SULLA FLESSIONE DEI CILINDRI.

Memoria di **E. Almansi** (Genova).

Adunanza del 9 luglio 1905.

I.

1. Uno dei problemi che si presentano nella *Scienza delle Costruzioni* è quello di determinare la forma che assume l'asse di un cilindro, avente una sezione trasversale qualsiasi, per date sollecitazioni esterne.

Consideriamo il caso più semplice: il cilindro ammetta un piano di simmetria X passante per l'asse, e sia sollecitato da forze simmetriche rispetto ad X . L'asse del cilindro, sotto l'azione di queste forze, si disporrà secondo una linea (*curva elastica*) che per ragioni di simmetria dovrà giacere anch'essa nel piano X .

Diciamo ρ il raggio di curvatura della curva elastica, in un suo punto P , M il momento delle tensioni che agiscono sugli elementi della sezione S passante per P , rispetto alla retta ξ normale in P al piano X (*momento flettente*).

Quando sono soddisfatte certe condizioni che più avanti specifichiamo, si ha la relazione:

$$(1) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI},$$

ove E rappresenta il *modulo di elasticità normale* del cilindro (supposto omogeneo), I il momento d'inerzia della sezione rispetto alla retta ξ .

Questa formula deriva dalla nota Teoria del SAINT-VENANT sulla deformazione dei cilindri. Riferendo i punti di X ad un sistema di assi coordinati, essa fornisce l'equazione differenziale della curva elastica *).

*) La formula (1), con quel grado di approssimazione con cui è valida l'ordinaria Teoria dell'Elasticità, e prescindendo dagli allungamenti longitudinali, rappresenta la deformazione *totale* dell'asse, non una sola parte di essa dovuta al momento flettente. Ciò risulta ben chiaro dalla trattazione del problema del SAINT-VENANT, ed anche da questa mia Memoria. Sono quindi errate certe frasi che si leggono in qualche Corso di lezioni sulla *Scienza delle Costruzioni*, come la seguente: « *Le deformazioni prodotte nella trave, per le quali il suo asse geometrico rettilineo passa nella curva elastica, sono la somma di quelle prodotte dal solo momento flettente e delle altre prodotte dal solo sforzo di taglio* », o co-

2. Affinchè sussista la formula (1) è in generale necessario:

1° che sul cilindro non agiscano forze di massa,

2° che non agiscano forze sulla superficie laterale,

3° che le tensioni agenti sulle basi siano distribuite secondo una legge determinata, dipendente dalla forma della sezione.

Di quest'ultima condizione si può non tener conto, se ci si limita a considerare i punti del cilindro abbastanza lontani dalle basi, giacchè in tali punti si può ritenere che lo stato di deformazione del solido dipenda solo dalla forza e dalla coppia risultanti delle tensioni che agiscono sugli elementi di ciascuna base, e non dal modo secondo cui queste tensioni sono distribuite. D'altronde, nella maggior parte dei casi che si presentano nella pratica, le basi del cilindro sono delle sezioni ideali, per le quali non è nota *a priori* la distribuzione delle tensioni.

Quanto alla prima condizione, noi ammetteremo che il peso, e le altre forze di massa le quali eventualmente agiranno sugli elementi del solido, si possano o trascurare rispetto alle forze esterne, o sostituire con altre agenti sulla superficie.

Veniamo alla seconda condizione. Spesso avverrà che il cilindro di cui si studia la deformazione (per es. una trave comunque sollecitata) sia soggetto a forze agenti sulla superficie laterale. Quando ciò accade è ancora lecito, senza incorrere in gravi errori, adoperare, come si fa ordinariamente nella pratica, la formula (1)?

A un tal quesito non si può dare una risposta esauriente, se non trattando in modo rigoroso il problema della deformazione di un cilindro sollecitato lateralmente. Per ciò che si riferisce alle applicazioni, basterà considerare il caso che si presenta come il più semplice dopo quello di un cilindro sollecitato soltanto alle basi: il caso cioè che la superficie laterale sia sollecitata nella stessa maniera in corrispondenza di ciascuna sezione trasversale, o, in altre parole, che la tensione esterna sia la stessa, in grandezza, direzione e verso, per tutti i punti di una stessa generatrice, potendo del resto variare da una generatrice all'altra.

Di questo problema mi sono occupato in una Memoria sulla deformazione dei cilindri *). Ma nelle formule che ottengo per esprimere le tensioni interne e lo spostamento dei punti, figurano certe funzioni, la cui determinazione, pur essendo possibile in un gran numero di casi, richiede in generale dei calcoli oltremodo laboriosi.

Ciò non ostante, ad alcune delle formule che dal punto di vista delle applicazioni presentano maggior interesse, si arriva, con opportuni artifici, a dare una forma quasi

me questa: « *Coi recenti metodi, basati sul teorema dei lavori virtuali, si può svolgere la teoria delle travi inflesse rigorosamente, tenendo cioè conto anche delle deformazioni prodotte dallo sforzo di taglio, etc.* ».

Lo sforzo di taglio è quella forza che denoto con F nel Cap. V di questa Memoria. Essa è legata al momento flettente dalla formula $F = \frac{dM}{d\tau}$.

*) *Sopra la deformazione dei cilindri sollecitati lateralmente* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. X (1901)].

altrettanto semplice quanto quella che esse hanno allorchè il cilindro è sollecitato soltanto alle basi. In particolare, nel caso di cui qui ci occupiamo (che il cilindro sia simmetrico rispetto al piano X , e simmetricamente sollecitato) si ottiene fra ρ ed M la relazione semplicissima:

$$(2) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M + m}{EI},$$

ove m è una quantità costante per tutte le sezioni del cilindro.

Dal confronto di questa formula colla (1) si riconosce che facendo uso della (1) noi veniamo, in sostanza, a trascurare, per tutte le sezioni del cilindro, un momento costante ed uguale ad m .

Qui un'osservazione è necessaria: non deve credersi che m rappresenti il momento dovuto alle forze che agiscono sulla superficie laterale. Di queste forze si è già tenuto conto nel calcolare M , che rappresenta, per una sezione qualunque S , il momento dovuto a tutte le forze da cui il cilindro è sollecitato. Il termine m ha origine dal fatto che le sollecitazioni laterali influiscono sulla deformazione del cilindro in modo diverso dalle altre.

La costante m è espressa dalla formula:

$$m = \lambda q - \mu p,$$

ove p e q sono quantità che dipendono dalle sollecitazioni laterali, e la cui determinazione non presenta nessuna difficoltà; λ è il *coefficiente di contrazione*; μ un'altra costante che dipende da λ e dalla forma della sezione, *ma non dal modo come la superficie laterale è sollecitata*.

