Su le superficie di 4° ordine con conica doppia.

(Memoria di H. G. ZEUTHEN, pubblicata per la festa commemorativa
del IV centenario dell'Università di Copenhagen - Giugno 1879.)

VERSIONE DAL DANESE, RIVEDUTA DALL'AUTORE,

di GINO LORIA

Intorno a le superficie di cui ci occuperemo in questo lavoro esistono già da molto tempo delle memorie di KUMMER (*), di CLEBSCH (**), di GEISER (***), di CREMONA (****), di R. STURM (*****), e di altri. A queste ricerche si devono aggiungere quelle su le così dette « superficie anallagmatiche del 4° ordine » o « Ciclidi » cioè su le superficie del 4° ordine aventi per linea doppia il cerchio immaginario a l'infinito, ricerche che furono iniziate da MOUTARD (*****) e continuate con gran successo da questo stesso matematico assieme a LAGUERRE, DARBOUX (*****) ed altri. I risultati a cui pervennero questi ultimi geometri sono applicabili immediatamente solo ad una delle classi di superficie che vogliamo studiare; ma si può però passare da essi a quelli relativi a le superficie generali — tranne che per quanto concerne la realtà — con una semplice trasformazione omografica, come osservò anche MOUTARD (*****).

(*) Giornale di BORCHARDT, vol. 64, pag. 66.

(**) Ib., vol. 69, pag. 142.

(***) Ib., vol. 70, pag. 249.

(****) Rendiconti del R. Istituto Lombardo, 9 e 23 marzo 1871.

(*****) Mathematische Annalen, vol. 4, pag. 265.

(******) Bulletin de la Société philomathique, 1864. — Nouvelles Annales, 1864, p. 306 e 536.

(******) Un elenco delle memorie, in parte pressochè irreperibili, che si riferiscono a questo argomento si trova nel più esteso dei lavori di DARBOUX, il cui titolo è: *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* (Paris 1873), il cui fine precipuo è appunto lo studio delle ciclidi.

(******) Nouvelles Annales, 1864, pag. 309. Siccome le memorie di MOUTARD che si trovano in questo stesso volume dei Nouvelles Annales, sono indipendenti da la comunicazione fatta da KUMMER a l'Accademia di Berlino il 16 luglio 1863, così è chiaro che MOUTARD aveva dal canto suo scoperti i cinque coni di KUMMER a cui è dovuto il grande interesse che presentano le superficie di cui è parola.

Ciò che io ho specialmente in vista, e che è la ragione di questo nuovo lavoro, è uno studio della forma e della connessione delle varie falde delle predette superficie e della realtà delle loro rette e dei loro « coni di KUMMER ». Con tale ricerca si giunge ad estendere le nozioni, finora molto limitate, su la forma degli enti geometrici a tre dimensioni definiti da semplici equazioni algebriche, e si ottengono degli esempli che saranno utili nelle future ricerche su la forma delle superficie.

Per fare questo studio io ho anzitutto approfittato della circostanza che il contorno apparente della superficie, vista da un punto della conica doppia, è una curva generale del 4° ordine. Ciò diede origine a una parte del mio lavoro che è una continuazione del mio antico metodo di dedurre le proprietà di realtà della superficie di 3° ordine da la loro proiezione stereografica (*). Questo procedimento, che io uso nella *III Parte*, è immediatamente applicabile solo quando la conica doppia ha punti reali. Ma a la stessa limitazione non è soggetto il procedimento che io segno nella *IV Parte*. Esso consiste in una rappresentazione della superficie su le due facce di una superficie di 2° ordine, rappresentazione che a sua volta si fonda su una costruzione della superficie, la quale non è che una generalizzazione d'una costruzione della ciclide che si trova nell'opera già citata di DARBOUX (**).

Allo studio delle forme farò precedere l'esposizione delle più importanti fra le proprietà generali delle superficie, cioè fra quelle proprietà che possono venir espresse da equazioni e in cui, quindi, non si deve far distinguere fra reale ed immaginario. In tale esposizione io uso naturalmente lo stesso metodo che nello studio della forma delle superficie. Ma siccome questo metodo, che mette in evidenza delle nuove relazioni fra alcune proprietà delle superficie e porge delle dimostrazioni nuove e semplici di alcune proprietà note, ha condotto anche a parecchi nuovi teoremi e apre una comoda via ad ulteriori ricerche, così nella *I e II Parte* io mi arresto a darne un'esposizione più diffusa di quello che esigerebbe lo studio della forma fatto nella *III e IV Parte*.

(*) Mathem. Annalen, vol. 8. — Nella sua Memoria già citata, GEISER propose di applicare la trasformazione da esso usata, e con la quale si passa da le superficie qui studiate a le superficie di 3° ordine, a trarre delle conclusioni su le proprietà di realtà. Aggiungerò che, per ciò che riguarda le rette della superficie, questo metodo non è neppure di difficile applicazione.

(**) Però questa costruzione non è la stessa che sta a base dello studio fatto da DARBOUX delle « forme principali » delle cicliidi, dal quale si possono ricavare le « forme principali » delle superficie di 4° ordine con una conica doppia non avente punti reali.

Siccome io, come si fa spesso in geometria, nella dimostrazione delle dette proprietà generali, mi servo di una determinata figura su cui certi punti e certe linee — per la cui realtà, si noti bene, non è necessaria alcuna *equazione* di condizione — sono reali, così io debbo qui esplicitamente enunciare il principio che mi permette di estenderle a tutte le superficie di cui si tratta. Esso è simile al principio di continuità di PONCELET, solamente è più preciso di questo, e non ha bisogno di alcuna dimostrazione, ove lo si enunci nel seguente modo:

Quando un risultato, tale che possa tradursi in una o più equazioni, è dimostrato vero per un'infinità di figure di una certa specie, senza che sia necessario supporre che i coefficienti delle equazioni che definiscono le figure di quella specie soddisfino alcuna nuova equazione di condizione, esso risultato deve sussistere per tutte le figure di quella specie.

P. e.: Siccome la condizione che la conica doppia di una delle superficie di cui ci occupiamo ora abbia punti reali, non può rappresentarsi con un'*equazione* di condizione, ma solo con una limitazione, così sarebbe perfettamente lecito dimostrare le proprietà generali — ma, ben inteso, non quelle di realtà — nel caso in cui la conica abbia punti reali. Ciò invece non si potrebbe fare nel caso in cui, entro la nostra classe di superficie, si considerasse un sistema in cui l'esistenza di punti reali su la conica doppia fosse soggetta a un'*equazione* di condizione.

I.

Proprietà generali ottenute mediante proiezione da un punto della conica doppia.

1. *Proiezione da un punto della conica doppia.* Qualunque sezione piana di una superficie di 4° ordine con conica doppia è una curva di 4° ordine avente due punti doppi nelle intersezioni del piano secante con tale conica. Essa è quindi della classe $4 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 8$. Da uno qualunque dei punti doppi si possono in conseguenza condurre quattro tangenti, oltre a le due rette tangenti in esso a la curva. Segue da ciò, che un cono circoscritto a la superficie e avente il vertice su la conica doppia sarà costituito dai due piani tangenti nel vertice e da una superficie conica di 4° ordine, ossia che *quando la superficie viene proiettata da un punto della conica doppia, il suo contorno ap-*

parente consta, oltrechè delle tracce dei due piani tangenti, di una curva di 4° ordine. La superficie conica tocca ognuno dei piani tangenti lungo le corrispondenti tangenti principali (rette aventi un contratto di 2° ordine con la superficie); ciò si riconosce conducendo dal vertice del cono le tangenti a la sezione fatta nella superficie da un piano tangente. Il contorno ha quindi per tangenti doppie le tracce di quei due piani tangenti. La traccia del piano della conica doppia passa per il punto d'intersezione di queste due tracce.

Nel n.° 2 mostreremo che il contorno può essere una curva qualunque di 4° ordine. Ma possiamo fin d'ora mostrare che in generale essa non avrà punti doppi nè cuspidi (nè punti multipli più complicati); infatti, qualunque retta proiettante, proietta due soli punti della superficie, mentre un punto doppio o una cuspidale del contorno dovrebbe esser traccia di una tangente doppia o di una tangente principale della superficie non avente alcun punto di contatto coincidente con il centro di proiezione (*), cioè di una retta proiettante 4 o 3 punti della superficie.

2. *Rappresentazione analitica.* Una superficie di 4° ordine avente una conica doppia nel piano $z = 0$ è rappresentata da un'equazione della forma

$$A_2^2 + 2A_2B_1z + C_2z^2 = (A_2 + B_1z)^2 + (C_2 - B_1^2)z^2 = 0, \quad (1)$$

ove A_2, B_1, C_2 sono polinomi contenenti le coordinate nei gradi indicati dagli indici rispettivi. Prendiamo il centro di proiezione, che abbiamo scelto su la conica doppia $A_2 + B_1z = 0, z = 0$, per origine del sistema di coordinate; di più prendiamo per piano $y = 0$ il piano tangente a la superficie $A_2 + B_1z = 0$ in quello stesso punto e finalmente per quarto piano coordinato $t = 0$ il piano polare del centro di proiezione rispetto a la quadrica $C_2 - B_1^2 = 0$. La equazione (1) assumerà allora la forma

$$a(\psi + yt)^2 + b(\varphi + t^2)z^2 = 0 \quad (2)$$

ove φ e ψ sono funzioni di secondo grado delle sole x, y, z ed a, b sono costanti. Una retta proiettante è determinata quando si conoscono i valori dei rapporti $\frac{y}{x}$ e $\frac{z}{x}$; questi valori, sostituiti nella (2), la trasformano in un'equazione di secondo grado nel rapporto $\frac{t}{x}$, le cui radici determinano i punti proiettati da quella retta. Uno di questi coincide con il centro di proiezione

(*) V. p. e. SALMON, *Geometry of three dimensions*, 4ª ed., pag. 245-246, oppure la traduzione tedesca fatta di quest'Opera dal prof. FIEDLER, vol. 2° (1880), pag. 24.

quando sia

$$ay^2 + bz^2 = 0; \quad (3)$$

quest'equazione rappresenta i due piani tangenti nel centro di proiezione. I due valori di $\frac{t}{x}$ coincidono quando sia

$$a^2y^2\psi^2 - (ay^2 + bz^2)(a\psi^2 + b\varphi z^2),$$

cioè quando sia

$$z^2\{(ay^2 + bz^2)\varphi + a\psi^2\} = 0.$$

Per $z^2 = 0$ i due punti proiettati coincidono in un punto della conica doppia, invece per

$$(ay^2 + bz^2)\varphi + a\psi^2 = 0 \quad (4)$$

la retta proiettante diviene tangente a la superficie e quindi la (4) rappresenta il cono di 4° ordine che, insieme ai due piani tangenti, costituisce il cono circoscritto da l'origine a la data superficie.

La equazione (4) è la forma più generale dell'equazione di un cono di 4° ordine bitangente a ciascuno dei piani della coppia $ay^2 + bz^2 = 0$ (*), epperò questi due piani sono due suoi arbitrari piani tangenti doppi. Inoltre, l'equazione di quella coppia di piani assume la stessa forma quando per piano $z = 0$ si prenda un piano arbitrario passante per la loro intersezione, purchè per piano $y = 0$ si prenda il conjugato armonico di quello rispetto a la coppia stessa. Dunque:

Data ad arbitrio una curva di 4° ordine e date due qualunque sue tangenti doppie e una retta arbitraria passante per la loro intersezione, si può sempre costruire una superficie di 4° ordine con conica doppia tale che quella curva sia il suo contorno in una proiezione fatta da un punto della conica doppia, che le due tangenti doppie siano le tracce dei suoi piani tangenti nel centro di proiezione, e che infine la retta pel loro punto d'intersezione sia la traccia del piano della conica doppia. Vediamo adunque che nelle ricerche generali intorno alla proiezione della superficie fatta da un punto qualunque della conica doppia *non è il caso di pensare ad altre condizioni a cui debbano soddisfare i contorni e le tracce di quei tre piani, oltre a quelle enumerate nel n.° 1.*

(*) Ciò segue dalla nota teoria delle coniche quadritangenti a una curva di 4° ordine; si veggia per es. SALMON, *Higher plane Curves* (pag. 272 della traduzione tedesca del prof. FIEDLER). Di questa teoria avremo occasione di fare parecchie altre applicazioni.

3. *Punti visibili e punti invisibili.* Per distinguere l'uno da l'altro i due punti della superficie che hanno la stessa proiezione, noi introdurremo la nozione di punti visibili e punti invisibili. Imagineremo a tale scopo un punto che percorra la retta proiettante andando dal centro di proiezione, prima a la traccia di essa sul piano di proiezione, poi al suo punto a l'infinito e che quindi, dal punto a l'infinito, ritorni per la parte opposta al centro di proiezione. Allora, diremo visibile il punto della superficie che s'incontra per primo, invisibile l'altro. Siano A, B due punti della superficie; uniamoli con una linea giacente su la superficie — operazione che non è possibile quando i punti stanno su due falde di superficie non connesse lungo una comune intersezione con il piano a l'infinito — e supponiamo che non sia lecito passare da l'una a l'altra delle falde di superficie che s'intersecano nella curva doppia passando per i punti d'intersezione di questa con la curva AB già segnata; allora, A e B saranno entrambi visibili o entrambi invisibili quando la somma del numero dei punti di semplice contatto (*) della proiezione della linea AB con il contorno e del numero de'suoi punti d'intersezione con la proiezione della curva doppia e con la retta all'infinito è un numero pari, invece uno dei detti punti sarà visibile e l'altro invisibile quando quella somma sarà impari.

