Trois Notes sur la théorie des formes.

Par

M. FAÀ DE BRUNO à Turin.

I. Sur un théorème général dans la théorie des formes binaires.

Soit la forme

$$(1) \quad f_2 = a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} y + \dots + a^n y^n = (x + a y)^n$$

symboliquement; et supposons que par la substitution

$$(2) \quad \begin{aligned} x &= p X + q Y, \\ y &= p' X + q' Y, \end{aligned}$$

on ait

$$(3) \quad F = A_0 X^n + n A_1 X^{n-1} Y + \dots + A_n Y^n.$$

On sait qu'on a indifféremment

$$(4) \quad \begin{aligned} A_i &= \frac{\pi(i)}{\pi(n)} \left(p \frac{d}{dq} + p' \frac{d}{dq'} \right)^{n-i} f(q, q'), \\ A_i &= \frac{\pi(n-i)}{\pi(n)} \left(q \frac{d}{dp} + q' \frac{d}{dp'} \right)^i f(p, p'). \end{aligned}$$

Si maintenant on pose

$$(5) \quad \begin{aligned} \delta &= a_0 \frac{d}{da_1} + 2 a_1 \frac{d}{da_2} + 3 a_2 \frac{d}{da_3} + \dots + n a_{n-1} \frac{d}{da_n}, \\ \delta_1 &= n a_1 \frac{d}{da_0} + (n-1) a_2 \frac{d}{da_1} + \dots + a_n \frac{d}{da_{n-1}} \end{aligned}$$

on aura d'après un théorème connu

$$\delta \varphi = 0, \quad \delta_1 \varphi = 0,$$

lorsque φ représente un Invariant de la forme. Comme ces symboles δ, δ_1 jouent un grand rôle dans la théorie des formes binaires nous nous sommes proposés d'examiner si l'on peut par des opérations effectuées à l'aide des seuls paramètres p, q, p', q' , obtenir les mêmes résultats qu'avec δ, δ_1 . Le Théorème suivant donne la solution de la question.

Théorème. — *Les opérations*

$$\delta \text{ et } p' \frac{d}{dp} + q' \frac{d}{dq}, \quad \delta_1 \text{ et } p \frac{dp}{dp'} + q \frac{dq}{dq'}$$

sont équivalentes.

Démonstration. — On sait d'après Cayley que pour une forme binomiale donnée f , on a $\delta = y\delta x$, de sorte qu'en appliquant ce principe aux expressions données de A_i , il viendra

$$(6) \quad \begin{aligned} \delta A_i &= \frac{\pi(i)}{\pi(n)} \left(p \frac{d}{dq} + p' \frac{d}{dq'} \right)^{n-i} q' \frac{d}{dq} f(q, q'), \\ \delta A_i &= \frac{\pi(n-i)}{\pi(n)} \left(q \frac{d}{dp} + q' \frac{d}{dp'} \right)^i p' \frac{d}{dp} f(p, p'). \end{aligned}$$

Mais il faut bien noter ici qu'on ne peut pas changer indifféremment l'ordre des différentiations, car les symboles $q' \frac{d}{dq}$, $p' \frac{d}{dp}$, n'ont de valeur que sur des formes binomiales de la forme f , et non sur d'autres. Or en se rappelant le principe connu, qu'en désignant par Ω une opération quelconque on a

$$(7) \quad \Omega^k(UV) = (\Omega U + \Omega V)^k,$$

on aura, en posant $\Omega = p \frac{d}{dq} + p' \frac{d}{dq'}$, $U = q'f(q, q')$, $V = q'$,

$$\delta A_i = \frac{\pi(i)}{\pi(n)} [\Omega(n(q + aq')^{n-1}) + \Omega q']^{n-i},$$

ou

$$\delta A_i = \frac{\pi(i)}{\pi(n)} [q' \Omega^{n-i} (n(q + aq')^{n-1}) + (n-i) \Omega^{n-i-1} n(q + aq')^{n-1} \Omega q' + \text{etc.}].$$