Tutta la difficoltà consiste dunque nel determinare, una volta per sempre, la costante μ : ciò che si sa fare in un grandissimo numero di casi.

In questa Memoria stabilisco la formula (2), facendo, per semplicità, una restrizione sulla natura delle sollecitazioni laterali: supponendo cioè che la tensione esterna, in ogni punto della superficie laterale, abbia una componente nulla secondo l'asse del cilindro. Questa restrizione non sarebbe però necessaria.

Esamino poi un caso particolare di sollecitazione di una trave inflessa, e confronto il risultato a cui si perviene applicando la formula (2), con quello a cui si perverrebbe trascurando la quantità m .

II.

1. Ricordiamo alcune delle formule relative alla deformazione di un solido elastico ed isotropo, comunque sollecitato alla superficie, ma non soggetto a forze di massa.

Riferito il solido ad un sistema di assi coordinati ortogonali $O(xyz)$, diciamo, per un punto qualunque $P(x, y, z)$, τ_{11} , τ_{12} , etc. le componenti, secondo gli assi coordinati, delle tensioni unitarie che agiscono sulle faccie positive dei tre elementi di superficie passanti per P e normali agli assi.

Per l'equilibrio di una porzione qualunque del solido deve essere in ogni suo punto:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (\tau_{12} = \tau_{21}, \text{ etc.}).$$

In tutti i punti della superficie, chiamando τ_1, τ_2, τ_3 le componenti della tensione esterna (che supporremo date) e $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ i coseni di direzione della normale rivolta verso l'esterno del solido, deve aversi:

$$(4) \quad \begin{cases} \tau_{11} \cos \alpha + \tau_{12} \cos \beta + \tau_{13} \cos \gamma = \tau_1, \\ \tau_{21} \cos \alpha + \tau_{22} \cos \beta + \tau_{23} \cos \gamma = \tau_2, \\ \tau_{31} \cos \alpha + \tau_{32} \cos \beta + \tau_{33} \cos \gamma = \tau_3. \end{cases}$$

Fra le tensioni interne, e le componenti u, v, w dello spostamento di un punto P del solido, passano le relazioni:

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} [\tau_{11} - \lambda(\tau_{22} + \tau_{33})], \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2(1 + \lambda)}{E} \tau_{23}, \text{ etc.},$$

dalle quali, risolvendo rispetto alle tensioni, si ricava:

$$(6) \quad \tau_{11} = \frac{E}{1 + \lambda} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\lambda}{1 - 2\lambda} \theta \right), \quad \tau_{23} = \frac{E}{2(1 + \lambda)} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \text{ etc.}$$

ove:

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Sostituendo queste espressioni di $\tau_{11}, \tau_{12}, \text{ etc.}$ nelle equazioni (3) si ottiene:

$$(7) \quad \Delta^2 u + \frac{1}{1 - 2\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \text{ etc.} \quad \left(\Delta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

da cui, derivando rispetto ad x, y, z , e sommando:

$$(8) \quad \Delta^2 \theta = 0.$$

Ora poniamo:

$$(9) \quad T = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = \frac{E}{1 - 2\lambda} \theta$$

e costruiamo le espressioni $\Delta^2 \tau_{11}, \Delta^2 \tau_{12}, \text{ etc.}$ Tenendo conto delle formule (6), (7), (8) e (9), troveremo:

$$(10) \quad \begin{cases} \Delta^2 \tau_{11} = -\frac{1}{1 + \lambda} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, & \Delta^2 \tau_{23} = -\frac{1}{1 + \lambda} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z}, \\ \Delta^2 \tau_{22} = -\frac{1}{1 + \lambda} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, & \Delta^2 \tau_{31} = -\frac{1}{1 + \lambda} \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial x}, \\ \Delta^2 \tau_{33} = -\frac{1}{1 + \lambda} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, & \Delta^2 \tau_{12} = -\frac{1}{1 + \lambda} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}. \end{cases}$$

Si dimostra che queste sei equazioni, insieme alle (3), e alle (4) che devono esser soddisfatte sulla superficie del solido, determinano in modo completo le sei tensioni τ_{11} , τ_{12} , etc. Per conseguenza, data, in tutti i punti della superficie, la tensione esterna (τ_1, τ_2, τ_3) , noi ci possiamo proporre di determinare le tensioni τ_{11} , τ_{12} , etc. in modo che in tutti i punti del solido siano verificate le equazioni (3) e (10), e in tutti i punti della superficie le (4).

Ottenute le tensioni interne, le formule (5) ci daranno, in ogni punto del solido, le componenti della deformazione.

2. Ritorniamo ora al nostro cilindro. Posta l'origine delle coordinate nel centro O di una delle due basi, prendiamo l'asse del cilindro come asse delle z : il verso positivo sia quello che va da O al centro dell'altra base. L'asse delle y giaccia nel piano di simmetria X : scegliamo ad arbitrio il suo verso positivo, come pure il verso positivo dell'asse delle x , che sarà normale ad X .

Abbiamo supposto (I, 2) che in ogni punto della superficie laterale, la componente della tensione esterna secondo l'asse del cilindro sia nulla: in tali punti sarà pertanto $\tau_3 = 0$. Ivi è inoltre $\cos \gamma = 0$. Dunque sulla superficie laterale le equazioni (4) diventeranno:

$$(II) \quad \begin{cases} \tau_{11} \cos \alpha + \tau_{12} \cos \beta = \tau_1, \\ \tau_{21} \cos \alpha + \tau_{22} \cos \beta = \tau_2, \\ \tau_{31} \cos \alpha + \tau_{32} \cos \beta = 0. \end{cases}$$

Si è poi supposto che il cilindro sia simmetrico rispetto al piano X (ossia al piano yz) e sollecitato da forze simmetriche rispetto a questo piano. Perciò in due punti della superficie laterale, come P e P' (Fig. 1) simmetrici rispetto ad X , le componenti τ_2 della tensione dovranno avere valori uguali, le componenti τ_1 valori uguali e di segno opposto.

(Fig. 1).

Le tensioni che agiscono sugli elementi della base S'_0 , in cui si trova l'origine delle coordinate, assunta l'origine stessa come centro di riduzione, si potranno ridurre ad una *forza* ed una *coppia*. Noi supponiamo date questa forza e questa coppia, lasciando del resto indeterminata la distribuzione delle tensioni. (I, 2).