Presenta un grande interesse lo studio della visibilità o invisibilità dei due punti A e B che stanno infinitamente vicini al centro di proiezione P su ciascuna delle due falde della superficie che ivi s'intersecano. Questi punti sono rappresentati da due punti delle tracce dei piani tangenti in P . Chiameremo T' il punto d'intersezione di queste tracce e A', B' le proiezioni di A, B . Imagineremo poi che un punto mobile vada da A fino a la tangente PT' della conica doppia, mantenendosi infinitamente vicino a P , che poi esso passi da l'una a l'altra delle due falde della superficie, e che infine, mantenendosi infinitamente vicino a P , vada sino in B . Corrispondentemente la proiezione si muoverà su la tangente doppia $T'A'$ da A' a T' e quindi su la tangente doppia $T'B$, sino in B' . Siccome nel precedente movimento è avvenuto un passaggio da una falda a l'altra della superficie, così, nella regola precedentemente esposta,

(*) Si considerano come punti di contatto anche le intersezioni del contorno con una linea doppia del piano di proiezione, cioè con una linea di cui ogni punto è proiezione di due punti appartenenti a la stessa linea della superficie. Una linea doppia è divisa da un punto di intersezione col contorno (« vertice ») in due parti; una di esse è proiezione di due porzioni reali di linee che si riuniscono in quel punto d'intersezione e che sono una visibile, l'altra invisibile; l'altra invece contiene proiezioni di punti imaginari. Se la proiezione di AB seca il contorno in $2n$ punti coincidenti in uno, questo equivale ad n punti di contatto.

bisogna scambiare fra loro le parole pari ed impari. Il movimento può immaginarsi eseguito in modo che in nessuno dei passaggi $A'T'$, $T'B'$ s'incontri la retta a l'infinito del piano di proiezione. Il numero delle intersezioni con la proiezione della conica doppia sarà 0 od 1 secondochè A' e B' stanno da la stessa parte o da parti opposte di essa. Dunque A e B sono entrambi visibili o entrambi invisibili quando la somma di quel numero e del numero dei punti di contatto del contorno con i segmenti rettilinei $A'T'$ e $B'T'$ è impari, uno è visibile l'altro è invisibile quando quella somma è pari.

4. *Piani tangenti doppi.* Oltre a le tracce dei due piani tangenti della superficie nel centro di proiezione, sono tangenti doppie del contorno le tracce dei piani tangenti doppi della superficie che passano pel centro di proiezione. Il numero di questi piani è per conseguenza 26. La linea d'intersezione con la superficie di un piano tangente doppio ha per punti doppi, tanto i due punti di contatto, quanto i punti d'intersezione del suo piano con la conica doppia. Essa sarà quindi composta o di due coniche secantisi in quei quattro punti doppi, oppure di una curva di 3° ordine avente un punto doppio nel centro di proiezione e di una retta secante questa curva nell'altro dei punti d'intersezione del piano considerato con la conica doppia e nei due punti di contatto (*).

A quale di queste due specie di piani tangenti appartenga un dato piano tangente del cono circoscritto, si riconosce determinando se delle due curve in cui si spezza quell'intersezione, ognuna passa una volta pel centro di proiezione, oppure se una di esse vi passa due volte e l'altra non vi passa. Se si chiamano A' e B' i due punti in cui la traccia di quel piano incontra le tracce $T'A'$ e $T'B'$ de' piani tangenti in P alla superficie, noi potremo percorrere quella delle due curve che passa pel punto A coincidente con P e proiettato in A' , e giungere al suo punto C proiettato in B' ; ciò è possibile perchè una qualunque delle due curve qui considerate consta d'un solo ramo. Poi, dovremo determinare se il punto C cade o non nel punto B coincidente con P e proiettato in B' : se A' e B' stanno dalla stessa parte della proiezione della conica doppia ed A è visibile (invisibile) C sarà pure visibile (invisibile) ovvero sarà invisibile (visibile), secondochè il segmento finito $A'B'$ della traccia del piano tangente ha un numero pari o un numero impari di contatti con il contorno; succede il contrario se A' e B' stanno da parti opposte della proiezione della conica doppia. Queste osservazioni assieme a quelle fatte nel

(*) Che questa retta non passi pel centro di proiezione, risulta considerando che, in tal caso, il contorno acquisterebbe un punto doppio, il che è contro le ipotesi fatte.

n.° 3 per decidere se B era visibile, permettono di concludere che C coinciderà con B soltanto quando il perimetro del triangolo $T'A'B'$ tocca il contorno in un numero impari di punti. Nel caso in cui il perimetro del triangolo tocca il contorno in un numero pari di punti — caso che si verifica quando l'intersezione consta di due coniche — i sei punti in cui le rette indefinite $T'A'$, $T'B'$, $A'B'$ toccano il contorno, staranno, in virtù del teorema di CARNOT, su una conica, la quale passerà anche per i punti di contatto d'una quarta tangente doppia. Quest'ultima forma assieme ad $A'B'$ una conica appartenente a quello stesso dei 63 sistemi di coniche quadritangenti al contorno di cui fa parte la conica costituita da le rette $T'A'$ e $T'B'$. Siccome poi ogni sistema contiene in tutto sei coniche degenerare in coppie di rette, così nel predetto sistema vi saranno, oltre a le tracce $T'A'$, $T'B'$ dei piani tangenti in P , ancora le altre dieci tangenti doppie; e però, in virtù del principio enunciato nell'introduzione (applicabile in questo caso perchè tutte le tangenti doppie di una curva di 4° ordine possono esser reali senza che sia soddisfatta alcuna equazione di condizione), potremo considerare come dimostrato in generale il teorema seguente:

Per un punto P della conica doppia si possono condurre dieci piani secanti ciascuno la superficie in due coniche; se si proietta la superficie da P , le tracce di questi piani si distribuiscono in coppie per formare delle coniche quadritangenti al contorno della superficie e appartenenti a lo stesso sistema di cui fa parte la conica costituita da le tracce dei due piani tangenti in P .

Nello stesso tempo concludiamo che: *la superficie contiene sedici rette; qualunque piano per una di esse seca ancora la superficie in una curva di 3° ordine con punto doppio.*

5. *Teorema di Kummer.* Dal n.° 4 scaturisce che, per un punto qualunque della conica doppia, si possono condurre dieci piani, ognuno dei quali sechi la superficie in due coniche. Le proiezioni di queste coniche da un punto fisso P della conica doppia saranno coniche quadritangenti al contorno. Ora, l'insieme delle coniche quadritangenti a una curva di 4° ordine si divide in 63 distinti sistemi colle caratteristiche $\mu = 2$, $\nu = 4$, cioè in 63 sistemi tali che in ognuno di essi vi sono due coniche passanti per un punto arbitrario del piano e quattro tangenti a una retta arbitraria del piano stesso. Quindi le predette proiezioni si devono distribuire in un certo numero y di questi sistemi, e ognuno di questi y sistemi sarà proiezione di un certo sistema di coniche della superficie. Vogliamo cercare l'involuppo dei piani delle coniche appartenenti ad uno di questi sistemi.

Siccome un punto qualunque del piano di proiezione, è immagine di due punti della superficie, così per un punto di questa passerà una conica del sistema. Però, il piano di questa secherà ancora la superficie in una conica. Ora, se questa appartenesse a lo stesso sistema dell'altra, per un punto qualunque della superficie si potrebbe condurre un solo piano tangente all'involuppo cercato, e però questo si ridurrebbe ad una retta, asse di un fascio di piani secanti ciascuno la superficie in una coppia di coniche; tutte le coniche del sistema dovrebbero secare l'asse del fascio in due punti fissi — perchè altrimenti questo asse apparterebbe alla superficie — e in conseguenza le proiezioni loro passerebbero per due punti fissi, il che ripugna con l'ipotesi fatta che il contorno sia una curva di 4° ordine generale.

Segue da ciò, che i piani tangenti dell'involuppo secano ancora la data superficie in un'altra serie di coniche (che non può essere costituita di parecchi sistemi, perchè il dato sistema e l'involuppo sono semplici). Per un punto qualunque della superficie passa dunque una conica di ciascuno dei due sistemi che hanno lo stesso involuppo, cioè due piani tangenti dell'involuppo. Questo risulta quindi di 2^a classe, e però è un cono.

Siccome questo cono non contiene la conica doppia, così da un punto qualunque P di questa si potranno condurre due piani tangenti al cono, e siccome, in virtù del n.° 4, per P passano dieci tali piani, così devono esservi cinque coni e il numero y dei sistemi deve esser 10. Si ha dunque il teorema:

L'involuppo dei piani secanti la data superficie in coppie di coniche, consta di cinque coni di 2° ordine. Li chiameremo Coni di Kummer dal nome dello scopritore di questo teorema. Ogni piano tangente di un cono di Kummer seca la superficie in due coniche appartenenti a sistemi diversi. Diremo coniugati due sistemi di coniche della superficie i cui piani toccano lo stesso cono di KUMMER.

6. *Posizione delle rette della superficie rispetto ai coni di Kummer.* In uno qualunque dei dieci sistemi che si ottengono proiettando un sistema di coniche della superficie, due delle sei coniche degenerate in coppie di rette, rappresentano due coniche della superficie passanti per il centro di proiezione. I punti di una tal conica posti infinitamente vicini a P sono determinati da la traccia di uno dei piani tangenti in P ; gli altri lo sono da la traccia di un piano tangente condotto da P al cono di KUMMER corrispondente al sistema considerato. Delle due paia di coppie di rette che si possono formare combinando la traccia di uno dei due piani tangenti in P con la traccia di un piano tangente a quel cono passante per P , uno appartiene a l'uno, l'altro a l'altro

di quei due sistemi di coniche quadritangenti che sono proiezioni di due sistemi coniugati della superficie.

Le altre otto coppie di tangenti doppie, ognuna delle quali deve riguardarsi come una conica d'uno dei due sistemi, debbono essere proiezioni di coppie di rette della superficie poste in piani tangenti a quel cono. Siccome i due sistemi non possono aver comuni che le quattro rette che nominammo per prime (*), così noi otterremo in tal modo tutte sedici le rette della superficie. Dunque:

Uno qualunque dei cinque coni di Kummer è toccato da le sedici rette della superficie; queste stanno a due a due in otto piani tangenti ad uno di quelli.

Questo teorema mostra che ognuna delle sedici rette della superficie ne incontra altre cinque, quelle, cioè, che stanno con essa in uno stesso piano tangente di un cono di KUMMER.

Come già osservarono GEISER e DARBOUX, le proprietà caratteristiche della configurazione formata da le rette della superficie, si possono riassumere nel teorema seguente:

Le sedici rette della superficie, per quanto riguarda le loro mutue intersezioni, hanno le stesse proprietà delle sedici rette della superficie generale di 3° ordine non secanti una 17^a di esse.

Il legame che viene così stabilito fra le nostre superficie e quelle del 3° ordine, si rende manifesto in modo naturalissimo studiando la proiezione di cui ci servimmo; infatti, è facile vedere che questa si ottiene anche proiettando una superficie di 3° ordine φ_3 da uno de' suoi punti. Allora le tracce dei due piani tangenti in P a la superficie di 4° ordine si mutano nella traccia del piano tangente a φ_3 nel novello centro di proiezione e nella proiezione di una retta l della superficie; le dieci tracce dei piani tangenti condotti da P ai coni di KUMMER divengono le proiezioni delle rette di φ_3 che secano l ; le proiezioni delle sedici rette della superficie di 4° ordine coincidono con le proiezioni delle rette di φ_3 che non incontrano l ; finalmente le condizioni per l'intersezione *effettiva* di queste rette rimarranno, come si vede facilmente, le stesse. Aggiungeremo ancora che la stessa trasformazione col mezzo della quale GEISER dimostra il precedente teorema, mette in evidenza che le due superficie hanno la stessa proiezione; e questo fatto è la base del precedente metodo di dimostrazione.

(*) Oltre ai due indicati, vi è un terzo modo di distribuire in coppie queste rette; il sistema di coniche che così resta determinato è quello di cui è fatto cenno nel n.° 4.

7. *Intersezioni fra coniche della superficie.* Siccome per ogni punto della superficie non posto su la curva doppia si può condurre una conica di ciascuno dei dieci sistemi (n.º 5), così è evidente che due coniche dello stesso sistema non possono secarsi, supponendo però che non sientino le intersezioni che possono aver luogo in punti della curva doppia e che scompaiono facendo un cambiamento infinitesimo in una di esse. Per conseguenza, i due punti in cui una di quelle coniche incontra un altro piano tangente del medesimo cono di KUMMER devono appartenere a la conica del sistema conjugato:

Le coniche della superficie appartenenti a uno stesso sistema non s'incontrano. Le coniche di due sistemi conjugati s'incontrano in due punti.

Le intersezioni di due coniche (k) , (l) i cui piani toccano differenti coni di KUMMER si potrebbero determinare servendosi di una figura, il cui contorno abbia reali le 28 tangenti doppie e, quindi, i 63 sistemi di coniche quadritangenti. Però questo studio si può semplificare limitandosi a considerare il caso in cui una, (l) , delle due coniche è costituita di due rette a e b . Quanto si dice in questo caso riguardo a le intersezioni di questa conica, deve sussistere per infinite altre dello stesso sistema (perchè un punto d'intersezione di (l) con il piano di (k) non può saltare improvvisamente da l'una a l'altra delle coniche in cui quel piano secca la superficie), e quindi varrà per tutto il sistema a cui appartiene (l) .