Mais $\Omega q' = p'$; $\Omega^2 q' = 0$, etc.; par conséquent il viendra

$$\delta A_i = q' \frac{d}{dq} \left\{ \frac{\pi(i)}{\pi(n)} \Omega^{n-i} f(q, q') + (n-i) p' \Omega^{n-i-1} \left\{ n \frac{\pi(i)}{\pi(n)} (q + aq')^{n-1} \right\} \right\}.$$

Or observons que la 2^o partie, à savoir,

$$\frac{\pi(i)}{\pi(n)} p' (n-i) \left(p \frac{d}{dq} + p' \frac{d}{dq'} \right)^{n-i} \frac{d}{dq} f(q, q'),$$

peut être représentée comme le résultat de l'opération $p' \frac{d}{dp}$ sur l'expression de A_i . Ainsi on trouvera définitivement

$$(8) \quad \delta A_i = \left(p' \frac{d}{dp} + q' \frac{d}{dq} \right) A_i, \quad \text{ou} \quad \delta = p' \frac{d}{dp} + q' \frac{d}{dq}.$$

Après avoir trouvé la formule par cette voie un peu pénible, il s'est présenté une autre démonstration bien plus simple que voici.

Observons d'abord qu'à l'aide de la forme symbolique (1) et de la substitution (2) on trouve symboliquement

$$(9) \quad A_i = (p + ap')^{n-i} (q + aq')^i,$$

Ainsi le coefficient de a_i sera celui de a^i dans (9), ou

$$\frac{1}{\pi(i)} \left(p' \frac{d}{dp} + q' \frac{d}{dq} \right)^i p^{n-i} q^i,$$

et on pourra du premier terme déduire tous les autres. Par suite deux termes consécutifs de A_i , que nous appellerons $a_{i-1}B_{i-1}$, a_iB_i , pourront s'écrire

$$a_{l-1} B_{l-1} + \frac{1}{l} a_l \left(p' \frac{d}{dp} + q' \frac{d}{dq} \right) B_{l-1}.$$

Or l'opération δ sur a_l de $a_l B_l$ fournira

$$\frac{la_{l-1}}{l} \left(p' \frac{d}{dp} + q' \frac{d}{dq} \right) A_{l-1} = (la_{l-1} B_l)$$

qui entre précisément en δA_l , et puisque la même chose peut se dire de tous les autres termes, l'équation (10) sera démontrée.

Quant à δ_1 il suffit de remarquer qu'on peut partir de $p'^n q'^i$, c'est à dire, du dernier terme pour retrouver par l'opération $p \frac{d}{dp} + q \frac{d}{dq}$ tous les termes de A_l . Ainsi on aura évidemment

$$\delta_1 = p \frac{d}{dp} + q \frac{d}{dq}.$$

Les deux formules $p' \frac{d}{dp} + q' \frac{d}{dq}$, $p \frac{d}{dp} + q \frac{d}{dq}$, en opérant sur $\Delta = pq' - p'q$, le module de la substitution, l'annulent. Ainsi, en admettant ce principe de leur équivalence à δ , δ_1 , on pourra démontrer à l'instant que $\delta \varphi = 0$, $\delta_1 \varphi = 0$. Car il suffit d'avoir recours à la définition de l'Invariant

$$\Phi = \varphi \Delta^\mu$$

pour voir que

$$\delta \Phi = \delta \varphi \cdot \Delta^\mu,$$

$$\Omega \Phi = \varphi \cdot \Omega \cdot \Delta^\mu = 0$$

en posant maintenant $\Omega = p' \frac{d}{dp} + q' \frac{d}{dq}$.

Mais $\delta \Phi = \Omega \Phi$. Donc $\delta \varphi \cdot \Delta^\mu = 0$, et si Δ est différent de 0, ce qu'on peut toujours admettre, $\delta \varphi = 0$.