Le componenti della forza saranno:

$$\int_{S_0} \tau_1 dS_0, \quad \int_{S_0} \tau_2 dS_0, \quad \int_{S_0} \tau_3 dS_0;$$

e quelle dell'asse momento della coppia:

$$\int_{S_0} (z\tau_2 - y\tau_3) dS_0, \quad \int_{S_0} (x\tau_3 - z\tau_1) dS_0, \quad \int_{S_0} (y\tau_1 - x\tau_2) dS_0.$$

Ma in tutti i punti di S_0 si ha $z = 0$. Inoltre, i coseni della normale esterna, che è parallela all'asse delle z , ma rivolta in senso opposto, sono 0, 0 e -1 . Quindi per

le formule (4) avremo:

$$\tau_1 = -\tau_{31}, \quad \tau_2 = -\tau_{32}, \quad \tau_3 = -\tau_{33};$$

onde le componenti della forza saranno:

$$-\int_{S_0} \tau_{31} dS_0, \quad -\int_{S_0} \tau_{32} dS_0, \quad -\int_{S_0} \tau_{33} dS_0,$$

e quelle dell'asse momento della coppia

$$\int_{S_0} y \tau_{33} dS_0, \quad -\int_{S_0} x \tau_{33} dS_0, \quad -\int_{S_0} (y \tau_{31} - x \tau_{32}) dS_0.$$

Ora, per la simmetria delle sollecitazioni esterne rispetto al piano X , tanto la forza che la coppia dovranno agire nel piano X : dovranno cioè annullarsi la componente della forza rispetto all'asse delle x , e le componenti dell'asse momento della coppia rispetto agli assi delle y e delle z . Se dunque diciamo F_0 , F'_0 le componenti della forza secondo gli assi Oy , Oz , ed M_0 la coppia, dovrà aversi:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{S_0} \tau_{31} dS_0 = 0, \quad \int_{S_0} \tau_{32} dS_0 = -F_0, \quad \int_{S_0} \tau_{33} dS_0 = -F'_0, \\ \int_{S_0} y \tau_{33} dS_0 = M_0, \quad \int_{S_0} x \tau_{33} dS_0 = 0, \quad \int_{S_0} (y \tau_{31} - x \tau_{32}) dS_0 = 0. \end{array} \right.$$

A queste condizioni devono soddisfare, sulla base S_0 , le tensioni τ_{31} , τ_{32} , τ_{33} . Condizioni analoghe si avranno per l'altra base del cilindro.

Le tensioni interne devono poi soddisfare, in tutti i punti del solido, le equazioni (3) e (10), e sulla superficie laterale le (11).

Ma ricordiamo che le equazioni (3) rappresentano le condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio di una porzione qualunque del cilindro: quindi ancora dell'intero cilindro. Per conseguenza, quando in tutti i suoi punti siano soddisfatte le equazioni (3), sulla superficie laterale le (11), e sulla base S_0 le (12), le condizioni analoghe relative all'altra base risulteranno soddisfatte di per se stesse, e non occorrerà tenerne conto.

3. Concludendo, noi dovremo determinare le sei tensioni interne τ_{11} , τ_{22} , τ_{33} , τ_{23} , τ_{31} , τ_{12} , in modo:

- 1° che siano verificate in tutti i punti del cilindro le equazioni (3) e (10),
- 2° che in tutti i punti della superficie laterale siano soddisfatte le equazioni (11),
- 3° che sulla base S_0 siano soddisfatte le (12).

III.

I. In questo Capitolo dovrò ripetere, con qualche modificazione, alcune delle cose esposte nell'altra mia Memoria, sopra citata.

Sia φ una funzione delle sole variabili x , y , che verifichi l'equazione

$$(13) \quad \Delta^2 \varphi = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \right).$$

Poniamo:

$$(14) \quad \psi = \varphi + \frac{\lambda}{1 + \lambda} x^2 y - \frac{1}{3} y^3.$$

Sia poi Φ una funzione delle stesse variabili x, y , che verifichi l'equazione

$$(15) \quad \Delta^2(\Delta^2 \Phi) = 0.$$

Consideriamo il sistema di tensioni espresse dalle formule:

$$(16) \quad \begin{cases} \tau_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - a\varphi, & \tau_{31} = (a\chi + b) \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \tau_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - a\psi, & \tau_{32} = (a\chi + b) \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \tau_{33} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, & \tau_{33} = \lambda \Delta^2 \Phi + a(\varphi + \psi - \frac{1}{3}y^3) + y(a\chi^2 + 2b\chi + c) + e, \end{cases}$$

ove a, b, c, e rappresentano delle costanti.

La quantità $T = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}$ sarà data dalla formula

$$T = (1 + \lambda) \Delta^2 \Phi - \frac{1}{3} a y^3 + y(a\chi^2 + 2b\chi + c) + e.$$

Si riconosce facilmente che le equazioni (3) e (10) sono verificate *).

Vediamo se è possibile determinare le funzioni φ, Φ , e le quattro costanti a, b, c, e in modo che siano verificate le equazioni (11) e (12).

2. Le equazioni (11), che devono esser soddisfatte sulla superficie laterale del cilindro, sostituendo a τ_{11}, τ_{12} , etc. le loro espressioni date dalle formule (16), e sopprimendo nella terza il fattore $a\chi + b$, diventano:

$$(17) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - a\varphi \right) \cos \alpha - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cos \beta = \tau_1, \\ -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cos \alpha + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - a\psi \right) \cos \beta = \tau_2, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cos \beta = 0. \end{cases}$$

Queste equazioni non contengono quantità in cui figuri la variabile z : basterà perciò che esse siano verificate sul contorno s di una sezione trasversale S , α e β denotando gli angoli che la normale al contorno, rivolta verso l'esterno, forma cogli assi Ox, Oy , o, ciò che è lo stesso, colle rette ξ, η , parallele agli assi uscenti dal centro Ω di quella sezione (Fig. 1).

Esaminiamo la terza delle equazioni precedenti. Se a ψ sostituiamo la sua espres-

*) Si può da prima far la verifica per i soli termini in cui figura la funzione Φ , ossia supporre $\tau_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$, $\tau_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$, $\tau_{21} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$, $\tau_{33} = \lambda \Delta^2 \Phi$, $\tau_{31} = \tau_{32} = 0$, $T = (1 + \lambda) \Delta^2 \Phi$; poi per gli altri, tenendo presente l'equazione (14).

sione (14), avremo:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \alpha + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\lambda}{1 + \lambda} x^2 - y^2 \right) \cos \beta = 0,$$

ovvero:

$$(18) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \beta = - \left(\frac{\lambda}{1 + \lambda} x^2 - y^2 \right) \cos \beta.$$

Affinchè questa condizione sia compatibile colla (13) è necessario che si abbia:

$$(19) \quad \int_s \left(\frac{\lambda}{1 + \lambda} x^2 - y^2 \right) \cos \beta \, ds = 0.$$

Ora, per qualunque funzione $f(x, y)$, si ha

$$(20) \quad \int_s f \cos \alpha \, ds = \int_s \frac{\partial f}{\partial x} \, dS, \quad \int_s f \cos \beta \, ds = \int_s \frac{\partial f}{\partial y} \, dS,$$

quindi la condizione (19) diventerà: $\int_s y \, ds = 0$; condizione che è verificata, il punto Ω essendo il centro della sezione.