Ora, poichè le rette a e b si secano senza che il loro piano tocchi quello stesso cono di KUMMER che tocca il piano di (k) , esse faranno parte di coniche di due sistemi conjugati corrispondenti a lo stesso cono di KUMMER. Perciò una secherà (k) , l'altra no. Dunque:

Due coniche della superficie i cui piani non toccano lo stesso cono di Kummer s'incontrano in un punto.

Se (k') è l'altra conica della superficie che sta con (k) in un piano, ed (l') quella che sta con (l) in un piano, i quattro punti d'intersezione della superficie con la retta in cui si secano quei piani, sono le intersezioni di (k) ed (l) , di (k) ed (l') , di (k') ed (l) , e di (k') ed (l') .

8. *Corollarî del metodo di dimostrazione esposto nei n.º 4, 5 e 6.* Applicando dei teoremi noti relativi a le coniche quadritangenti di una curva di 4° ordine, ai sistemi considerati nei numeri precedenti si trovano dei teoremi relativi alla superficie di cui ci occupiamo. Così, dalla proposizione: *i punti di contatto di due coniche dello stesso sistema stanno su un'altra conica*, si ottiene ciò che segue:

Le due coppie di tangenti principali in un punto P della conica doppia

e i punti di contatto della superficie con due piani tangenti doppî passanti per P e toccanti lo stesso cono di KUMMER, stanno su uno stesso cono quadrico.

Un punto P della conica doppia è vertice di un cono quadrico passante per gli otto punti in cui i piani tangenti condotti da P a due coni di KUMMER toccano la superficie. Per le rette che vanno da un punto P della conica doppia ai punti di contatto della superficie con i piani condotti per P e per le rette della superficie che stanno in uno stesso piano tangente ad un cono di KUMMER, si possono far passare: 1.° tre coni quadrici, ognuno dei quali contenga i punti di contatto della superficie con piani condotti per P e per un'altra coppia di rette della superficie situate in uno stesso piano tangente a quel cono di KUMMER, 2.° due coni quadrici a ognuno dei quali appartengano le due tangenti principali poste in uno de' piani tangenti in P a la superficie e i punti di contatto della superficie con uno dei piani tangenti condotti da P a quello stesso cono di KUMMER.

Dal teorema: *le sei intersezioni delle coppie di tangenti che costituiscono coniche dello stesso sistema stanno su una conica*, si deduce, fra le altre, la seguente proprietà: la tangente in un punto P della conica doppia e le congiungenti di P con i vertici dei cinque coni di KUMMER sono generatrici di un cono di 2° ordine. Considerando l'intersezione di due consecutivi di tali coni, si vede che la cubica gobba passante per i vertici dei coni di KUMMER e per il punto P della conica doppia, toccherà questa in P .

Viceversa, da la esposta applicazione stereometrica della teoria delle curve di 4° ordine, si possono dedurre dei *teoremi su queste curve*. I sistemi costituiti da le proiezioni di coniche della superficie appartenenti a due serie poste nei piani tangenti di uno stesso cono di KUMMER, saranno due sistemi di coniche quadritangenti al contorno aventi comuni quattro tangenti doppie distribuite in vario modo in due coppie. Nel terzo di tali modi, le tangenti doppie della stessa coppia si secano nella proiezione K' del vertice del cono di KUMMER e nella traccia T' della tangente a la conica doppia nel centro di proiezione. Ora, se si considera una conica in ognuno di quei due sistemi, due dei loro punti d'incontro saranno proiezioni di intersezioni effettive di due coniche dello spazio poste in piani tangenti al cono di KUMMER, e quindi la congiungente di essi, che è la proiezione dell'intersezione dei due piani tangenti, passerà per K' . L'altra corda comune di quelle due coniche passerà per T' — il che si vede facendo passare la proiezione della conica doppia (la quale proiezione può essere una retta qualunque per T') per uno, M' , dei due punti d'intersezione posti su quella stessa corda comune; allora i due piani tangenti avranno ancora co-

mune il punto della conica doppia che è proiettato in M' , epperò coincideranno (*) e il quarto punto d'intersezione delle due coniche della superficie cadrà in conseguenza su la conica doppia. — Con ciò resta dimostrato il teorema seguente:

Due opposte fra le corde comuni a due coniche quadritangenti di una curva piana di 4° ordine e appartenenti a due sistemi aventi comuni quattro tangenti doppie accoppiate in varî modi, passano una per l'una, l'altra per l'altra delle due intersezioni di quelle due coppie di tangenti doppie che non possono costituire una conica di alcuno di quei due sistemi.

Non ci fermeremo a l'applicazione che si potrebbe fare di questa proposizione a la superficie che studiamo; piuttosto osserveremo che essa guida a la notissima proposizione planimetrica (**):

Oltre a le 28 tangenti doppie di una curva di 4° ordine, vi sono 5040 rette di cui ciascuna congiunge tre punti d'intersezione di tangenti doppie; per ogni punto d'intersezione di due tangenti doppie passano 40 di queste rette.

9. *Curve della superficie.* Una curva algebrica del piano di proiezione è in generale immagine di una curva gobba semplice, i cui punti sono a coppie proiettati in uno stesso punto. Però, nello studio delle curve più semplici appartenenti a la superficie, presentano un grande interesse le curve del piano di proiezione le cui corrispondenti curve si spezzano in due aventi proiezioni coincidenti. Una condizione necessaria affinchè una curva del piano di proiezione sia di tale specie è che essa tocchi il contorno in tutti i punti (reali o immaginari) che ha comuni con questo (n.° 3). Inoltre questa condizione è anche sufficiente quando quella curva è *razionale* (unicursale o di genere 0); ciò si deduce dal fatto che il genere della curva proiettata è allora -1 (***).

Non sono in grado di indicare sotto forma completamente generale le condizioni necessarie e sufficienti, affinchè una curva sia proiezione comune di due distinte curve della superficie (****); tuttavia non è difficile trovarle nei casi

(*) La corda comune passante per K' sarà proiezione della generatrice di contatto.

(**) Vedi SALMON-FIEDLER, *Höhere ebene Curven*, pag. 281. Il teorema generale esposto nel testo si può dimostrare analiticamente con un ragionamento analogo a quello con cui il SALMON dimostra la citata proposizione più particolare sulle coppie di tangenti doppie.

(***) Questo risultato — che del resto è contenuto in una formola generale che io pubblicai nel 3° vol. dei *Mathem. Annalen*, pag. 323 — si può anche ottenere mediante una numerazione di punti doppi.

(****) Fra i risultati più particolari citerò i seguenti: Se una curva di 3° ordine del piano di proiezione, priva di punti doppi, è immagine di due curve, essa apparterrà ad uno dei 28 sistemi (triplicemente infiniti) di curve di 3° ordine tangenti in sei punti al contorno

più semplici in cui si tratti di curve d'ordine non molto elevato. Ma siccome la determinazione di tali curve della superficie fu fatta altrimenti e più completamente da CLEBSCH nella Memoria che citammo nell'Introduzione, e siccome noi esporremo più innanzi un metodo nuovo e molto comodo per fare la stessa ricerca, così ci limitiamo a mostrare il profitto che si può trarre da l'esposto modo di procedere servendocene per trovare le cubiche gobbe della superficie.

Una tal curva, come qualunque curva della superficie, deve incontrare la conica doppia. Noi sceglieremo per centro di proiezione uno, P , dei punti d'intersezione. La curva sarà allora proiettata in una conica avente quattro contatti con il contorno. Ora, qualunque conica quadritangente, essendo di genere zero, sarà proiezione di due curve che del pari saranno di genere zero (affinchè il genere complessivo della curva proiettata sia -1) e che quindi dovranno esser formate ciascuna di un sol ramo. Basta dunque — come per le curve proiettate in tangenti doppie — che cerchiamo quante volte ognuna di queste curve passa per P ; aggiungendo due a questi numeri, troveremo l'ordine di queste curve. Dobbiamo dunque trovare delle coniche tali che, delle quattro intersezioni d'una di esse con le tracce dei piani tangenti in P , tre siano proiezioni di punti (coincidenti in P e) appartenenti a una delle due curve obiettive e la quarta sia proiezione di un punto dell'altra. Ora, considerando i 63 sistemi di coniche quadritangenti, si dimostra che ciò non è possibile se non per uno dei 32 sistemi ognuno dei quali è determinato da la traccia di un piano tangente in P e da la proiezione di una delle sedici rette l e le cui altre cinque coniche con punto doppio sono formate da la traccia di un piano tangente condotto da P a un cono di KUMMER e da la proiezione della retta della superficie posta con l in uno stesso piano tangente a quel cono di KUMMER (*). Per P passano dunque 32 sistemi di cubiche gobbe della superficie;

e i cui punti di contatto stanno su una conica passante per i punti di contatto del contorno con una sua tangente doppia; una curva di 4° ordine senza punti doppi deve appartenere ad uno dei sistemi (sei volte infiniti) di curve tangenti in otto punti e i cui punti di contatto stanno su una conica; e una curva di ordine superiore al quarto senza punti doppi non può esser proiezione di due differenti curve. I predetti sistemi di curve di 3° e 4° ordine tangenti in 6 od 8 punti ad una curva di 4° ordine non sono gli unici esistenti. (Vedi HESSE e STEINER nel vol. 49 del Giornale di CRELLE e CLEBSCH nel vol. 63 del Giornale di BORCHARDT.)

(*) Si vede subito che la coppia di piani condotti per P e per una di quelle coppie di rette, secca la superficie in una curva di 3° ordine composta di una retta e una conica, e in una curva di 5° ordine composta di una conica e di una curva di 3° ordine. Che gli altri 31 sistemi di coniche (di cui già nel n.° 5 considerammo quei 10 tali che le curve corrispondenti sono composte ciascuna di una conica e di una curva di 6° ordine) non si debbano qui considerare, si vede facilmente tenendo presenti le loro coniche degeneri

una curva qualunque appartenente ad uno di essi è determinata da un punto Q della superficie (cfr. n.° 5). Però questi sistemi sono accoppiati in modo che si passa da l'uno a l'altro dei sistemi di una coppia scambiando fra loro i due piani tangenti in P . Se si fa ora muovere P sulla conica doppia sinchè (vedi il seguente numero) s'incontrino i punti in cui due piani tangenti coincidono, in cui si connettono le due falde della superficie, uno dei due sistemi di una coppia si muterà nell'altro. I 16 sistemi che vengono così formati dai 32 precedenti sono fra loro distinti; ognuno corrisponde, nel senso indicato, a una delle rette della superficie. Q e un punto infinitamente vicino a P su una delle due falde della superficie passanti per P , determinano una curva del sistema; cioè:

A la superficie appartengono 16 sistemi di cubiche gobbe. Una curva di uno qualunque di essi è determinata da due suoi punti. A ognuno dei sistemi appartiene una serie infinita di cubiche piane con punto doppio.

La nostra rappresentazione di queste curve si presta anche per determinare il numero delle loro intersezioni effettive con le rette della superficie. Essa ha il vantaggio sul metodo di CLEBSCH di condurre immediatamente al risultato che i 16 predetti sistemi si determinano tutti nello stesso modo.

Che, oltre a queste curve di 3° ordine, non ve ne siano di quelle che passino per certi determinati punti della conica doppia si vede, sia ponendo il punto P di questa in tutte le posizioni possibili a cui corrisponde una forma singolare del contorno, sia collocando P in una posizione arbitraria nel mentre si studiano le curve aventi per immagini curve di 3° ordine con punto doppio.

10. *Punti cuspidali.* Il cono circoscritto avente il vertice nel punto P della conica doppia seca il piano di questa in quattro generatrici i cui punti di contatto debbono coincidere con i loro punti d'intersezione con la conica doppia diversi da P . In ognuno di questi punti d'intersezione vi sono così due intersezioni coincidenti, che appartengono a la stessa falda e quindi sono due punti consecutivi della superficie. Uno di tali punti deve esser dunque uno di quelli in cui le due falde di superficie che s'intersecano nella conica doppia vengono a connettersi, in cui, quindi, quando la conica doppia è reale, i due piani tangenti coincidono per divenir poi imaginari e ove la curva da l'essere intersezione di due falde reali passa a divenire curva isolata. Questi punti, che CLEBSCH chiama *punti cuspidali*, sono gli stessi che CAYLEY chiamò *Pinch-points* (*). La superficie che studiamo contiene dunque *quattro* di questi punti.

(*) Nella mia Memoria *Su le superficie reciproche*, pubblicata nel vol. 10° dei Math. Annalen, io ho ampiamente studiate (pag. 468-479) le proprietà di questi punti. Fra queste

Proiettando la superficie da un punto cuspidale, si ottiene come contorno una curva avente un punto doppio nella traccia della tangente singolare (*). Le tracce dei due piani tangenti a la superficie nel centro di proiezione coincidono in una delle sei tangenti che passano pel punto doppio del contorno. Una qualunque delle altre cinque diviene traccia di un piano in cui vennero a coincidere due piani tangenti doppi. Le coppie di tangenti doppie a una curva di 4° ordine che vengono a coincidere quando essa acquista un punto doppio costituiscono delle coniche dello stesso sistema; in virtù del n.° 4 gli altri cinque piani toccheranno quindi lo stesso cono di KUMMER.