En général si δ est une des équations caractéristiques d'une forme quelconque à plusieurs variables homogènes, et si on a une substitution de la forme

$$x = pX + qY + rZ + \dots,$$

$$y = p'X + q'Y + r'Z + \dots,$$

$$z = p''X + q''Y + r''Z + \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

une des opérations Ω équivalente à δ sera une fonction des opérations $\Sigma p' \frac{d}{dp}$, $\Sigma p'' \frac{d}{dp}$, etc. pour lesquelles on pourra réduire à 0 le déterminant par lignes.

II. Sur le Jacobien des formes binaires.

A ma connaissance on n'a aucune démonstration directe du Théorème qui va suivre, sauf celle fondée sur l'emploi des formes symboliques fournie par Clebsch dans la *Theorie der binären Formen*. J'ai cru utile d'envisager la question sous le point de vue de l'analyse ordinaire. On verra par diverses exemples que par ce Théorème on peut déduire, comme d'une seule source, plusieurs relations connues et nouvelles entre les Covariants des formes.

Représentons par I le Jacobien et posons

$$I = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{dx} & \frac{d\varphi}{dy} \\ \frac{d\psi}{dx} & \frac{d\psi}{dy} \end{vmatrix},$$

φ, ψ étant deux fonctions homogènes de x, y , de m^o, n^o degré. On sait par le théorème d'Euler que

$$x \frac{d\varphi}{dx} + y \frac{d\varphi}{dy} = m\varphi, \quad x \frac{d\psi}{dx} + y \frac{d\psi}{dy} = n\psi.$$

Par conséquent on aura encore

$$mnI = \begin{vmatrix} \delta_x \left(x \frac{d\varphi}{dx} + y \frac{d\varphi}{dy} \right) & \delta_y \left(x \frac{d\varphi}{dx} + y \frac{d\varphi}{dy} \right) \\ \delta_x \left(x \frac{d\psi}{dx} + y \frac{d\psi}{dy} \right) & \delta_y \left(x \frac{d\psi}{dx} + y \frac{d\psi}{dy} \right) \end{vmatrix}.$$

En développant on trouve

$$\begin{aligned} mnI = & x^2 \begin{vmatrix} \frac{d^2\varphi}{dx^2} & \frac{d^2\varphi}{dx dy} \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} & \frac{d^2\psi}{dx dy} \end{vmatrix} + xy \begin{vmatrix} \frac{d^2\varphi}{dx} & \frac{d^2\varphi}{dy^2} \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} & \frac{d^2\psi}{dy^2} \end{vmatrix} + y^2 \begin{vmatrix} \frac{d^2\varphi}{dx dy} & \frac{d^2\varphi}{dy^2} \\ \frac{d^2\psi}{dx dy} & \frac{d^2\psi}{dy^2} \end{vmatrix} + I \\ & + x \begin{vmatrix} \frac{d^2\varphi}{dx^2} & \frac{d\varphi}{dy} \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} & \frac{d\psi}{dy} \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{dx} & \frac{d^2\varphi}{dx dy} \\ \frac{d\psi}{dx} & \frac{d^2\psi}{dx dy} \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{dx} & \frac{d^2\varphi}{dy^2} \\ \frac{d\psi}{dx} & \frac{d^2\psi}{dy^2} \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} \frac{d^2\varphi}{dx dy} & \frac{d\varphi}{dy} \\ \frac{d^2\psi}{dx dy} & \frac{d\psi}{dy} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Ce qui multiplie x et y n'est autre chose, en vertu également du Théorème de Euler, que

$$x \frac{dI}{dx} + y \frac{dI}{dy} = (m + n - 2)I.$$

Ainsi il viendra

$$\begin{vmatrix} y^2 & -xy & x^2 \\ \frac{d^2\varphi}{dx^2} & \frac{d^2\varphi}{dx dy} & \frac{d^2\varphi}{dy^2} \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} & \frac{d^2\psi}{dx dy} & \frac{d^2\psi}{dy^2} \end{vmatrix} = (m - 1)(n - 1)I.$$

