläutern.

Sei

$$\sqrt{y} + \sqrt{x} = n$$

oder

$$(y - x)^2 - 2n^2(y + x) + n^4 = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich durch die Functionalsubstitution

$$\varphi_1(x) = \sqrt{x} - \frac{n}{2}$$

aus

$$y + x = 0,$$

aber andererseits auch in Folge der Doppeldeutigkeit der Wurzeln aus $y = x + n$ durch die Substitution $\varphi_1(x) = \sqrt{x}$ herleiten. Wir haben

$$y = f_1(x) = (n \pm \sqrt{x})^2,$$

während wir bei der Iterirung den Werth x doppelt und ausserdem

$$f_2(x) = (2n \pm \sqrt{x})^2$$

finden. Für $f_3(x)$ erhalten wir wieder $(n \pm \sqrt{x})^2$, $(2n \pm \sqrt{x})^2$ und ausserdem $(3n \pm \sqrt{x})^2$ u. s. w.

Dieser irrationalen Periodicitätsgleichung entspricht wirklich die eindeutige Function

$$\cos \sqrt{x} = 1 - \frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$$

bei welcher

$$y = (2\pi \pm \sqrt{x})^2$$

zu setzen ist. In der That ist

$$\cos y = \cos (2\pi \pm \sqrt{x}) = \cos (\pm \sqrt{x}) = \cos \sqrt{x}.$$

In anderen Fällen gestalten sich die Verhältnisse freilich bedeutend anders; doch erscheint es nicht wahrscheinlich, dass sich periodische Functionen ergeben, welche nicht durch die Functionalsubstitution aus additiv oder multiplicatorisch periodischen hergeleitet werden können.

§ 8.

Die mehrfach periodischen Functionen.

1. Functionen mit mehreren (vorläufig 2) nicht auf einander zurückführbaren Perioden $\varphi_1(x)$ und $\chi_1(x)$ wollen wir zunächst nur für den Fall untersuchen, dass die letzteren *vertauschbar* sind, d. h. dass wir haben

$$\varphi_1 \chi_1(x) = \chi_1 \varphi_1(x);$$

auch beschränken wir uns im Folgenden auf rationale Periodicitäts-gleichungen.

2. Die eine der Perioden können wir immer in eine additive oder multiplicatorische transformiren; die directe Rechnung ergibt dann ohne Schwierigkeit, dass die andere jedesmal von derselben Art sein muss; es kommen daher für uns nur Functionen mit mehrfacher additiver oder mehrfacher multiplicatorischer Periode in Betracht.

Was den ersten Fall anlangt, so ist bekannt, dass die Zahl der additiven Perioden (bei endlich vieldeutigen Functionen) 2 nicht überschreiten kann und dass zwischen diesen beiden Perioden kein reelles Verhältniss bestehen darf.

3. *Jede eindeutige (oder endlich vieldeutige) Function mit multiplicatorischer Periode lässt sich in eine eindeutige (resp. ebensoviel-deutige) Function mit doppelter additiver Periode mittelst einer transcendenten Substitution verwandeln.* Denn setzt man in der Function

$$F(px) = F(x) \\ p = e^{\frac{2\pi i m}{n}}, \quad x = e^{\frac{2\pi i w}{n}},$$

so hat $F\left(e^{\frac{2\pi i w}{n}}\right)$ die doppelte Periode m und n . Ist ferner

$$F_1(w + m) = F_1(w)$$

und

$$F_1(w + n) = F_1(w),$$

so substituiren wir

$$w = \frac{n}{2\pi i} \log x$$

und gelangen hierdurch zu einer multiplicatorisch periodischen Function. Die unendliche Vieldeutigkeit von $\log x$ macht die Function nicht vieldeutig, da die verschiedenen Werthe von w die Form haben $w = \frac{n}{2\pi i} \log x + kn$ und durch die Zufügung von kn zu w die Func-

tion $F_1(w)$ nicht geändert wird. — Hieraus folgt auch leicht, dass mod. p von der Einheit verschieden sein muss.

4. Machte man bei einer Function mit doppelter multiplicatorischer Periode die eben erwähnte Substitution, so würde man eine Function mit dreifacher additiver Periode erhalten; endlich vieldeutige Functionen mit mehrfacher multiplicatorischer Periode sind also nicht möglich, wenn wir selbstverständlich den Fall ausschliessen, dass die Perioden ganze Potenzen derselben Grösse sind.

Wir haben somit nur 3 Arten von periodischen transcendenten Functionen gefunden:

1. *die Functionen mit einfacher additiver Periode,*
2. *diejenigen mit einfacher multiplicatorischer Periode,*
3. *diejenigen mit doppelter additiver Periode.*

Die letzteren braucht man jedoch nicht besonders zu behandeln, weil sie sich aus den vorhergehenden herleiten lassen. Diese Reduction der elliptischen Functionen auf die Modularfunctionen ist von grossem Vortheil, da die letzteren einfacher sind und hierdurch ihre analytische Natur deutlicher hervortreten lassen.