Giungiamo in tal modo a la conclusione che tutti cinque i coni di KUMMER passano per i punti cuspidali. I piani tangenti a i coni di KUMMER in questi punti secheranno ciascuno la superficie in due coniche fra loro tangenti (ciò segue da quanto si dimostrò al n.° 5).

11. *Altra dimostrazione del teorema di Kummer.* Che i piani tangenti (coincidenti) in un punto cuspidale debbano secare la superficie in due coniche, si può anche dedurre dal fatto che, in generale, le rette della superficie (**), in virtù del n.° 2, non passano per alcun punto cuspidale. Servendosi poi del n.° 10 si può trovare che l'involuppo dei piani secanti la superficie in due coniche è (almeno) di 10^a classe e che passa cinque volte per ciascuno dei punti cuspidali. Esso non può secare la conica doppia della superficie in altri punti — ciò si vede tentando di assumere un altro di questi punti d'intersezione, supposto che esista, come centro di proiezione — onde è di 10° ordine. La sua intersezione con il piano della conica doppia è per conseguenza una curva di 10° ordine con quattro punti quintupli, ha comuni 21 punti colla conica deter-

citerò le seguenti, la cui dimostrazione è semplice, specialmente attenendosi a la superficie di cui trattiamo: Qualunque sezione piana della superficie passante per un punto cuspidale ha ivi una cuspide; esiste un fascio di piani passanti per quel punto in ognuno dei quali questa cuspide si muta in un punto di contatto di due rami; i piani di questo fascio toccano tutti la superficie nel punto cuspidale, epperò ogni cono circoscritto a la superficie passa per quel punto; il cono circoscritto, con il vertice in un punto cuspidale, ha per generatrice doppia l'asse del predetto fascio, asse che si chiama *tangente singolare*. Quest'ultima proprietà si dimostra facendo uscire dal punto cuspidale delle tangenti a le varie sezioni piane passanti per esso; ma essa presentasi anche come l'unica possibile spiegazione del fatto che i piani tangenti a le due falde della superficie che erano piani tangenti doppi del cono circoscritto avente il vertice in un punto qualunque della curva doppia, vengano a coincidere.

(*) Vedi la nota precedente.

(**) È da notare che noi qui facciamo uso, oltrechè dei n.° 1, 2, 10, solo di quelle proprietà contenute nel n.° 4 che servono a dimostrare esservi al massimo 26 rette.

minata dai punti cuspidali e da un altro punto della traccia dell'involuppo sul piano della conica doppia, dunque deve comporsi di cinque coniche (*).

Che l'involuppo sia un sistema di coni segue dal fatto che il suo spigolo di regresso, se esistesse, dovrebbe secare il piano della conica doppia in cuspidi della intersezione che già determinammo; ora, la predetta intersezione non ha cuspidi, nè i punti quintupli possono risultare da la sovrapposizione di punti singolari fra cui si trovino delle cuspidi, perchè i rami che s'incrociano in essi provengono da l'intersezione di un piano con cinque falde distinte della sviluppabile.

Ma che il detto involuppo sia costituito da coni si vede anche immediatamente cercando le intersezioni del (supposto) suo spigolo di regresso con la data superficie. Infatti uno di questi punti deve essere uno di quelli in cui il corrispondente piano tangente dell'involuppo tocca la superficie data, perchè altrimenti questo piano tangente dovrebbe toccare questa superficie lungo una retta, e però due rette della superficie coinciderebbero. Ma se uno dei punti di contatto d'un piano tangente stesse su lo spigolo di regresso dell'involuppo, giacesse in conseguenza su due generatrici consecutive di questo, ne seguirebbe che esso avrebbe nell'altro suo punto di tangenza un contatto stazionario, onde quest'ultimo sarebbe una cuspidale della intersezione della superficie involuppo con il piano della conica doppia. Ora un tal punto non può trovarsi su una curva composta di coniche. Dunque lo spigolo di regresso è d'ordine 0.

Dopo avere così dimostrato che l'involuppo consta di coni, si dedurrà, dal n.º 2, che uno qualunque di questi non può essere d'ordine superiore al secondo, perchè altrimenti per uno stesso punto doppio passerebbero più di due tangenti doppie del contorno della superficie data.

II.

Proprietà generali ottenute servendosi di un cono di Kummer.

12. *Proiezione della superficie dal vertice d'un cono di Kummer.* Siccome qualunque generatrice di un cono di KUMMER tocca due volte la superficie, così il numero delle tangenti che si possono condurre, oltre le due tangenti doppie,

(*) Questa dimostrazione non differisce sostanzialmente da quella che io esposi a pag. 540 della mia citata Memoria *Su le superficie reciproche*, in cui io mi appoggio unicamente su la determinazione dei numeri di certe singolarità. La sola differenza consiste in ciò che io allora applicavo delle relazioni generali fra questi numeri.

dal vertice T di un cono di KUMMER a la linea d'intersezione della superficie con un piano passante per T è 4, perchè tale curva d'intersezione, avendo due punti doppi, è di 8ª classe. Se, dunque, si proietta da T la superficie, il contorno sarà formato da la traccia (s_2) del cono di KUMMER contata due volte e da una curva di 4° ordine (k_4). In tal caso ogni punto del piano di proiezione è immagine di quattro punti della superficie.

La classe di (k_4) si trova determinando il numero delle tangenti che essa ha comuni con (s_2). Notiamo perciò anzitutto che queste due curve debbono toccarsi in tutti i punti che esse hanno comuni: infatti il piano proiettante che passa per la tangente a (s_2) in un punto Q , seca la superficie in due coniche aventi due punti d'intersezione su la retta TQ , cioè i due punti di contatto del piano tangente doppio, e le quattro tangenti condotte da T a quelle coniche sono generatrici del cono $T(k_4)$; ora, se una di queste coincide con TQ , entrambe quelle coniche debbono toccarla e però anche una generatrice di $T(k_4)$ coincide con $TQ \cdot (k_4)$ e (s_2) si toccano quindi in quattro punti; le tangenti in questi equivalgono a $2 \cdot 4 = 8$ tangenti comuni. Le altre tangenti comuni debbono esser tracce di piani secanti la superficie in due coniche una delle quali sia composta di due rette. Otto di tali piani passano per T ; delle corrispondenti coniche degeneri quattro appartengono a l'uno, quattro a l'altro dei due sistemi di coniche poste in piani tangenti al cono di KUMMER considerato. Per conseguenza (k_4) ha in totale comuni sedici tangenti con la conica (s_2), e però è di 8ª classe ed ha due punti doppi.

Dunque per T si possono condurre, oltre a le generatrici del cono di Kummer $T(s_2)$, due tangenti doppie della superficie.

La curva (k_4) ha otto tangenti doppie; esse sono le tracce dei piani tangenti condotti da T a gli altri coni di KUMMER e saranno, per conseguenza, accoppiate per formare quattro coniche quadritangenti degeneri di (k_4). Oltre a queste e a (s_2), si ha un'altra conica quadritangente, cioè la proiezione della conica doppia; ciò risulta notando che, se la conica doppia ha comune un punto R con $T(k_4)$, uno dei piani tangenti in R alla superficie toccherà $T(k_4)$ lungo TR (vedi n.º 13). Può interessare di sapere come le sei coniche testè nominate si distribuiscano nei varî sistemi di coniche quadritangenti; gli è ciò che ora determineremo.

Una curva di 4° ordine con due punti doppi ha tredici sistemi di coniche quadritangenti. Dodici di essi hanno le caratteristiche $\mu = 2$, $\nu = 4$; e a ognuno di essi appartengono due coppie di tangenti doppie e due coniche costituite ciascuna di due tangenti passanti per un punto doppio (ognuna di queste ultime

deve contarsi due volte nella teoria delle caratteristiche). Al tredicesimo appartengono quattro coppie di tangenti doppie ed una conica infinitamente schiacciata, avente per vertici i punti doppi; le caratteristiche di questo sistema sono $\mu = 2$, $\nu = 3$ (*).

Ora, da l'esposta distribuzione dei vari sistemi di coniche della superficie risulta che fra uno qualunque dei coni di KUMMER e gli altri quattro passano le stesse relazioni (dimodochè, quando uno dei vertici è conosciuto, gli altri quattro devono determinarsi mediante un'equazione irriducibile). Questo fatto non può conciliarsi con altra ipotesi se non con quella che tutte le sei predette coniche quadritangenti appartengano a l'ultimo nominato dei tredici sistemi (cosa che del resto verrà dimostrata altrimenti nei n.° 13 e 15).

Le considerazioni testè esposte, potrebbero porgere occasione di far conoscere varie proprietà dello stesso genere di quelle contenute nel n.° 8: noi però non ci arresteremo a farlo e invece riassumeremo nel teorema seguente quanto ora dimostrammo:

Quando si proietta la superficie dal vertice di un cono di Kummer, il contorno di essa consta della traccia (s_2) di questo cono, contata due volte, e di una curva di 4° ordine (k_4) con due punti doppi toccata quattro volte sia da la predetta traccia, che dà la proiezione (d_2) della conica doppia. Queste due coniche e le tracce delle coppie di piani tangenti degli altri coni di Kummer che passano pel centro di proiezione, appartengono a quel sistema singolare di coniche quadritangenti i cui punti di contatto stanno in una stessa conica con i due punti doppi di (k_4). In ciascuna delle otto tangenti comuni a (s_2) e (k_4), sono proiettate due rette della superficie.

13. *Costruzione della superficie.* Vi è una costruzione per punti della nostra superficie che sta in un legame strettissimo con la proiezione indicata al n.° 12 e che noi ora esporremo, perchè essa serve a dare un'idea molto chiara di varie proprietà di essa superficie.

Per una retta qualunque uscente dal vertice T di un cono di KUMMER si possono condurre a questo due piani tangenti; ognuno di essi seca la superficie in due coniche appartenenti una a l'uno, l'altra a l'altro dei due sistemi coniugati relativi a quel cono. Le quattro intersezioni di quella retta con la superficie si distribuiscono in due coppie M_1M_2 e $M'_1M'_2$, ognuna delle quali (in grazia di ciò che si disse al n.° 7) è formata delle intersezioni di due coniche

(*) Io mi sono occupato di questo sistema singolare in una Memoria inserita nel Bollettino (« Oversigter ») della R. Accademia danese, anno 1879.

appartenenti una a l'uno, l'altra a l'altro dei predetti sistemi. Ora, se noi chiamiamo S il conjugato armonico di T rispetto a $M_1 M_2$ ed S' il conjugato armonico di T rispetto a $M'_1 M'_2$, il luogo geometrico dei punti S, S' sarà una quadrica (σ_2). Infatti su una retta per T non si trovano altri punti del luogo che i punti S, S' corrispondenti a quella retta e quelli che, appartenendo ad altre rette uscenti da T , coincidono con T . Ma è facile vedere che di punti di quest'ultima specie non se ne trovano: e in vero, se S coincidesse con T dovrebbe accadere altrettanto di M_1 o di M_2 , cioè T stare su la superficie data, il che non avviene.

Siccome S e S' coincidono quando i due punti M_1, M_2 coincidono con i due punti M'_1, M'_2 , così il cono di KUMMER dev'essere il cono di vertice T circoscritto a la superficie (σ_2).

Noi possiamo ora anche determinare il luogo geometrico delle coppie di punti D, D' armoniche con entrambe le coppie $M_1 M_2$ e $M'_1 M'_2$. Su una retta condotta ad arbitrio per T si trovano due tali punti, oltre a quelli che possono coincidere con T . Ora, se per una determinata retta condotta per T , D coincide con T , D' coinciderà con S e con S' . Ma noi vedemmo che questi ultimi non possono coincidere se non quando $M_1 M_2$ coincidono con $M'_1 M'_2$. Però in questo caso, non solo T , ma qualunque altro punto di quella retta può riguardarsi come un punto D , e quindi quella retta apparterrà completamente al luogo. Questo è dunque formato del cono di KUMMER e di una quadrica (δ_2) (*) la quale è in realtà il luogo che volevamo determinare.

Quando si conoscono le superficie (δ_2) e (σ_2), si possono determinare, su qualunque retta condotta per T , prima i punti S, S', D, D' come intersezioni della retta con queste superficie, e poi i punti $M_1 M_2, M'_1 M'_2$ come punti doppi delle involuzioni determinate da la coppia DD' e da una delle due coppie TS, TS' .

Ora, se M_1 deve coincidere con M'_1 (o M'_2) senza che coincidano gli altri due punti M , debbono coincidere fra loro in quello stesso punto D e D' . Ne segue che la conica doppia della superficie è la curva di contatto del cono di vertice T circoscritto a (δ_2).

(*) Bisogna però notare che, per render completa la precedente dimostrazione, sarebbe necessario esaminare se, quando la retta uscente da T tende a divenir generatrice del cono di KUMMER, D e D' hanno per posizione limite T . Noi ci esoneriamo da questa ricerca, perchè si può dimostrare analiticamente che l'intersezione di (δ_2) con un piano condotto ad arbitrio per T è una conica. Ciò del resto fu dimostrato dal sig. dott. J. PETERSEN (v. « Tidsskrift for Mathematik » 1874) in un lavoro ove egli espone una costruzione delle curve di 4° ordine con due punti doppi, trovata da lui e da me, la quale è identica a quella di cui noi qui ci serviamo per le superficie di 4° ordine con conica doppia.