Par suite, en employant un artifice connu, il viendra

$$\begin{vmatrix} y^2 & -xy^2 & x^2 \\ \frac{d^2\varphi}{dx^2} & \frac{d^2\varphi}{dx dy} & \frac{d^2\varphi}{dy^2} \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} & \frac{d^2\psi}{dx dy} & \frac{d^2\psi}{dy^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x^2 & 2xy & y^2 \\ \frac{d^2\varphi}{dy^2} & -2\frac{d^2\varphi}{dx dy} & \frac{d^2\varphi}{dx^2} \\ \frac{d^2\psi}{dy^2} & -2\frac{d^2\psi}{dx dy} & \frac{d^2\psi}{dx^2} \end{vmatrix} = 2(m-1)^2(n-1)^2 I^2;$$

d'où il suit qu'en multipliant et en posant

$$\begin{aligned} \Phi &= x^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} + 2xy \frac{d^2\varphi}{dx dy} + y^2 \frac{d^2\varphi}{dy^2}, \\ \Psi &= x^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} + 2xy \frac{d^2\psi}{dx dy} + y^2 \frac{d^2\psi}{dy^2}, \\ (1) \quad H &= \frac{d^2\varphi}{dx^2} \frac{d^2\varphi}{dy^2} - \left(\frac{d^2\varphi}{dx dy} \right)^2, \\ H' &= \frac{d^2\psi}{dx^2} \frac{d^2\psi}{dy^2} - \left(\frac{d^2\psi}{dx dy} \right)^2, \\ H'' &= \frac{d^2\varphi}{dx^2} \frac{d^2\psi}{dy^2} - 2 \frac{d^2\psi}{dx dy} \frac{d^2\varphi}{dx dy} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} \frac{d^2\psi}{dx^2} \end{aligned}$$

il viendra

$$\begin{vmatrix} 0 & \Phi & \Psi \\ \Phi & 2H & H'' \\ \Psi & H'' & 2H' \end{vmatrix} = 2(m-1)^2(n-1)^2 I^2;$$

ou bien

$$(2) \quad (m-1)^2(n-1)^2 I^2 = (\Phi^2 H' - \Phi \Psi H'' + \Psi^2 H).$$

Mais si l'on observe que $I = mnJ$, J étant le Jacobien dépouillé de ses coefficients numériques, $\Phi = m(m-1)\varphi$, $\Psi = n(n-1)\psi$, et que pareillement

$H = m^2(m-1)^2 H_\varphi$, $H' = n^2(n-1)^2 H_\psi$, $H'' = mn(m-1)(n-1) H_{\varphi\psi}$, H_φ , H_ψ , $H_{\varphi\psi}$ étant les covariants et le coefficient simultané de φ , ψ , il viendra

$$(3) \quad J = -[\varphi^2 H_\psi - \varphi \psi H_{\varphi\psi} + \psi^2 H_\varphi]$$

formule qui aura lieu toutes les fois que φ , ψ auront la forme binomiale.

Exemple 1. Soit la forme cubique

$$\varphi = (a, b, c, d)(x, y)^3$$

dont nous appellerons C_2 , C_3 les covariants quadratiques et cubiques. On sait que le covariant de C_2 est le Hessien de φ , et que le Jacobien de φ et C_2 est précisément C_3 ; ainsi il viendra en posant dans la formule

$$\begin{aligned} \Psi &= C_2, \quad H_\varphi = c_2, \quad H'_\psi = -\Delta, \quad H''_{\varphi\psi} = \\ &= 2^2 \cdot 1^2 \cdot 3^2 J^2 = 36 \varphi^2 \Delta - 4 \cdot 36 c_2^3 \end{aligned}$$