Le equazioni (13) e (18) determinano la funzione φ a meno di una costante additiva. La presenza di questa costante arbitraria, induce un'arbitrarietà nella funzione Φ ; ma nelle tensioni interne, che si tratta di determinare, i termini arbitrarii si elidono. Noi, per semplicità, renderemo la funzione φ interamente determinata, aggiungendo la condizione che nel punto Ω debba essere $\varphi = 0$. Osserviamo che ci è lecito aggiungere quante condizioni vogliamo, purchè si arrivi ad ottenere un sistema di tensioni che soddisfi alle condizioni del problema.

Colla funzione φ anche la ψ sarà determinata.

Faremo un'osservazione sulla natura di queste due funzioni. La formula (18), indicando con n la normale al contorno, si può scrivere

$$(21) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = - \left(\frac{\lambda}{1 + \lambda} x^2 - y^2 \right) \cos \beta.$$

Il contorno s è simmetrico rispetto alla retta η , giacchè il cilindro è simmetrico rispetto al piano X . In due punti del contorno, simmetrici rispetto a quella retta, la derivata $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$, come risulta dall'equazione precedente, assume valori uguali. Da ciò segue che la funzione φ , armonica nell'area S , dovrà assumere valori uguali in due punti di S simmetrici rispetto alla retta η . Lo stesso, per la formula (14), avverrà della funzione ψ , come pure delle loro derivate $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ e $\frac{\partial \psi}{\partial y}$; mentre $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ e $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ assumeranno valori uguali, ma di segno opposto.

3. Riprendiamo ora le altre due equazioni (17), che potremo scrivere:

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cos \alpha - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cos \beta = \tau_1 + a \psi \cos \alpha, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cos \alpha - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cos \beta = -(\tau_2 + a \psi \cos \beta). \end{cases}$$

Per qualunque funzione $f(x, y)$ si ha: $\frac{\partial f}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial f}{\partial x} \cos \beta = \pm \frac{\partial f}{\partial s}$. Se noi poniamo

$$\frac{\partial f}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial f}{\partial x} \cos \beta = + \frac{\partial f}{\partial s},$$

verremo a fissare sul contorno s un verso positivo.

In virtù di questa formula le (22) diventano:

$$(23) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = \tau_1 + a \varphi \cos \alpha, \\ \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = -(\tau_2 + a \psi \cos \beta). \end{cases}$$

Affinchè $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ e $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ risultino funzioni ad un sol valore in tutti i punti di s , dovrà essere:

$$(24) \quad \int_s (\tau_1 + a \varphi \cos \alpha) ds = 0, \quad \int_s (\tau_2 + a \psi \cos \beta) ds = 0.$$

Di queste due equazioni la prima è soddisfatta, giacchè in due punti del contorno, simmetrici rispetto alla retta η , la quantità $\tau_1 + a \varphi \cos \alpha$ assume valori uguali e di segno opposto.

La seconda, posto

$$(25) \quad I = \frac{1}{2} \int_s \psi \cos \beta ds,$$

si può scrivere:

$$(26) \quad a = -\frac{1}{2I} \int_s \tau_2 ds;$$

essa ci dà il valore della costante a .

Cerchiamo il significato della costante I . Tenendo conto della formula (14), la (25) diventa:

$$(27) \quad I = \frac{1}{2} \int_s \left(\varphi + \frac{\lambda}{1+\lambda} x^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right) \cos \beta ds.$$

Sia φ' una nuova funzione armonica. Avremo per un noto teorema:

$$\int_s \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n} ds = \int_s \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds.$$

Prendiamo $\varphi' = y$. Sarà $\frac{\partial \varphi'}{\partial n} = \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi'}{\partial y} \cos \beta = \cos \beta$; quindi, sostituendo

a $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ il suo valore dato dalla formula (21),

$$\int_s \varphi \cos \beta ds = - \int_s y \left(\frac{\lambda}{1+\lambda} x^2 - y^2 \right) \cos \beta ds,$$

e sostituendo nella (25):

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_s \left[-y \left(\frac{\lambda}{1+\lambda} x^2 - y^2 \right) + \frac{\lambda}{1+\lambda} x^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right] \cos \beta \, ds \\ &= \frac{1}{3} \int_s y^3 \cos \beta \, ds = \int_s y^2 \, dS. \end{aligned}$$

Dunque I rappresenta il *momento d'inerzia* della sezione rispetto alla retta ξ .

Avendo determinata la costante a , nei secondi membri delle equazioni (23) figurano tutte quantità note.

Aggiungo la condizione che nel punto P_0 di s , ove $x = 0$, $y > 0$ (Fig 1) sia $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$. In un altro punto qualunque P , sarà

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = - \int_{P_0}^P (\tau_2 + a\psi \cos \beta) \, ds, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int_{P_0}^P (\tau_1 + a\varphi \cos \alpha) \, ds,$$

ovvero:

$$(28) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = U, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = V,$$

avendo posto per semplicità:

$$(29) \quad U = - \int_{P_0}^P (\tau_2 + a\psi \cos \beta) \, ds, \quad V = \int_{P_0}^P (\tau_1 + a\varphi \cos \alpha) \, ds.$$

In virtù delle formole (24), sarà anche:

$$U = \int_P^{P_0} (\tau_2 + a\psi \cos \beta) \, ds, \quad V = - \int_P^{P_0} (\tau_1 + a\varphi \cos \alpha) \, ds$$

intendendo che le integrazioni siano sempre eseguite percorrendo il contorno nel verso positivo.