Invece, se due punti M, M_2 della stessa coppia coincidono, debbono coincidere nello stesso punto tanto S quanto D . Dunque, la curva di contatto della data superficie con il cono circoscritto $T(k_4)$, è l'intersezione delle due superficie (σ_2) e (δ_2) . La curva (k_4) (vedi n.° 12) è proiezione di questa curva gobba (r_4) : le coniche appartenenti al sistema singolare di coniche quadritangenti, sono i contorni di quadriche passanti per essa; e i punti doppi di (k_4) sono le tracce delle generatrici, passanti per T , della quadrica passante per T e appartenente al fascio di base (r_4) .

Notiamo ancora che la superficie (σ_2) potrebbe anche definirsi come luogo delle polari di T rispetto a le coniche della superficie poste in piani tangenti al cono di KUMMER.

Viceversa se si prendono ad arbitrio due quadriche (σ_2) e (δ_2) e un punto T , e si eseguisce la costruzione testè esposta, si trova che essa conduce ad una superficie di 4° ordine (*). La stessa costruzione della superficie mette in evidenza le esposte relazioni fra T , (σ_2) e (δ_2) .

Enunciando prima il teorema reciproco, potremo concludere:

Dato un punto T e due quadriche (σ_2) e (δ_2) , se una retta mobile attorno a T seca queste rispettivamente in S, S' e D, D' , e si determinano due coppie di punti M, M_2 e M', M'_2 conjugate armonicamente entrambe rispetto a DD' e di più la prima rispetto a TS e la seconda rispetto a TS' , il luogo geometrico dei punti M è una superficie di 4° ordine, avente per conica doppia la curva di contatto di (δ_2) con il cono di vertice T ad essa circoscritto e per cono di Kummer il cono circoscritto da T a (σ_2) , e che ha un semplice contatto, lungo la curva d'intersezione (r_4) di (σ_2) e (δ_2) , con il cono proiettante da T questa curva.

Viceversa: qualunque superficie di 4° ordine con conica doppia può generarsi, con il metodo ora descritto, in cinque modi (**) (corrispondenti ai cinque coni di KUMMER).

14. *Rappresentazione della superficie su una quadrica doppia.* La precedente costruzione porge una rappresentazione della superficie, nuova e abbastanza espressiva. A qualunque punto della superficie (σ_2) corrispondono due

(*) Per giungere a questa conclusione, basta contare il numero dei punti del luogo posti su una retta qualunque uscente da T .

(**) Se (δ_2) è una sfera col centro in T , la conica doppia diviene il cerchio immaginario a l'infinito, epperò la superficie è una ciclode; allora (δ_2) è una sua sfera direttrice e (σ_2) è la polare reciproca rispetto a la detta sfera della corrispondente «superficie deferente». La costruzione della nostra superficie si riduce in questo caso a la costruzione della ciclode che si trova esposta a pag. 122 dell'opera di DARBOUX, *Sur une classe etc.*

punti M_1, M_2 della superficie di 4° ordine, i quali possono dirsi rappresentati da S . La rappresentazione si ottiene mediante una proiezione da T . Converremo che, dei quattro punti M che sono proiettati nei punti S, S' di (σ_2) , due abbiano per immagini S e due S' . Siccome i due punti M_1, M_2 che sono proiettati in S separano S e T , così si può immaginare ognuno di essi rappresentato su quella faccia di (σ_2) nella quale si trova, rispetto ad S , il segmento della retta indefinita ST che lo contiene. Le rappresentazioni *su le facce* di (σ_2) si *connettono* fra loro lungo la curva gobba (r_1) ; questa separa le parti di (σ_2) che corrispondono a punti reali da quelle che corrispondono a punti immaginari e quindi diviene *contorno* della rappresentazione. Invece le rappresentazioni *cambieranno parte*, e però s'intersecheranno, quando si passerà su (σ_2) , per la curva di contatto del cono di KUMMER $T'(s_2)$; tale curva fa dunque lo stesso ufficio della proiezione della *curva doppia* nella precedente rappresentazione della superficie su un piano doppio. Siccome poi, la conica doppia della superficie è intersezione di parti non aventi la stessa rappresentazione (ma di cui una è rappresentata in punti S , l'altra in punti S'), così essa non ha alcun ufficio speciale nella presente rappresentazione.

Facendo ora una proiezione stereografica di (σ_2) si potrebbe ottenere una nuova rappresentazione della superficie di 4° ordine su un piano doppio; ma siccome in questa vi sarebbero dei *punti fondamentali*, così essa non sarebbe abbastanza espressiva. La proiezione fatta dal punto T della proiezione su (σ_2) , coincide con la proiezione della superficie esposta nel n.° 12.

La rappresentazione di cui ci stiamo occupando, porge senza dubbio il mezzo più comodo per studiare le curve della superficie. Una curva d'ordine n di (σ_2) è immagine d'una curva d'ordine $2n$ della superficie di cui trattiamo e avente infinite bisecanti le quali passano per T e costituiscono un cono d'ordine n . Essa insegna anche a determinare delle superficie secanti la data in questa curva: infatti queste superficie si otterranno sostituendo a la quadrica (σ_2) adoperata nella costruzione del n.° 13, delle superficie incontranti (σ_2) lungo la curva immagine.

La suddetta curva d'ordine $2n$ può scomporsi in due d'ordine n non aventi infinite bisecanti uscenti da T . La curva di (σ_2) che rappresenta entrambe queste curve toccherà allora necessariamente la curva (r_1) in tutti i punti ch'essa ha comuni con questa.

Ci limiteremo ad esaminare i casi $n = 1$ e $n = 2$.

$n = 1$. Una generatrice rettilinea di (σ_2) è immagine d'una conica della superficie posta in un piano tangente condotto da T a (σ_2) e però in un piano

tangente al cono di KUMMER. L'altra conica posta in questo piano, corrisponde a la generatrice dell'altro sistema posta in esso piano. Dunque i due sistemi di generatrici corrispondono a due sistemi coniugati di coniche. In ogni sistema si trovano quattro generatrici che toccano (σ_2) e quindi anche la curva (r_4) ; ad ognuna corrisponde una conica avente un punto doppio nel punto di contatto e però scissa in due rette: si ottengono in tal modo le sedici rette della superficie.

$n = 2$. Una sezione piana di (σ_2) corrisponde a una curva gobba di 4° ordine. Questa starà tanto sul cono quadrico che proietta da T quella conica, quanto su una quadrica che si determina facendo muovere sul piano secante il punto S usato nella precedente costruzione. La curva gobba di 4° ordine è quindi di 1ª specie (cioè intersezione di due quadriche). Siccome lo spazio contiene un numero triplicemente infinito di piani, e siccome il cono proiettante una conica di (σ_2) seca ancora (σ_2) in una conica, così vediamo che sulla superficie vi è un numero triplicemente infinito di curve di 4° ordine e 1ª specie (*), situate a due a due su un cono quadrico avente il vertice comune con un cono di Kummer. Nella curva di contatto del cono di KUMMER colla superficie di 4° ordine, coincidono due tali curve.

15. *Nuove proprietà dei coni di Kummer.* Una quartica gobba di 1ª specie si spezza in due coniche allorquando essa acquista due punti doppi: infatti la sua proiezione ne ha allora 4. Per una delle curve considerate nel n.º 14, ciò accadrà quando la conica che la rappresenta su (σ_2) tocca (r_4) in due punti. Ora, è noto che i piani tangenti doppi dell'intersezione (r_4) di due quadriche, sono tangenti a quattro coni quadrici passanti per la stessa intersezione. Le due coniche della superficie che studiamo, rappresentate da l'intersezione di (σ_2) con un piano tangente ad uno, (κ_2) , di questi coni s'incontrano nei due punti di contatto di questo con (r_4) e però appartengono, in virtù del n.º 7, a sistemi coniugati. La congiungente di quei due punti passa sempre pel vertice di (κ_2) , il quale deve quindi essere il vertice del cono di KUMMER che è toccato da i piani delle due predette coniche. Questi due piani coincidono nel corrispondente piano tangente di (κ_2) quando passano per T ; il piano in cui coincidono toc-

(*) Su la superficie vi sono in tutto ∞^4 quartiche gobbe di 1ª specie, ognuna è determinata da una quadrica passante per la conica doppia. — Oltre al suddetto sistema triplicemente infinito, al punto T — come a gli altri punti dello spazio — corrisponde un sistema semplicemente infinito di quartiche di 1ª specie della superficie, che sono intersezioni della superficie con coni quadrici di vertice T . Questi coni sono circoscritti a quadriche passanti per (r_4) .

cherà quindi il cono di KUMMER e il cono (κ_2) lungo la generatrice passante pei punti di contatto colla curva (r_4) . Dunque:

La quartica gobba (r_4) , lungo cui la data superficie tocca il cono di Kummer $[T(k_4)]$ ad essa circoscritto dal vertice T d'un cono di Kummer, sta su quattro coni quadrici, ognuno dei quali tocca uno degli altri quattro coni di Kummer lungo le generatrici di contatto con piani tangenti passanti per T .

E ancora:

Le coniche di due sistemi conjugati sono in quattro modi distribuite in coppie tali, che due coniche d'una coppia stanno su quattro coni aventi per vertici i vertici dei quattro coni di Kummer non toccati da i piani di quelle coniche.

III.

Proprietà di realtà e forme della superficie studiate con una proiezione da un punto della conica doppia.

16. *Lemmi relativi a la forma delle curve piane di 4° ordine.* Quando non si tien conto delle differenze provenienti da situazioni differenti rispetto a la retta all'infinito, si può formarsi un'idea completa delle forme delle curve di 4° ordine senza punti doppî, in parte applicando il teorema, noto da molto tempo, che la curva non può avere più di quattro rami separati o più di due, uno dei quali stia entro l'altro; in parte dal teorema che una curva di 4° ordine senza punti doppî ha sempre quattro tangenti doppie reali e tali che ognuna o tocca due volte lo stesso ramo oppure ha punti di contatto imaginari (*). Siccome poi due rami separati di una curva di 4° ordine hanno sempre comuni quattro e solo quattro tangenti, così si ottengono per queste curve le seguenti « forme principali »:

I.	Curva con 4 rami separati e 28 tangenti doppie reali
II.	» 3 » » 16 » » »
III.	» 2 » » 8 » » »
IV.	» 1 » » 4 » » »
V.	» 0 » » 4 » » »
VI.	» 2 rami uno interno a l'altro e 4 tangenti doppie reali.

(*) I miei lavori che si riferiscono a la forma delle curve di 4° ordine, si trovano nel Tidsskrift for Mathematik, 1873 e 1874, e nel vol. 7° dei Math. Annalen. Com'è noto, KLEIN diede della mia proposizione fondamentale, enunciata sotto forma un po' diversa, una notevolissima estensione a tutte le curve algebriche.

A questi risultati, CRONE (*) aggiunse una ricerca su la realtà dei 63 sistemi di coniche quadritangenti e su la distribuzione in essi delle tangenti doppie reali e immaginarie della curva. Dei teoremi da esso stabiliti, noi faremo uso dei seguenti che si riferiscono a sistemi reali, sistemi che chiameremo interni o esterni secondochè le loro coniche stanno entro o fuori dei rami reali della curva (considerando però come esterna la parte di piano situata fra due rami). Indicheremo solo le coniche degeneri reali del sistema (coppie di tangenti doppie), cioè quelle formate ciascuna da due rette reali o immaginarie « conjugate »; ciò che manca al loro numero per formare 6 rappresenta il numero delle coniche composte di rette immaginarie non conjugate. I numeri romani si riferiscono alla precedente classificazione delle curve di 4° ordine; le lettere poste nella colonna successiva servono a stabilire delle suddivisioni fra le varie specie di sistemi.

CURVA		SISTEMI		COPPIE DI TANGENTI DOPPIE DEL SISTEMA		Tangenti doppie reali non appartenenti al sistema
		Numero	Situazione	reali	immaginarie conjugate	
I		63	esterni	6	0	16
II	a	30	esterni	4	0	8
	b	1	interno	0	6	16
III	a	1	esterno	4	2	0
	b	12	esterni	2	0	4
	c	2	interni	0	4	8
IV	a	3	esterni	2	2	0
	b	1	esterno	0	0	4
	c	3	interni	0	2	4
V e VI	a	3	esterni	2	4	0
	b	12	interni	0	0	4

(*) V. Tidsskrift for Mathematik, 1875 e 1877, o Math. Annalen, vol 12. Dell'esattezza dei risultati di CRONE, che noi citiamo nel testo perchè ne abbiamo bisogno, si può persuadersi considerando delle curve che sono prossime ad acquistare un punto doppio. Infatti, un cambiamento nei numeri dati nel testo può solo avvenire quando la curva acquista un punto doppio. Per non trascurare alcuno dei casi intermedi bisogna tener presente che vi sono le tre specie seguenti di punti doppi reali: 1.° Nodi, in ognuno dei quali due rami si riuniscono l'uno a l'altro; 2.° Punti isolati, sostituenti ciascuno un ramo nel massimo numero di rami che può avere la curva; 3.° Punti d'intersezione di due rami d'ordine impari a lato dei quali la curva ha al massimo un ramo d'ordine pari. (Cf. Math. Annalen, vol. 7°, p. 424.)