5. Bei mehrfachen Perioden, für welche die Gleichung

$$\varphi_1 \chi_1(x) = \chi_1 \varphi_1(x)$$

nicht gilt, hört die Analogie mit den Abel'schen Gleichungen auf; denn Abel hat die algebraische Lösbarkeit solcher Gleichungen, deren Wurzeln durch die Iterirungen von 2 verschiedenen Functionen aus einer einzigen hergeleitet werden können, nur unter der Voraussetzung bewiesen, dass diese beiden Functionen vertauschbar sind. Ueberdies ist es wahrscheinlich, dass mehrere nicht vertauschbare Perioden (einzelne Specialfälle ausgenommen) bei Functionen *mit getrennt liegenden Discontinuitätspunkten* nicht möglich sind; vorläufig gelang es mir nur nachzuweisen, dass Functionen mit zwei nicht vertauschbaren Perioden im Allgemeinen *unendlich viele wesentliche Discontinuitätspunkte* besitzen müssen. Manche Combinationen von Perioden sind bei eindeutigen Functionen überhaupt nicht zulässig, wie aus der Untersuchung des Specialfalles, dass sich beide Periodicitätsgleichungen durch Transformation *gleichzeitig* von einem Gliede mit xy befreien lassen, hervorgehen wird.

a) Die eine Periodicitätsgleichung lasse sich auf

$$(1) \quad \varphi_1(x) = x + 1$$

reduciren, während die andere hierbei in

$$(2) \quad \chi_1(x) = ax + b$$

übergeht. Dann ist

$$(3) \quad \chi_n(x) = a^n x + b(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1),$$

$$(4) \quad \chi_{-n}(x) = \frac{x}{a^n} - b \left(\frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^{n-1}} + \dots + \frac{1}{a} \right),$$

also

$$(5) \quad \varphi_1 \chi_n(x) = a^n x + b(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1) + 1,$$

$$(6) \quad \chi_n \varphi_1(x) = a^n x + b(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1) + a^n,$$

und somit

$$(7) \quad \begin{aligned} & F[a^n x + b(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1) + 1] \\ &= F[a^n x + b(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1) + a^n], \end{aligned}$$

oder wenn x für $a^n x + b(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1) + 1$ gesetzt wird,

$$F(x + a^n - 1) = F(x)$$

oder wegen (1)

$$(8) \quad F(x + a^n) = F(x),$$

ein Resultat, das auch für negative n gilt, wie aus (4) folgt. Ist mod. a von der Einheit verschieden, so kann a^n durch wachsende positive oder negative n beliebig klein gemacht werden; $F(x)$ müsste also eine unendlich kleine additive Periode haben, was bei endlich vieldeutigen Functionen nicht möglich ist. Wenn mod. $a = 1$ ist, so kann zunächst a genau eine Einheitswurzel sein; dann ist $\chi_1(x) = ax + b$ eine Periode, die durch Iterirung zu x zurückführt, wie aus Früherem sowohl als auch aus (3) erhellt. Ist nämlich a eine primitive n^{te} Einheitswurzel, so haben wir

$$a^n = 1,$$

$$a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1 = 0,$$

also

$$\chi_n(x) = x.$$

Trifft diese Voraussetzung nicht zu, so lässt sich leicht nachweisen, dass unendlich viele unendlich wenig von einander verschiedene additive Perioden vorhanden sind, indem a^n durch geeignete Wahl von n jeder Grösse vom Modul 1 beliebig nahe gebracht werden kann. — Für $a = 1$ ist auch die zweite Periode additiv.

b) Sei die eine Periodicitätsgleichung auf

$$(9) \quad \varphi_1(x) = px$$

reducirbar, während die andere wieder

$$(10) \quad \chi_1(x) = ax + b$$

lauten möge (b von Null, mod. p von 1 verschieden), so ist

$$(11) \quad \varphi_1 \chi_1(x) = apx + bp,$$

$$(12) \quad \chi_1 \varphi_1(x) = apx + b,$$

woraus wie oben folgt

$$(13) \quad F[x + b(p - 1)] = F(x),$$

wodurch dieser Fall auf den vorhergehenden zurückgeführt ist.

6. Ist

$$(14) \quad \varphi_1(x) = x + 1,$$

$$(15) \quad \chi_1(x) = \frac{ax + b}{cx + d},$$

so muss wegen (14) die Function für $x = \infty$ wesentlich discontinuirlich werden; aus (15) folgt dann, dass dies auch für $x = \frac{a}{c}$, also wegen beider Gleichungen in unendlich vielen Punkten geschehen muss. Ein Ausnahmefall ist nicht möglich, wenn c von Null verschieden ist. Tritt an Stelle von (14)

$$(16) \quad \varphi_1(x) = px,$$

so ist eine analoge Betrachtung möglich; auch hier müssen unendlich viele wesentliche Discontinuitätspunkte vorhanden sein, wenn nicht

$$\chi_1(x) = qx$$

oder

$$\chi_1(x) = \frac{q}{x}$$

ist; im letzteren Fall ist

$$\chi_2(x) = x.$$

Frankfurt a/M., im Februar 1881.