In un altro punto P' avremo:

$$(30) \quad U' = \int_{P'}^{P_0} (\tau_2 + a\psi \cos \beta) \, ds, \quad V' = - \int_{P'}^{P_0} (\tau_1 + a\varphi \cos \alpha) \, ds.$$

Se i due punti P , P' sono simmetrici rispetto alla retta η , i due archi P_0P e P_0P' saranno pure simmetrici; inoltre la quantità $\tau_2 + a\psi \cos \beta$, in due punti simmetrici rispetto alla retta η , assume gli stessi valori, mentre $\tau_1 + a\varphi \cos \alpha$ assume valori uguali e contrarii. Sarà quindi, per le formole (29) e (30),

$$U = -U', \quad V = V'.$$

Dalle equazioni (28) si ricava

$$(31) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial s} = V \cos \alpha - U \cos \beta, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = U \cos \alpha + V \cos \beta. \end{cases}$$

Se si aggiunge la condizione che nel punto P_0 sia $\Phi = 0$, in un altro punto P ,

per la prima di queste equazioni, sarà:

$$\Phi = \int_{P_0}^P (V \cos \alpha - U \cos \beta) ds.$$

In due punti simmetrici rispetto alla retta η , la quantità $V \cos \alpha - U \cos \beta$ assume valori uguali e di segno contrario; dunque: $\int (V \cos \alpha - U \cos \beta) ds = 0$; e la formula precedente ci dà, per Φ , un unico valore in tutti i punti di s .

Con un ragionamento analogo a quello fatto per V , si riconosce che in due punti di s simmetrici rispetto alla retta η , Φ assume valori uguali. Lo stesso accade per $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$, come risulta dalla seconda delle equazioni (31).

Conoscendosi, in tutti i punti di s , Φ e $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$, e dovendo essere, in S , $\Delta^2(\Delta^2 \Phi) = 0$, la funzione Φ è determinata.

In due punti di S simmetrici rispetto alla retta η , la funzione biarmonica Φ assumerà valori uguali, questa condizione essendo soddisfatta sul contorno da Φ e $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$. Lo stesso avverrà di $\Delta^2 \Phi$.

4. Abbiamo ancora da tener conto delle equazioni (12), relative alla base S_0 del cilindro ($\chi = 0$).

Ivi sarà per le formole (16):

$$\tau_{31} = b \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \tau_{32} = b \frac{\partial \Psi}{\partial y},$$

$$\tau_{33} = \lambda \Delta^2 \Phi + a(\varphi + \psi - \frac{1}{3}y^3) + cy + e.$$

Abbiamo veduto che in due punti di una sezione qualunque S , quindi, in particolare, di S_0 , simmetrici rispetto al piano X , le quantità φ , ψ , $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$, $\Delta^2 \Phi$ assumono gli stessi valori, mentre $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ assume valori uguali e di segno contrario. Da ciò segue immediatamente che le condizioni

$$\int_{S_0} \tau_{31} dS_0 = 0, \quad \int_{S_0} (y \tau_{31} - x \tau_{32}) dS_0 = 0, \quad \int_{S_0} x \Delta^2 \Phi dS_0 = 0$$

saranno verificate.

La condizione $\int_{S_0} \tau_{32} dS_0 = -F_0$, diventa:

$$b \int_{S_0} \frac{\partial \Psi}{\partial y} dS_0 = -F_0.$$

Ma $\int_{S_0} \frac{\partial \Psi}{\partial y} dS_0 = \int \psi \cos \beta ds = 2I$ (III, 3); quindi $b = -\frac{F_0}{2I}$. Rimane così determinata la costante b .

Finalmente, delle due costanti ancora incognite, c ed e , che figurano nella espres-

sione di τ_{33} , si può evidentemente disporre in modo che siano verificate le due equazioni:

$$\int_{S_0} \tau_{33} dS_0 = -F'_0, \quad \int_{S_0} y \tau_{33} dS_0 = M_0.$$

Così tutte le condizioni del problema saranno soddisfatte.

IV.

1. Cerchiamo di stabilire, per una sezione qualunque S , la relazione cercata fra il raggio di curvatura ρ della linea elastica, e il momento flettente M .

Si ha:

$$M = \int_S y \tau_{33} dS,$$

e per l'ultima delle formole (16), osservando che $\int_S y dS = 0$, $\int_S y^2 dS = I$:

$$(32) \quad M = \lambda \int_S y \Delta^2 \Phi dS + a \int_S \left(\varphi + \psi - \frac{1}{3} y^3 \right) y dS + (a\chi^2 + 2b\chi + c) I.$$

Ora abbiamo identicamente:

$$2y\Delta^2\Phi = \frac{\partial}{\partial x} \left[(x^2 - y^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + 2xy \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[(x^2 - y^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right];$$

quindi per le formole (20):

$$\begin{aligned} 2 \int_S y \Delta^2 \Phi dS &= \int_S \left\{ \left[(x^2 - y^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + 2xy \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right] \cos \alpha \right. \\ &\quad \left. - \left[(x^2 - y^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right] \cos \beta \right\} dS \\ &= \int_S \left[2xy \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cos \alpha - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cos \beta \right) + (x^2 - y^2) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cos \alpha - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cos \beta \right) \right] dS; \end{aligned}$$

e per le formole (22):

$$\begin{aligned} 2 \int_S y \Delta^2 \Phi dS &= \int_S [2xy(\tau_1 + a\varphi \cos \alpha) - (x^2 - y^2)(\tau_2 + a\psi \cos \beta)] dS \\ &= \int_S [2xy\tau_1 + (y^2 - x^2)\tau_2] dS + a \int_S [2xy\varphi \cos \alpha + (y^2 - x^2)\psi \cos \beta] dS. \end{aligned}$$

Dividendo per 2, e sostituendo nella formula (32), avremo:

$$\begin{aligned} M &= \frac{\lambda}{2} \int_S [2xy\tau_1 + (y^2 - x^2)\tau_2] dS \\ &+ a \left[\int_S \left(\varphi + \psi - \frac{1}{3} y^3 \right) y dS + \frac{\lambda}{2} \int_S [2xy\varphi \cos \alpha + (y^2 - x^2)\psi \cos \beta] dS \right] \\ &\quad + (a\chi^2 + 2b\chi + c) I. \end{aligned}$$

Poniamo:

$$(33) \quad p = - \int_s \tau_2 ds, \quad q = - \frac{1}{2} \int_s [2xy\tau_1 + (y^2 - x^2)\tau_2] ds,$$

$$(34) \quad \mu = \frac{1}{2I} \left\{ \int_s \left(\varphi + \psi - \frac{1}{3}y^3 \right) y ds + \frac{\lambda}{2} \int_s [2xy\varphi \cos \alpha + (y^2 - x^2)\psi \cos \beta] ds \right\}.$$

Avremo:

$$M = -\lambda q + 2I\mu a + (a\chi^2 + 2b\chi + c)I.$$

Ma ricordiamo che $a = -\frac{1}{2I} \int_s \tau_2 ds$ (III, 3). Per la prima delle (33) sarà $a = \frac{p}{2I}$.