Si può anche osservare che, per le curve II III IV, entro ogni ramo si trovano due de' punti reali d'intersezione delle tangenti doppie conjugate appartenenti a ciascuno dei sistemi interni; e che le coniche del sistema III *a* si possono distinguere da le altre perchè i rami di curva stanno entrambi fuori o entrambi entro una di quelle coniche e ognuno dei rami la tocca un numero pari di volte.

17. *Determinazione delle rette reali e dei coni di Kummer reali di una superficie di 4° ordine dotata di una conica doppia con punti reali.* Quando la conica doppia della nostra superficie ha punti reali, possiamo proiettarla da uno, *P*, di essi. In virtù del n.° 2, il contorno potrà assumere tutte le forme enumerate nel n.° 16 e la traccia *T'* della tangente in *P* alla conica doppia potrà essere uno qualunque dei punti d'intersezioni reali di tangenti doppie. Se queste sono reali, *P* sarà un punto d'intersezione di due falde reali della superficie; se sono immaginarie conjugate esso apparterrà a la curva isolata. Avvertiamo che le diverse porzioni della conica doppia verranno da noi per brevità indicate rispettivamente con i nomi di *curva di intersezione* e *curva isolata*: ognuna consta al massimo di due parti.

Le curve degeneri del sistema di coniche quadritangenti al quale appartengono le due tangenti doppie incrociate in *T'* sono, secondo il n.° 4, contorni dei cinque coni di KUMMER. Uno di questi sarà reale (cioè avrà un'equazione a coefficienti reali e almeno il vertice reale) allorquando il suo contorno conterà di due tangenti doppie reali o immaginarie conjugate. Nel primo caso, il centro di proiezione *P* è esterno al cono; nel secondo, noi possiamo *sempre dire* che esso sta entro il cono, purchè conveniamo di dire che *qualunque punto dello spazio è interno a un cono non avente generatrici reali*.

Le altre tangenti doppie del contorno sono proiezioni di rette della superficie. I numeri dei coni di KUMMER reali e delle rette reali si possono quindi determinare; gli elementi necessari per tale determinazione si trovano nel n.° 16; ma noi rimandiamo al n.° 20 l'esposizione dei risultati di essa per occuparci di altre proprietà delle « forme principali » delle superficie che studiamo.

18. *Falde della superficie e loro tipi.* La forma del contorno porge un'idea della *forma della superficie*: infatti il contorno segna il passaggio da i punti del piano di proiezione ove sono proiettati due punti reali della superficie, a quelli ove ne è proiettato nessuno. Come queste due parti siano disposte rispetto al contorno, si riconosce considerando la traccia *T'* della tangente in *P*; questo punto apparterrà a la prima o a la seconda di quelle parti di piano, secondochè *P* è un punto della curva d'intersezione o uno della curva isolata.

Nel descrivere le varie falde di cui la superficie può essere formata — e della cui situazione rispetto al piano all'infinito (cioè della loro possibile divisione in parti) noi non terremo conto — chiameremo, seguendo KLEIN (*), le falde d'ordine pari su cui non si trovano rami di curva di ordine impari (per es. un ellissoide) *Falde del tipo punto*, e quelle falde d'ordine pari a cui appartengono rami di curva di ordine impari (per es. un iperboloide a una falda) *Falde del tipo retta*. Quando si proietta la superficie da un punto della curva isolata, le proiezioni delle sue varie falde appariranno separate (**), e una falda sarà del tipo punto quando la sua proiezione starà nell'interno di qualcuno dei rami nel contorno, del tipo retta in caso diverso.

Questa proposizione, la cui esattezza è evidente, sarà sufficiente pel nostro scopo, in tutti i casi in cui il contorno ha punti reali, perchè è bensì vero che quando si parte da una proiezione fatta da un punto P della curva d'intersezione si può incontrare una superficie senza curve isolate, ma si potrà trovarne una che ne sia dotata con un cambiamento della retta passante per T' in cui è proiettata la conica doppia e un tal cambiamento non può avere alcuna influenza sul tipo della superficie. Del resto non sarà difficile determinare direttamente la composizione delle falde della superficie e i loro tipi quando la proiezione sia fatta da un punto della curva d'intersezione; quando il contorno ha rami reali, una sola falda passerà due volte pel centro di proiezione; e tale falda sarà del tipo punto, quando i rami stanno nella stessa coppia di angoli opposti al vertice formati da le tangenti doppie uscenti da T' e ognuno di essi ha un numero pari di punti di contatto con le tangenti doppie, sarà invece del tipo retta quando queste condizioni non saranno entrambe soddisfatte (***).

Resta da considerare il caso in cui *il contorno non ha punti reali e ogni*

(*) V. la sua Memoria *Ueber die Flächen 3^{er} Ordnung* (Mathem. Annalen, Bd. 6, pag. 557-581). Notiamo però che, siccome KLEIN non usa nel citato lavoro le denominazioni « tipo punto » e « tipo retta », così io le conosco probabilmente per una comunicazione verbale. Esse servono ad esprimere che quelle falde possono trasformarsi risp. in un punto o in una retta. Non incontreremo qui il « tipo piano », cioè una falda di superficie d'ordine impari.

(**) Altrimenti dovrebbero essere falde secate in un sol punto da le rette proiettanti, e però sarebbero d'ordine impari; queste falde si secherebbero in una curva d'ordine impari che dovrebbe far parte della conica doppia, il che è impossibile, perchè noi non consideriamo quei casi estremi o intermedi in cui detta conica degenera in due rette.

(***) Infatti, solo in quest'ultimo caso si potrà costruire nel piano di proiezione dei rami di curva d'ordine impari e quindi mostrare, servendosi delle regole esposte nel n.º 3 e applicandole come si fece nel n.º 4, che essi sono proiezioni di rami di curve che non passano pel centro di proiezioni e quindi sono pure d'ordine impari.

punto del piano di proiezione rappresenta due punti della superficie. In questo caso la superficie consta di due falde del tipo punto. Infatti, allora non esiste alcun legame fra i due punti che coincidono in P e qualunque ramo di curva d'ordine impari del piano di proiezione rappresenterà un ramo di curva della superficie il quale, passando per P un numero impari di volte, sarà d'ordine pari (*).

19. *Connessione delle varie falde della superficie.* Per formarsi un'idea esatta della forma di una falda di superficie bisogna conoscere un numero che ne determini la connessione. Come dimostrarono SCHLAEFLI e KLEIN, questo numero è uguale al doppio del numero delle curve chiuse (direttamente o passando per le loro intersezioni con il piano a l'infinito) che si possono tracciare su la falda che si considera senza spezzarla (**). Se, nella nostra rappresentazione, il centro di proiezione P sta su la curva isolata, la connessione d'una falda sarà il doppio del numero dei rami di contorno interni, cioè dei rami di contorno fuori dei quali si trovano proiezioni di punti reali della falda; infatti le curve chiuse che non spezzano la superficie saranno i rami di curva aventi per proiezioni il contorno apparente (rami del così detto contorno « effettivo »). Il solo caso in cui non è applicabile questo metodo di determinazione è quello, che noi già incontrammo, in cui per il centro di proiezione passano due falde d'ordine pari; ma in questo caso è facile vedere, con l'aiuto della rappresentazione, che le due falde hanno la connessione 0.

(*) Quest'ultima asserzione potrebbe apparire un po' precipitata, perchè una proiezione stereografica di un iperboloide rigato sembra presentare tutte le proprietà di una tal falda. Ma vi è la differenza sostanziale che, nella proiezione stereografica dell'iperboloide, vi sono due punti (i punti fondamentali) che sono proiezioni di rette della superficie e quindi la proiezione d'un ramo di curva può incontrare la traccia del piano tangente in uno di questi punti senza passare pel centro di proiezione. Questo esempio dà un'idea di alcune delle modificazioni che subirebbero le nostre considerazioni generali nel caso limite in cui il centro di proiezione stesse su una retta della superficie.

(**) Le osservazioni di SCHLAEFLI su questo argomento si trovano nel vol. 76 del Giornale di BORCHARDT (pag. 152, nota); quelle di KLEIN nello scritto citato nella Nota al n.º 18 e nell'altro: *Bemerkungen über den Zusammenhang der Flächen* (Math. Ann., Bd. 7). — Un toro ha, p. e., la connessione 2, quantunque non lo si spezzi con un parallelo e un meridiano; per rendersi ragione di ciò bisogna tener presente che fra queste due curve, quella che fu disegnata prima e rientrante in sé stessa, ma l'altra va da un punto infinitamente vicino a quella e posto da una parte di essa a un punto, pure infinitamente vicino ad essa, ma posto dall'altra parte. — Un iperboloide a una falda, le cui due estremità si possono considerare come connesse lungo la curva d'intersezione della superficie con il piano all'infinito, ha la stessa connessione del toro.

Del resto, si può facilmente dedurre da un teorema di KLEIN (*) che, quando il centro di proiezione sta su la curva d'intersezione di una falda con sè stessa, la connessione è uguale al doppio del numero dei rami di contorno interni meno due.

20. *Classificazione delle superficie di 4° ordine con conica doppia a punti reali.* Per giungere a tutte le « forme principali » delle superficie di cui ci occupiamo, basta, in grazia di quanto si disse al n.° 17, considerare successivamente le forme del contorno descritte nel n.° 16 e supporre che le tracce dei piani tangenti nel centro di proiezione P siano successivamente una coppia di tangenti doppie reali o immaginarie conjugate di ciascuno dei sistemi enumerati nel citato numero. In tal modo si otterrà due volte ogni forma di superficie, cioè una volta proiettata da un punto della curva isolata, una volta proiettata da un punto della curva di intersezione. Però, quando per ogni rappresentazione si determini il numero delle rette reali e dei coni di KUMMER reali, nonchè la loro situazione rispetto a la curva d'intersezione e a la curva isolata, non si avrà alcun dubbio nel risolvere la questione di determinare a quali rappresentazioni appartenga la stessa forma di superficie, purchè non si considerino come sostanzialmente diverse le forme del contorno che noi indicammo al n.° 16 coi numeri V e VI (curve senza rami reali, curve anulari).

Nell'enumerazione che ora faremo delle « forme principali » della superficie, i numeri romani racchiusi in parentesi e le lettere annesse indicano, rispettivamente, la forma del contorno e il sistema a cui appartengono le due tangenti doppie che fungono da tracce di piani tangenti; il primo di essi lo indica per un centro di proiezione appartenente a la curva d'intersezione, il secondo per uno appartenente a la curva isolata.

La posizione della conica doppia non ha alcuna parte nella classificazione delle forme principali (circostanza che noi abbiamo già utilizzata); ma danno

(*) Math. Annalen, Bd. 7, pag. 554. — L'attuale applicazione di questo teorema a una superficie e a la sua rappresentazione su un piano doppio è possibile perchè la superficie ha due punti fondamentali nel centro di proiezione. Volendo applicarlo a la rappresentazione d'una falda di superficie d'ordine impari su un piano doppio, si deve tener presente che una delle facce d'una tale falda è una continuazione dell'altra. La rappresentazione su un piano doppio può solo valere per una delle sue facce (per rappresentare contemporaneamente le due facce sarebbe necessario l'impiego d'un piano quadruplo) e la sua connessione è minore di 1 di quella della superficie. Servendosi di una proiezione stereografica d'una falda d'ordine impari d'una superficie di 3° ordine, si trova che la connessione di una faccia di questa è minore di 1 del doppio del numero di rami del contorno; con ciò la falda stessa acquista la connessione 8, 6, 4 o 2 attribuitagli da KLEIN.

origine a modificazioni di queste che sono sostanziali, ma che però si immaginano facilmente. Siccome tutti i coni di KUMMER passano pei punti cuspidali [di cui sono reali 0, 2 o 4 (*)], e siccome questi separano la curva d'intersezione da la curva isolata, così il dire che questa sta entro o fuori di un cono di KUMMER, avrà per conseguenza che quella sta fuori o entro dello stesso; lo stesso enunciato si applicherà anche a le superficie che mancano di curve isolate.

A. [I; II b]. *Superficie con sedici rette reali e cinque coni di Kummer reali, formata di una falda del tipo retta con la connessione 6. La curva isolata sta entro a tutti i coni di Kummer.*

B. [II a; III c]. *Superficie con otto rette reali e tre coni di Kummer reali, formata di una falda del tipo retta con la connessione 4. La curva isolata sta entro a tutti i coni di Kummer.*

C. [III b; IV c]. *Superficie con quattro rette reali e un cono di Kummer reale, formata di una falda del tipo retta con la connessione 2. La curva isolata sta nell'interno del cono di Kummer.*

Le superficie delle specie A, B, C hanno 4, 2, 0 punti cuspidali; quando non vi è alcun punto cuspidale, la superficie manca di curva isolata.

D. [III a; V o VI a]. *Superficie senza rette reali e con cinque coni di Kummer reali, e che o è formata da una falda del tipo punto e con la connessione 2 (anulare) o non ha alcun punto reale — fuori della curva isolata; quest'ultima non è neppur compresa nella descrizione delle falde reali delle precedenti forme di superficie. — La curva isolata sta entro tre e fuori di due coni di Kummer.*

Quando la superficie ha una falda reale vi possono essere 4, 2 o 0 punti cuspidali; in quest'ultimo caso può mancare o la curva d'intersezione o la curva isolata.