Quindi:

$$(35) \quad M = -\lambda q + \mu p + (a\chi^2 + 2b\chi + c)I.$$

2. Cerchiamo ora un'espressione di $\frac{1}{\rho}$ che confronteremo con quella trovata per M .

Le coordinate y dei punti della linea elastica, sono le componenti v dello spostamento da essi subito. Perciò la curvatura $\frac{1}{\rho}$, se assumiamo ρ come positivo quando il centro di curvatura si trova dalla parte delle y negative, sarà data dalla formula:

$$\frac{1}{\rho} = - \left[1 + \left(\frac{\partial v}{\partial \chi} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \chi^2},$$

ovvero, trascurando $\left(\frac{\partial v}{\partial \chi} \right)^2$ rispetto all'unità:

$$(36) \quad \frac{1}{\rho} = - \frac{\partial^2 v}{\partial \chi^2}.$$

Ora, noi abbiamo (II, 1):

$$\frac{\partial v}{\partial \chi} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2(1+\lambda)}{E} \tau_{23}, \quad \frac{\partial w}{\partial \chi} = \frac{1}{E} [\tau_{33} - \lambda(\tau_{11} + \tau_{22})],$$

da cui, eliminando w ,

$$(37) \quad E \frac{\partial^2 v}{\partial \chi^2} = 2(1+\lambda) \frac{\partial \tau_{23}}{\partial \chi} - \frac{\partial}{\partial y} [\tau_{33} - \lambda(\tau_{11} + \tau_{22})].$$

Teniamo conto delle formule (16); se ne deduce:

$$\frac{\partial \tau_{23}}{\partial \chi} = a \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$\begin{aligned} \tau_{33} - \lambda(\tau_{11} + \tau_{22}) &= \lambda \Delta^2 \Phi + a \left(\varphi + \psi - \frac{1}{3}y^3 \right) + y(a\chi^2 + 2b\chi + c) + e \\ &\quad - \lambda [\Delta^2 \Phi - a(\varphi + \psi)] \end{aligned}$$

$$= a(1+\lambda)(\varphi + \psi) - \frac{a}{3}y^3 + y(a\chi^2 + 2b\chi + c) + e;$$

quindi:

$$\frac{\partial}{\partial y} [\tau_{33} - \lambda(\tau_{11} + \tau_{22})] = a(1+\lambda) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - ay^2 + (a\chi^2 + 2b\chi + c);$$

e sostituendo nella formula (37):

$$\begin{aligned} E \frac{\partial^2 v}{\partial \chi^2} &= 2a(1 + \lambda) \frac{\partial \psi}{\partial y} - a(1 + \lambda) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + ay^2 - (a\chi^2 + 2b\chi + c) \\ &= a(1 + \lambda) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + ay^2 - (a\chi^2 + 2b\chi + c). \end{aligned}$$

Ma, per la formula (14), $\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\lambda}{1 + \lambda} x^2 - y^2$; dunque:

$$E \frac{\partial^2 v}{\partial \chi^2} = \lambda a(x^2 - y^2) - (a\chi^2 + 2b\chi + c).$$

La linea elastica giace nel piano X : onde $x = 0$; inoltre $y = v$. Noi possiamo però trascurare λv^2 rispetto a χ^2 , e ritenere:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \chi^2} = -\frac{1}{E}(a\chi^2 + 2b\chi + c).$$

Questa formula ci dice che la linea elastica è sempre rappresentata da un'equazione del 4° grado, della forma: $v = A\chi^4 + B\chi^3 + C\chi^2 + D\chi + H$.

Sostituendo nella formula (36) a $\frac{\partial^2 v}{\partial \chi^2}$ il valore trovato, abbiamo:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{E}(a\chi^2 + 2b\chi + c).$$

Dal confronto di questa formula colla (35) si ricava:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M + \lambda q - \mu p}{EI},$$

ovvero:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M + m}{EI},$$

avendo posto per semplicità:

$$m = \lambda q - \mu p.$$

È questa la relazione tra ρ ed M che volevamo stabilire. I valori di p e q si hanno immediatamente dalle formule (33). Notiamo che se l'asse delle y è verticale, e rivolto verso l'alto, p rappresenta il carico che grava sulla superficie laterale del cilindro, per unità di lunghezza. La costante q non ha un significato meccanico semplice.

La costante μ è data dalla formula (34).

3. Noi possiamo dare a μ un'espressione assai più semplice.

Indichiamo con K ed L i due integrali che figurano nella formula (34); poniamo cioè:

$$K = \int_s \left(\varphi + \psi - \frac{1}{3}y^3 \right) y dS, \quad L = \int_s [2xy\varphi \cos \alpha + (y^2 - x^2)\psi \cos \beta] ds.$$

Potremo allora scrivere:

$$(38) \quad \mu = \frac{1}{2I} \left(K + \frac{\lambda}{2} L \right).$$

Trasformiamo K ed L . Sostituendo a ψ la sua espressione, data dalla formula (14), avremo:

$$(39) \quad K = \int_S y \left(2\varphi + \frac{\lambda}{1+\lambda} x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) dS,$$

$$L = \int_S \left\{ [2xy \cos \alpha + (y^2 - x^2) \cos \beta] \varphi + (y^2 - x^2) \left(\frac{\lambda}{1+\lambda} x^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right) \cos \beta \right\} ds.$$

Questa seconda formula possiamo anche scriverla:

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} L &= 4 \int_S xy \varphi \cos \alpha ds - \int_S [2xy \cos \alpha - (y^2 - x^2) \cos \beta] \varphi ds \\ &\quad + \int_S (y^2 - x^2) \left(\frac{\lambda}{1+\lambda} x^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right) \cos \beta ds. \end{aligned} \right.$$

Dal secondo di questi tre integrali estesi ad s , possiamo far sparire la funzione φ , tenendo conto della formula (21).

Se infatti φ' è una funzione armonica, come φ , nell'area S , abbiamo:

$$(41) \quad \int_S \frac{\partial \varphi'}{\partial n} \varphi ds = \int_S \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds.$$

Considero la funzione $\varphi' = x^2 y - \frac{1}{3} y^3$. Sarà: $\frac{\partial \varphi'}{\partial x} = 2xy$, $\frac{\partial \varphi'}{\partial y} = x^2 - y^2$; quindi:

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial n} = 2xy \cos \alpha - (y^2 - x^2) \cos \beta;$$

onde sostituendo nella formula (41) a φ' e $\frac{\partial \varphi'}{\partial n}$ queste loro espressioni, e a $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ quella data dalla formula (21):

$$\int_S [2xy \cos \alpha - (y^2 - x^2) \cos \beta] \varphi ds = - \int_S \left(x^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right) \left(\frac{\lambda}{1+\lambda} x^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right) \cos \beta ds.$$

Perciò la (40) diventerà:

$$L = 4 \int_S xy \varphi \cos \alpha ds + \int_S \left[\left(x^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right) \left(\frac{\lambda}{1+\lambda} x^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right) + (y^2 - x^2) \left(\frac{\lambda}{1+\lambda} x^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right) \right] \cos \beta ds.$$

Nel secondo integrale la quantità sotto il segno si riduce semplicemente a $-\frac{2}{3} \frac{1}{1+\lambda} x^2 y^3 \cos \beta ds$. Dunque:

$$L = 4 \int_S xy \varphi \cos \alpha ds - \int_S \frac{2}{3} \frac{1}{1+\lambda} x^2 y^3 \cos \beta ds;$$

e trasformando i due integrali estesi ad s in integrali estesi all'area S :

$$(42) \quad L = 4 \int_S \left(y \varphi + xy \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dS - 2 \int_S \frac{1}{1+\lambda} x^2 y^3 dS = 2 \int_S y \left(2\varphi + 2x \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{1+\lambda} x^2 y \right) dS.$$

La formula (38), sostituendo a K ed L i loro valori dati dalla (39) e dalla (42),

diventa

$$(43) \quad \mu = \frac{1}{I} \int_S y \left[(1 + \lambda) \varphi + \lambda x \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{3} y^3 \right] dS.$$

È questa l'espressione di μ cercata.

V.

1. La funzione $\varphi(x, y)$, da cui dipende, per la formula (43), il valore della costante μ , è definita da queste condizioni:

1°, deve essere armonica nell'area S ;

2°, sul contorno deve soddisfare all'equazione:

$$(44) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \alpha + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\lambda}{1 + \lambda} x^2 - y^2 \right) \cos \beta = 0;$$

3°, deve annullarsi per $x = y = 0$.

Osserviamo che la funzione φ è quella stessa che si presenta nel problema del SAINT-VENANT, quando, cioè, sulla superficie laterale del cilindro non agiscono tensioni; giacchè allora le tensioni interne sono espresse dalle stesse formule (16), ove si faccia $a = 0$, $\Phi = 0$. Come si vede la funzione φ permane nelle espressioni delle tensioni tangenziali τ_{31} , τ_{32} .

Anzi, notiamo che essendo nel caso più generale, da noi esaminato,

$$\tau_{31} = (az + b) \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \tau_{32} = (az + b) \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

se diciamo F la resultante $\int_S \tau_{32} dS$ delle tensioni tangenziali (la resultante $\int_S \tau_{31} dS$ è nulla per ragioni di simmetria) sarà

$$F = (az + b) \int_S \frac{\partial \psi}{\partial y} dS = (az + b) \int_S \psi \cos \beta ds,$$

e per la formula (25): $F = (az + b) \cdot 2I$, da cui: $az + b = \frac{F}{2I}$. Per conseguenza:

$$\tau_{31} = \frac{F}{2I} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \tau_{32} = \frac{F}{2I} \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Queste formule mostrano che, per un determinato valore di F , la distribuzione delle tensioni tangenziali, sopra una sezione S normale all'asse del cilindro, è identica a quella che si presenta nel caso del SAINT-VENANT.

2. La determinazione di φ si riconnette col problema di DIRICHLET. Noi esamineremo il caso più semplice: supporremo cioè che si abbia

$$\varphi = b^2 y,$$

ove b è una costante (da non confondersi con quella dei §§ prec., di cui non avremo più a far uso); e cercheremo se esiste un'area S a cui si riferisca questa particolare funzione armonica.

Perciò osserviamo che l'equazione (44) diventa:

$$\left(b^2 + \frac{\lambda}{1+\lambda}x^2 - y^2\right)\cos\beta = 0,$$

ed è quindi verificata:

1°, sull'iperbole di equazione $y^2 - \frac{\lambda}{1+\lambda}x^2 = b^2$, che taglia l'asse η nei due punti P_0, Q_0 , di coordinate b e $-b$ (Fig. 2);

2°, su qualunque retta parallela all'asse η .

Noi prenderemo due di tali rette, equidistanti dall'asse η . Queste due rette, insieme ai due rami dell'iperbole, limitano un'area $ABCD$, simmetrica rispetto agli assi η e ξ .

Sarà questa l'area S a cui si riferisce la funzione $\varphi = b^2 y$.

Calcoliamo la costante μ . Avremo per la formula (43):

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{I} \int_S \left[y(1+\lambda)b^2 y - \frac{1}{3}y^3 \right] dS \\ &= \frac{1}{I} \left[(1+\lambda)b^2 \int_S y^2 dS - \frac{1}{3} \int_S y^4 dS \right],\end{aligned}$$

ovvero:

$$\mu = (1+\lambda)b^2 - \frac{1}{3} \frac{H}{I},$$

essendo:

$$I = \int_S y^2 dS, \quad H = \int_S y^4 dS.$$

Quando la distanza, che chiameremo $2a$, fra le rette AC, BD , sia piccolissima rispetto a $2b$, potremo considerare AB e CD come segmenti rettilinei; quindi ritenere:

$$\begin{aligned}I &= 2a \int_{-b}^{+b} y^2 dy = \frac{4}{3}ab^3, & H &= 2a \int_{-b}^{+b} y^4 dy = \frac{4}{5}ab^5, \\ \mu &= (1+\lambda)b^2 - \frac{1}{5}b^2 = \left(\frac{4}{5} + \lambda\right)b^2.\end{aligned}$$

Questa formula esprime, con sufficiente approssimazione, il valore della costante μ , anche per valori abbastanza grandi del rapporto $\frac{a}{b}$.

3. Noi vogliamo ora esaminare un caso particolare di sollecitazione di una trave inflessa.

La sezione trasversale della trave sia quella rappresentata dalla Fig. 2, che per piccoli valori del rapporto $\frac{a}{b}$ differisce assai poco da un rettangolo.

Supporremo la trave orizzontale, e *perfettamente incastrata* agli estremi A_1, A_2 (Fig. 3), in modo che la linea elastica, in questi due punti, si conserverà tangente all'asse delle ζ , ossia alla retta $A_1 A_2$.

Sulla porzione di superficie laterale di traccia AB (Fig. 2), agisca una pressione

di componenti $\tau_1 = 0$, $\tau_2 < 0$, $\tau_3 = 0$, parallela, dunque, all'asse η , e rivolta verso il basso. Il valore di τ_2 sia lo stesso in due punti simmetrici rispetto all'asse η , e inoltre in tutti i punti di ciascuna generatrice (I, 2). La rimanente superficie laterale della trave non sia sollecitata.

Ci proponiamo di determinare, per una sezione trasversale qualunque, il momento flettente M .