E. [V o VI a; III a]. *Superficie senza rette reali e con cinque coni di Kummer reali, formata di due falde del tipo punto e con la connessione 0. La curva isolata sta nell'interno di uno e all'esterno di quattro coni di Kummer.*

La curva doppia può essere o intersezione di due falde, nel qual caso manca la curva isolata (contorno V); oppure constare di una curva d'intersezione d'una falda con sè stessa e di 0 o 1 curva isolata; oppure constare di due curve d'intersezione e di due curve isolate; o finalmente essere una sola curva isolata.

(*) Siccome noi prescindiamo in generale dai casi intermedi, così non insistiamo sui casi in cui due o più de' punti cuspidali coincidono.

F. [IV a; IV a]. Superficie senza rette reali e con tre coni di Kummer reali, formata da una falda del tipo punto e con la connessione 0. La curva isolata sta entro uno e fuori di due dei coni di Kummer. Essa ha 4, 2 o 0 punti cuspidali; in quest'ultimo caso può mancare la curva d'intersezione o la curva isolata.

21. *Sistemi reali di coniche; varie specie di rette immaginarie della superficie.* È noto che una retta imaginaria dello spazio può essere di due specie; se essa ha un punto reale, intersecherà la sua coniugata, e però starà in un piano reale e si dirà di 1^a specie; se essa non ha alcun punto reale, per essa non passerà alcun piano reale e si dirà di 2^a specie: in quest'ultimo caso la retta data e la sua coniugata sono determinate da due coppie di punti immaginari coniugati appartenenti a due rette che non s'incontrano.

Il numero delle rette immaginarie delle varie forme di superficie si trova togliendo da 16 il numero delle rette reali. Per trovare quali fra le rette immaginarie siano di 1^a specie, si noti anzitutto che una di queste deve stare con la sua coniugata in un piano tangente di un cono di KUMMER e che questo cono è in conseguenza reale, chè altrimenti lo stesso piano dovrebbe toccare il cono immaginario coniugato. Quindi, queste due rette immaginarie coniugate appartengono ad uno dei due sistemi di coniche della superficie, poste in piani tangenti allo stesso cono di KUMMER e la cui proiezione, secondo il n.° 6, è quel sistema di coniche quadritangenti al contorno che è determinato da la conica spezzata nella traccia di un piano tangente nel centro di proiezione e in una retta di contorno del cono di KUMMER.

Un tal sistema sarà reale quando le due tracce e le due rette di contorno o sono tutte reali o formano due coppie di coniugate e solo allora; quindi i piani tangenti di un cono di KUMMER secano la superficie in coniche reali o immaginarie secondochè la curva isolata sta nell'interno o a l'esterno del cono (viceversa per la curva d'intersezione). Siccome in una conica appartenente a un sistema immaginario non si possono trovare che alcuni punti reali, così noi possiamo trovare un modo migliore per caratterizzare la posizione dei vari coni di KUMMER; invece di dire che *la curva isolata* — che può anche mancare — *sta entro o fuori di un cono di Kummer*, noi potremo ora dire che le falde reali di superficie — che però nella forma *D* potrebbero anche mancare — *stanno fuori o entro di quel cono*. Dal n.° 20 segue allora: che *la falda reale di una delle superficie A, B, C sta all'esterno di tutti i coni di Kummer*; che *la falda reale di D* — quando esiste — *sta all'esterno di tre e nell'interno di due coni di Kummer*; che *le due falde di E stanno entro uno e fuori di quattro*

coni di Kummer; che finalmente la falda reale di F sta entro due e fuori di uno de' coni di Kummer. Però, affinchè questi enunciati siano completi, noi dobbiamo (v. n.° 17) dire che una falda reale di superficie sta entro ogni cono reale non avente generatrici reali. La curva isolata (che dovrebbe stare fuori di questo) deve allora mancare. Se invece non vi sono falde reali della superficie (D), è impossibile, nelle presenti ipotesi, che la curva isolata manchi; e allora gli è fra i tre coni entro ognuno dei quali si trova la curva isolata, che se ne può trovare uno o più senza generatrici reali.

I sistemi reali di coniche che si trovano in piani tangenti a' coni fuori dei quali stanno le falde di superficie, si studiano mediante le loro proiezioni, le particolarità delle quali si deducono da le coniche degeneri mediante le regole esposte nella Memoria di CRONE; si può tuttavia osservare che l'arbitrio nella scelta del centro di proiezione sia su la curva d'intersezione sia su la curva isolata, nonchè le nozioni già acquisite su le rette della superficie, combinate coi risultati citati al n.° 16, bastano a risolvere ogni questione senza più ricorrere a quelle regole. Nell'enumerare i sistemi di coniche posti su le varie forme di superficie, noi indicheremo queste ed esporremo le proprietà delle proiezioni dei sistemi di coniche posti su esse con le stesse notazioni usate nel n.° 20.

A. Dieci sistemi di coniche reali, ognuno con quattro coppie di rette reali [I, II a].

B. Sei sistemi di coniche reali, ognuno con due coppie di rette reali e nessuno di rette immaginarie conjugate [II a, III b]. *Tutte le otto rette immaginarie della superficie sono di 2ª specie.*

C. Due sistemi di coniche reali, in uno dei quali vi sono due coppie di rette reali e due coppie di rette conjugate [III a, IV a], nell'altro non si trovano nè rette reali, nè rette immaginarie conjugate [III b, IV b]. *Delle dodici rette immaginarie quattro sono di 1ª specie, otto di 2ª.*

D. Sei sistemi reali di coniche, in cui non vi sono rette reali o immaginarie conjugate [III b, V b o VI b] e che possono mancare di coniche aventi punti reali. *Tutte le rette della superficie sono immaginarie di 2ª specie.* Se la superficie non ha punti reali, vi sono delle differenze fra i piani tangenti reali a tre e a due coni fuori o entro dei quali la superficie può sempre dirsi posta; infatti, uno dei primi seca la superficie in due coniche reali non aventi punti reali, mentre uno degli altri la seca in due coniche immaginarie conjugate. (Per maggiori particolari si vegga il n.° 23.)

E. Due sistemi reali di coniche a ognuno dei quali appartengono quattro

coppie di rette immaginarie conjugate [V o VI a, III c]. *Tutte le sedici rette immaginarie sono di 1ª specie.*

F. Due sistemi reali di coniche, ognuno con due coppie di rette conjugate [IV a, IV c]. *Otto rette immaginarie sono di 1ª specie, otto di 2ª.*

IV.

Proprietà di realtà e forme della superficie studiate mediante un cono di Kummer.

22. *Lemmi su le quartiche gobbe di 1ª specie.* L'intersezione di due quadriche è una curva che può essere formata al massimo di due rami. Essa può avere una delle seguenti « forme principali »:

1) *La curva consta di due rami d'ordine pari.* I quattro con (κ_2) che passano per essa sono tutti reali.

α . Una superficie del fascio, i cui punti stanno in parte entro di tutti, in parte fuori di tutti i con (κ_2), ha generatrici reali, le quali possono secare un ramo in due o zero punti. Il caso intermedio si ha nelle generatrici tangenti; ogni ramo della curva tocca due generatrici di ciascuno dei due sistemi.

β . Una superficie del fascio, i cui punti stanno in parte fuori di tre ed entro uno dei con (κ_2), in parte viceversa, ha generatrici immaginarie.

γ . Una superficie del fascio, i cui punti stanno nell'interno di due e all'esterno di due con (κ_2), ha generatrici reali, le quali secano ognuno dei due rami in un sol punto, e però non sono mai tangenti ad essi.

2) *La curva consta di un ramo d'ordine pari.* Due de' con passanti per essa sono reali.

α . Una superficie del fascio, i cui punti stanno parte entro parte fuori dei due con (κ_2), ha generatrici reali che incontrano il ramo in due o zero punti; due generatrici di ogni sistema lo toccano.

β . Una superficie del fascio, i cui punti stanno entro uno e fuori di uno dei con, ha generatrici immaginarie.

3) *La curva è formata di due rami d'ordine impari.* Nessuno dei con (κ_2) è reale. — Una superficie del fascio ha in questo caso sempre generatrici reali. Le generatrici di un sistema secano ciascun ramo in un punto; quelle dell'altro secano un ramo in due o zero punti; ogni ramo è toccato da due generatrici che stanno ciascuna in una delle parti in cui la curva divide la superficie.

4) *La curva non ha rami reali.* Tutti quattro i coni (α_2) sono reali; due di essi hanno generatrici reali, due non. Come già dicemmo, considereremo ogni punto reale dello spazio come interno a ciascuno di questi ultimi. Siccome i due primi non hanno punti d'intersezioni reali, così un punto non può stare nell'interno di entrambi.

α . Una superficie del fascio, che abbia punti reali posti fuori di due ed entro di due coni, ha generatrici reali.

β . Una superficie del fascio, i cui punti reali stanno entro tre coni ha generatrici immaginarie.

γ . Al fascio appartengono anche superficie senza punti reali e le cui generatrici sono in conseguenza rette immaginarie di 2^a specie. (Invece le generatrici immaginarie precedentemente nominate sono tutte di 1^a specie.)

Di questi teoremi, che noi dovremo applicare, alcuni devono esser noti; gli altri si ottengono mercè considerazioni su le forme, in parte tenendo presenti le due serie di superficie, appartenenti tutte allo stesso fascio, che possono riguardarsi come formanti con continuità il passaggio fra due date, in parte considerando le diverse posizioni che possono assumere, rispetto ai varî rami della curva, le generatrici di una determinata superficie — oppure i piani d'un fascio avente per asse una tangente a la curva gobba.

Da queste considerazioni risulta anche che ogni curva avente punti reali divide ogni superficie del fascio in due porzioni poste ciascuna da una parte di qualunque altra superficie del fascio. Nei casi 1. α e β una di quelle porzioni consta di due parti separate. — Se la curva non ha punti reali, noi ci possiamo immaginare una tale divisione, ossia *parlarne come se esistesse*. Soltanto allora una delle due porzioni (p. e. nel caso 4. α quella che si trova fuori dei due coni a generatrici immaginarie ed entro i due a generatrici reali) non contiene alcun punto reale. Inoltre, siccome nel fascio 4. il caso intermedio fra le superficie 4. β e 4. γ , è uno dei due coni a generatrici immaginarie, così bisogna considerare la superficie 4. γ come posta entro due coni di cui uno ha generatrici reali l'altro immaginarie e fuori degli altri due. Si può dire che qui ha luogo una divisione in parti mediante la curva gobba: ma bisogna tener presente che nè a l'una, nè a l'altra di queste parti appartengono punti reali.

23. *Applicazione della costruzione esposta al n.º 13 a lo studio delle varie forme della superficie.* Secondo i n.º 13 e 14, i punti della superficie sono a coppie rappresentati su i punti S di una quadrica (σ_2). Se T è il punto fisso dello spazio, i due punti M_1 , M_2 rappresentati in S stanno su TS e sono i punti doppi dell'involuzione a cui appartengono TS e i punti d'intersezione D D'

della retta TS con un'altra quadrica (δ_2) . Essi sono reali o imaginari secondochè T e S entrambi non separano o entrambi separano D e D' . Se essi sono reali per una certa posizione di S , diverranno imaginari quando S passerà per l'intersezione (r_4) di (σ_2) e (δ_2) , e viceversa. La parte di (σ_2) i cui punti S corrispondono a punti M reali, si trasformerà in una a i cui punti S corrispondono punti M imaginari e viceversa quando, rimanendo fissi (σ_2) , (r_4) e T , (δ_2) varierà nel fascio di cui (r_4) è base e passerà o per (σ_2) o per la superficie del fascio che contiene il punto T . Dunque: Data la quadrica (σ_2) e la quartica gobba (r_4) , su una qualunque delle due parti in cui (r_4) divide (σ_2) possono trovarsi immagini di punti reali d'una superficie di 4° ordine a conica doppia; se (r_4) non ha punti reali, tutti i punti reali di (σ_2) saranno immagini di punti tutti reali o tutti imaginari. In quest'ultimo caso e in quello in cui (σ_2) non abbia punti reali, la superficie rappresentata non avrà punti reali.

In virtù del n.° 14, una generatrice reale di (σ_2) è immagine d'una conica della superficie, posta in un piano tangente al cono di KUMMER che ha il vertice in T ed è circoscritto a (σ_2) . Questa conica sarà reale, anche se ad essa non appartengono punti reali, e la superficie starà allora (n.° 21) fuori del cono di KUMMER. Se invece le generatrici di (σ_2) sono immaginarie di 1^a specie, ogni piano tangente al cono di KUMMER secherà la superficie in due coniche immaginarie, e però la superficie starà entro lo stesso cono. Se noi generalizziamo le locuzioni che convengono a questi due casi, dicendo che la superficie si trova rispetto al cono da la stessa parte delle rette uscenti da T e secanti (σ_2) in punti reali e da la parte opposta di quelle che secano (σ_2) in punti imaginari, e ricordiamo che ogni punto reale sta nell'interno di un cono a generatrici immaginarie, noi dobbiamo dire che, nel caso in cui (σ_2) non ha punti reali, la superficie di 4° ordine, la quale pure non ha punti reali, sta fuori del cono di KUMMER.