Consideriamo perciò la porzione di trave compresa fra la sezione media S_0 , nel cui centro O porremo l'origine delle coordinate, ed un'altra sezione S , distante di χ da S_0 . Supporremo da prima $\chi > 0$. Sieno M_0 ed M i momenti che agiscono sulle faccie *positive* di queste due sezioni, nel piano X ($y\chi$).

(Fig. 3).

Scriviamo che rispetto alla retta ξ dalla sezione S la somma dei momenti che agiscono sulla porzione di trave considerata, è nulla.

Le basi del cilindro S_0S sono la faccia *positiva* di S , e la faccia *negativa* di S_0 . Dunque intanto avremo i momenti M (il cui verso positivo è quello indicato dalla faccia, giacchè, per definizione, $M = \int_S y\tau_3 dS$) e $-M_0$.

Il carico $p\chi$ che agisce sulla superficie laterale della trave, fra S_0 ed S , ha, rispetto alla retta ξ , lo stesso momento $-\frac{1}{2}p\chi^2$ che avrebbe se fosse concentrato nel punto di mezzo.

La forza applicata al centro Ω della sezione S ha un momento nullo rispetto alla retta ξ , che passa per Ω . Così pure la forza applicata al centro O della sezione media S_0 ; infatti questa forza, per ragioni di simmetria, non può avere una componente secondo l'asse delle y .

Restano dunque i soli momenti M , $-M_0$, $-\frac{1}{2}p\chi^2$; e dovrà essere:

$$M - M_0 - \frac{1}{2}p\chi^2 = 0,$$

ossia:

$$(45) \quad M = M_0 + \frac{1}{2}p\chi^2.$$

Si riconosce facilmente che la stessa formula vale se $\chi < 0$.

Il valore di M_0 non può ottenersi con semplici considerazioni statiche. Consideriamo perciò la deformazione della trave. Si ha:

$$(46) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M + m}{EI},$$

ove $m = \lambda q - \mu p$. Le quantità p , q son date dalle formule (33); s denota il contorno della sezione. Nel nostro caso τ_1 è ovunque uguale a zero, τ_2 è diverso da zero nel solo tratto AB . Quindi:

$$p = - \int_{AB} \tau_2 ds, \quad q = - \frac{1}{2} \int_{AB} (y^2 - x^2) \tau_2 ds.$$

Avendo supposto in AB $\tau_2 < 0$, possiamo scrivere:

$$q = -\frac{1}{2}(y_o^2 - x_o^2) \int_s \tau_2 ds = \frac{1}{2}(y_o^2 - x_o^2)p,$$

ove x_o, y_o rappresenteranno le coordinate di un punto particolare di AB . Sarà per conseguenza:

$$m = \left[\frac{\lambda}{2}(y_o^2 - x_o^2) - \mu \right] p.$$

Per semplicità scriveremo:

$$(47) \quad m = -k b^2 p,$$

k essendo un coefficiente dato dalla formula

$$k = \frac{1}{b^2} \left[\mu - \frac{\lambda}{2}(y_o^2 - x_o^2) \right].$$

Se il rapporto $\frac{a}{b}$ è piccolo, potremo ritenere $\mu = \left(\frac{4}{5} + \lambda \right) b^2$, $y_o = b$, e trascurare $\frac{\lambda}{2} x_o^2$; onde avremo:

$$k = \frac{4}{5} + \frac{\lambda}{2}.$$

Per gli ordinarii materiali da costruzione il coefficiente di contrazione λ differisce poco da $\frac{1}{3}$; quindi k sarà di poco inferiore all'unità.

La formula (46), tenendo conto della (45) e della (47), diventa:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_o + \frac{1}{2} p \chi^2 - k p b^2}{EI},$$

ovvero, detto v lo spostamento verticale dei punti dell'asse:

$$\frac{d^2 v}{d\chi^2} = - \frac{M_o + \frac{1}{2} p \chi^2 - k p b^2}{EI},$$

da cui, integrando:

$$\frac{dv}{d\chi} = - \frac{1}{EI} \left[(M_o - k p b^2) \chi + \frac{1}{6} p \chi^3 + C \right],$$

ove C è una costante arbitraria. Ma nel punto $O(\chi = 0)$, la linea elastica, per ragioni di simmetria, è parallela all'asse delle χ $\left(\frac{dv}{d\chi} = 0 \right)$. Perciò dovrà essere $C = 0$. Se $2l$ denota la lunghezza della trave, anche per $\chi = \pm l$ deve essere $\frac{dv}{d\chi} = 0$, avendo supposto la trave perfettamente incastrata agli estremi. Dunque:

$$\pm (M_o - k p b^2) l \pm \frac{1}{6} p l^3 = 0,$$

da cui:

$$M_o = p \left(-\frac{1}{6} l^2 + k b^2 \right),$$

e sostituendo nella (45):

$$(48) \quad M = p \left(\frac{1}{2} \chi^2 - \frac{1}{6} l^2 + k b^2 \right).$$

Seguendo la teoria ordinaria, si verrebbe a trascurare il termine $k b^2$, e il momento flettente sarebbe espresso dalla formula:

$$M' = p \left(\frac{1}{2} \chi^2 - \frac{1}{6} l^2 \right).$$

Il massimo valore di M' si ha per $\chi = \pm l$, ossia nelle sezioni estreme, ove

$$M' = \frac{1}{3} p l^2.$$

Invece dalla formula (48) si ha nelle stesse sezioni:

$$M = p \left(\frac{1}{3} l^2 + k b^2 \right) = \frac{1}{3} p l^2 \left[1 + 3 k \left(\frac{b}{l} \right)^2 \right],$$

ovvero:

$$M = M' \left[1 + 3 k \left(\frac{b}{l} \right)^2 \right].$$

In generale l'altezza $2b$ della trave sarà molto piccola rispetto alla sua lunghezza totale $2l$; il termine $3k \left(\frac{b}{l} \right)^2$ avrà perciò un valore piccolissimo.

Si deve però osservare che le cose dette valgono quand'anche A_1 ed A_2 non siano gli estremi della trave, ma rappresentino, per es., due punti intermedi, in cui la trave è appoggiata, purchè in questi due punti le tangenti alla linea elastica siano orizzontali $\left(\frac{dv}{d\chi} = 0 \right)$, come, sotto certi condizioni, avverrà effettivamente.

Allora potrà darsi che la distanza $2l$ fra i punti A_1 , A_2 non sia molto grande rispetto a $2b$. Supponiamo, per es., $l = 5b$, e facciamo $k = 1$. Sarà $M = 1,12 M'$. L'errore, come si vede, non è del tutto trascurabile.

Genova, 2 luglio 1905.

E. ALMANSI.