Se una generatrice reale di (σ_2) tocca (r_4) , la conica corrispondente sarà, per il n.° 14, costituita di due rette che s'intersecano nel punto di contatto reale con (r_4) . Quelle due rette saranno reali o immaginarie (ma aventi però sempre reale il detto punto), secondochè i punti della parte di (σ_2) a cui appartiene quella generatrice, rappresentano punti reali od imaginari. Per distinguere l'uno da l'altro questi due casi, è sufficiente quanto si disse nel n.° 22 e il fatto che tutti i punti di una tangente a la quartica gobba, tranne il punto di contatto, sono esterni a i coni passanti per la curva stessa. I quattro coni di KUMMER della superficie, oltre a quello di vertice T , sono, in forza del n.° 15, reali o imaginari nello stesso tempo dei coni (κ_2) che passano per (r_4) . Se M_1

e M_2 sono punti reali della superficie rappresentati in un punto S di (σ_2) , un piano tangente condotto da M_1 ad uno dei quattro coni di KUMMER e un piano tangente (determinato in conseguenza) condotto da M_2 allo stesso cono di KUMMER, secheranno la superficie in curve i cui punti corrisponderanno a i punti del piano tangente condotto da S al cono (κ_2) avente lo stesso vertice. Secondochè questo piano tangente sarà reale o immaginario, saranno pure reali o immaginari i piani tangenti condotti da M_1 e M_2 a quel cono di KUMMER. I punti M_1 e M_2 stanno, dunque, fuori o dentro del cono di KUMMER secondochè il corrispondente punto S sta fuori o dentro di (κ_2) . Queste stesse determinazioni possono estendersi ai casi in cui la superficie che si studia non ha punti reali, perchè le regole del n.° 22 possono servire anche in questi casi a determinare le posizioni dei punti (non esistenti) di (σ_2) che danno punti M reali. Che in tal modo si giunga a risultati d'accordo con le convenzioni testè fatte su la posizione d'una tale superficie rispetto a un cono di KUMMER, si vede ottenendo questi casi da altri noti con una trasformazione continua (*).

Siamo così in grado nel formare, colla scorta del n.° 22, il quadro seguente delle diverse forme di (r_4) e (σ_2) e della situazione di tutti i punti che sono immagini di punti reali, di aggiungere una tabella contenente i numeri dei coni di KUMMER reali, di rette reali e di rette immaginarie conjugate di 1^a specie; e siccome *uno almeno dei coni di Kummer d'una superficie reale è reale, così noi otteniamo con il procedimento indicato tutte le forme delle superficie che studiamo.*

Se si basa la classificazione sui caratteri di realtà che ho indicati, non si rinverranno altre « forme principali » oltre a quelle trovate nella ricerca precedente quando supponevamo che la conica doppia avesse dei punti reali; solo, una delle « forme principali » conterrà una nuova varietà, possibile solo quando la conica doppia non ha alcun punto reale.

Questo fatto si rileva facilmente dall'ispezione della seguente tabella. In questa, la prima colonna, dopo quella che contiene i numeri d'ordine, indica, colle notazioni adoperate nel n.° 22, le forme di (r_4) e di (σ_2) . L'indicazione $r + 1$ pel numero de' coni di KUMMER, fuori o dentro i quali si trova la superficie rappresentata, esprime che quello che fu adoperato nella rappresenta-

(*) Siccome la retta condotta da T al vertice di un cono (κ_2) , ha la stessa posizione tanto rispetto al cono di KUMMER avente il vertice comune con (κ_2) , quanto rispetto a (κ_2) , così è sufficiente studiare le intersezioni di quella retta con la superficie (σ_2) corrispondente al nuovo cono di KUMMER.

zione ed altri r hanno quella proprietà. Lo stare la superficie entro o fuori del cono anzidetto è invece espresso dalle lettere (i) o (e) annesse alle notazioni introdotte nel n.° 20 per le forme della superficie e che si trovano nell'ultima colonna della tabella. Nelle colonne penultima e terz'ultima sono notati i numeri delle coppie di rette poste in piani tangenti al cono di KUMMER adoperato nella rappresentazione. La distribuzione di queste coppie di rette nei due sistemi di coniche corrispondenti a tal cono è espressa dal simbolo $(a + b)$.

	RAPPRESENTAZIONE					SUPERFICIE RAPPRESENTATA				
	V. n.° 22	Rami di (τ_1) e loro ordini	Coni (κ_2)		Generatrici di (τ_2)	Coni di Kummer		Coppie di rette tangenti		Forma della superficie
			Le immagini di punti reali stanno			La superficie sta		reali	conjugate	
			fuori di	entro		fuori di	entro			
1	1α	2 pari	4	0	reali	$4 + 1$	0	$4 + 4$	0	$A(e)$
2	1β	2 pari	3	1	imaginarie	3	$1 + 1$	0	0	$D(i)$
3	1γ	2 pari	2	2	reali	$2 + 1$	2	0	0	$D(e)$
4	1β	2 pari	1	3	imaginarie	1	$3 + 1$	0	0	$E(i)$
5	1α	2 pari	0	4	reali	$0 + 1$	4	0	$4 + 4$	$E(e)$
6	2α	1 pari	2	0	reali	$2 + 1$	0	$2 + 2$	0	$B(e)$
7	2β	1 pari	1	1	imaginarie	1	$1 + 1$	0	0	$F(i)$
8	2α	1 pari	0	2	reali	$0 + 1$	$2 + 2$	0	$2 + 2$	$F(e)$
9	3	2 impari	0	0	reali	$0 + 1$	0	$2 + 0$	$2 + 0$	$C(e)$
10	4β	0	(3)	(1)	imaginarie	3	$1 + 1$	0	0	$D(i)$
11	4α	0	2	2	reali	$2 + 1$	2	0	0	$D(e)$
	4γ				imag. ^c di 2 ^a specie					
12	4β	0	1	3	imaginarie	1	$3 + 1$	0	0	$E(i)$

Le parentesi entro cui furon posti i numeri dei coni (κ_2) relativi a la superficie 10, i quali si riferiscono immediatamente a delle posizioni che non possono verificarsi per punti reali, significano che la superficie (σ_2) sta entro di tre e fuori di uno de'coni e rappresenta solo punti immaginari. La superficie rappresentata apparterrà a la forma D senza punti reali. 11 rappresenta contemporaneamente (v. n.° 22) tre casi, perchè (σ_2) può avere punti reali (4α) che siano immagini di punti reali, o punti reali (4α) che siano immagini di punti

immaginarî o finalmente (4γ) solo punti immaginarî. Nel primo caso si ottiene la forma D con punti reali, nei due ultimi la forma D senza punti reali; nei due primi casi il cono di KUMMER che si adopera nella rappresentazione ha generatrici reali, nel terzo non ne ha. Del resto, si vede che le determinazioni relative ai casi 10, 11, 12, ove (r_4) non ha rami reali, coincidono con quelle relative ai casi 2, 3, 4 in cui essa ha due rami reali.

24. *Tipi e connessione delle falde di superficie.* Tenendo presente (vedi n.° 14): 1.° che nella nostra rappresentazione i due punti M_1 e M_2 aventi per immagine lo stesso punto S sono rappresentati ciascuno su una faccia di (σ_2) , 2.° che queste facce si connettono lungo r_4 e si permutano fra loro lungo la linea di contatto del cono circoscritto a (σ_2) dal centro di proiezione T ; si vedrà che la rappresentazione stessa è univoca e che quindi essa può porgere un'idea delle proprietà delle falde della superficie rappresentata. Un ramo di curva e la sua immagine, secano in uno stesso numero di punti ogni piano passante per il centro di proiezione T ; dunque essi sono entrambi pari o entrambi impari. Ne viene che, per determinare se una falda di superficie ha il tipo retta, bisogna solo cercare se entro la sua immagine si possono tracciare dei rami di curva chiusi d'ordine impari.

Studiando con questo procedimento tutte le varie « forme principali » dell'immagine che si trovano nel quadro, si riottengono senza difficoltà i risultati esposti nel n.° 20, sul numero delle falde e su i loro tipi. Basterà che, come esempio, noi consideriamo il n.° 11 della tabella nel caso in cui tutta (σ_2) rappresenta punti reali.

Dico che, in questo caso, l'immagine ha una sola falda connessa. Infatti, la rappresentazione su una faccia di (σ_2) sarà continuata, passando per l'infinito lungo la stessa faccia, attraverso la curva di contatto del cono circoscritto da T , lungo l'altra faccia: dunque l'immagine si estende su entrambe le facce. Ora, se si segna su (σ_2) un ramo di curva d'ordine impari, questo intersecherà la predetta curva di contatto in un numero impari di punti. Percorrendo completamente una volta questo ramo, partendo da un punto posto su una delle facce di (σ_2) , per la detta regola, non si tornerà al punto di partenza, ma si arriverà al punto posto da l'altra parte di (σ_2) . Per ritornare al punto di partenza, si deve percorrere ancora una volta lo stesso ramo o un altro ramo d'ordine impari; ma così si è in totale percorso un ramo d'ordine pari. Dunque la falda è del tipo punto.

La nostra rappresentazione di una falda deve inoltre avere la stessa connessione di questa, e la connessione della rappresentazione si trova molto facil-

mente; i risultati che in tal modo si ottengono sono gli stessi che furono esposti nel n.° 20. Così, nell'ultimo esempio, si vede che, senza spezzare la rappresentazione, si può tracciare su una faccia della superficie una curva chiusa, ma che una nuova curva *rientrante in sè stessa* la spezza; dunque la connessione è 2.

25. *Cambiamento della posizione di T e della superficie (∂_2) .* Le proprietà esposte nei n.° 23 e 24 dipendono unicamente da le forme di (r_4) e (σ_2) e da la scelta della porzione di (σ_2) su cui sono rappresentati i punti reali. Quest'ultima scelta è legata, come risulta dal n.° 23, a le posizioni di T e di (∂_2) ; ma queste posizioni non hanno avuta altra influenza su la distribuzione in « forme principali ».

Quando si vuol riservarsi di fare una scelta conveniente per (∂_2) , la *posizione del punto T* si può fissare completamente ad arbitrio, senza che ciò abbia influenza alcuna su la « forma principale » della superficie a cui si perviene. Se (σ_2) ha generatrici *reali*, anche il cono circoscritto da T , cioè il cono di KUMMER adoperato nella rappresentazione, avrà generatrici reali per ogni posizione di T . Se, invece, (σ_2) ha solo punti immaginari, per ogni posizione di T il cono di KUMMER avrà generatrici immaginarie. Quindi, il solo caso in cui può accadere che un cono, fuori del quale sia situata la superficie, non abbia generatrici reali, è quello in cui la superficie non ha alcuna falda reale (11° della tabella, 3° dei casi nominati al n.° 23). — Se (σ_2) ha generatrici immaginarie di 1ª specie, T può stare fuori od entro di essa: un cono di KUMMER, entro cui sta la superficie, può avere in conseguenza o generatrici reali o solo immaginarie. Quest'ultimo caso può anche aver luogo quando la superficie D non ha alcuna falda reale e quando neppure la conica doppia ha punti reali (v. n.° 21).

Le generatrici, uscenti da T , della superficie del fascio di base (r_4) che passa per T , toccano la superficie rappresentata nelle loro intersezioni con (r_4) e sono quindi due tangenti doppie passanti per T , ma non sono generatrici del corrispondente cono di KUMMER. Per il n.° 22, queste due tangenti saranno reali o immaginarie secondochè T starà nell'interno di un numero pari o di un numero impari dei coni (κ_2) passanti per (r_4) , cioè, in grazia della posizione di questi coni rispetto a gli altri quattro coni di KUMMER (v. n.° 15), secondochè T sta nell'interno di un numero pari o di un numero impari di questi. — Dopo le regole che si riferiscono a la posizione di T rispetto a gli altri coni di KUMMER, se ne possono ancor dare di quelle che riguardino la realtà dei punti di contatto delle due tangenti doppie. Però esse non saranno che enunciati dif-

ferenti delle regole su la realtà delle intersezioni di (r_4) con le sue bisecanti reali, onde non vi è ragione di fermarci ad esporle. Come *esempio* possiamo citare la seguente: le due tangenti doppie della superficie C uscenti dal vertice del suo cono di KUMMER reale, sono reali, e almeno una di esse ha punti di contatto reali.

Se la conica doppia abbia punti reali o non, dipende da la posizione della superficie (∂_2) entro lo spazio limitato — per ognuna delle forme principali — da (σ_2) e da la superficie del fascio passante per T : ciò è conseguenza del fatto che la conica doppia è la curva di contatto di (∂_2) con il cono ad essa circoscritto da T . Si trova che le coniche doppie delle superficie A, B, C hanno sempre punti reali (ciò che del resto può anche considerarsi come conseguenza del fatto che le loro falde hanno il tipo retta e però debbon sempre intersecare il piano della conica doppia). Invece le superficie D, E, F possono avere coniche doppie senza punti reali. Fra queste ultime si presenterà anche, in E , una forma (che noi non incontrammo fra le superficie le cui coniche doppie hanno punti reali) le cui falde stanno una completamente nell'interno dell'altra. Questa forma di superficie si ottiene quando, nelle condizioni indicate dal n.° 12 della tabella, T sta entro (σ_2) e (∂_2) o ha generatrici immaginarie di 1ª specie e racchiude (σ_2) , oppure ha generatrici immaginarie senza punti reali. Il corrispondente cono di KUMMER ha generatrici immaginarie (*).

(*) Le forme che si trovano quando la conica doppia non ha punti reali, differiscono da quelle descritte da DARBOUX, nella citata opera, pag. 128-131, solo per le proprietà non proiettive. Si vede che i numeri che si trovano negli enunciati dei suoi teoremi su la connessione, vanno d'accordo con i nostri quando si tenga conto del differente modo di esprimerli.