ou

$$C_3^2 = \varphi^2 \Delta - 4C_2^3$$

en admettant que

$$\Delta = (ad - bc)^2 - 4(ac - b^2)^2.$$

Exemple 2. Posons

$$\varphi = x^4 + 6\gamma x^2 y^2 + y^4 = u, \quad m = 4,$$

$$\psi = \gamma x^4 + (1 - 3\gamma^2)x^2 y^2 + \gamma y^4 = v, \quad n = 4.$$

v représentera le covariant de 4^e ordre de la quartique réduite à sa forme canonique dont elle sera l'Hessien. Mais, en appelant Θ le covariant de 6^e ordre, et en posant dans ce cas

$$(m - 1)^2 (n - 1)^2 = 81, \quad I = 8J = 8\Theta, \quad H_\varphi = 12^2 \psi, \quad \Phi = 12\varphi,$$

$$\Psi = 12\psi$$

et H' désignant l'Hessien de l'Hessien (v. notre Théorie des formes binaires p. 242) $= 36I_3 u - 12I_2 v$

$$H'' = 24(1 + 3\gamma^2)u = 24I_2 u$$

il viendra

$$81 \cdot 8^2 \cdot \Theta^2 = - \{ 12^2 \varphi^2 (36I_3 u - 12I_2 v) - 144 \varphi \psi \cdot 24I_2 u + 12^2 v^2 12^2 v \},$$

$$36\Theta = - \{ 12u^2 (3I_3 u - I_2 v) - 24u^2 v I_2 + 12^2 v^3 \},$$

$$\Theta^2 = - \{ I_3 u^3 - I_2 u^2 v + 4v^3 \}$$

qui est la relation connue entre les covariants de la quartique.

Exemple 3. Soient $\varphi = C_{2,2}$, $\varphi = C_{3,3}$ *) les covariants de 2^e ordre et de 2^e degré, de 3^e ordre et de 3^e degré de la quintique, que nous supposerons représentée sous la forme canonique

$$ax^5 + by^5 + cz^5, \quad x + y + z = 0.$$

On aura alors

$$\varphi = -C_{2,2} = - \{ acx^2 + (ac + bc + ab)xy + bcy^2 \},$$

$$\psi = C_{3,3} = abcxy(x + y)$$

et le Jacobien I sera

$$4C_{1,5} = 4abc \{ (bc - ab)x + (ac - ab)y \}.$$

On trouvera l'Hessien de

$$C_{3,3} = -2C_{6,2} = -4a^2 b^2 c^2 (x^2 + y^2 + xy)$$

et l'Hessien de $\varphi = -I_4$.

Par suite l'équation deviendra, toute réduction faite,

$$C_{3,5}^2 = 2C_{2,2}^2 C_{6,2} + 12C_{2,2} C_{3,3} C_{1,5} + 9C_{3,3}^2 I_4,$$

ce qui fournit une relation nouvelle entre les covariants fondamentaux.

*) On sousentend que $C_{h,i}$ désigne un covariant d'ordre h et de degré i .

Exemple 4. Pour la même forme quintique qu'auparavant supposons :

$$\varphi = C_{2,2} = - \{ acx^2 + (ac + bc - ab)xy + bcy^2 \},$$

$$\psi = C_{6,2} = 2a^2b^2c^2(x^2 + xy + y^2).$$

On aura

$$H = -I_4 = - \{ a^2b^2 + bc^2 + a^2c^2 - 2ab^2c^2(a+b+c) \},$$

$$H' = 12I_{1,2} = 12a^4b^4c^4; \quad H'' = 4, \quad I_8 = 4a^2b^2c^2(ab+ac+bc).$$

Cela posé l'équation (2) nous fournira cette identité algébrique remarquable

$$\begin{aligned} & \{ ab - bc \} x^2 + 2xy(ac - bc) + (ac - ab)y^2 \}^2 \\ &= -3[acx^2 + (ac + bc - ab)xy + bcy^2] \\ &+ 2(ab + ac + bc)[acx^2 + (ac + bc + ab)xy + bcy^2](x^2 + xy + y^2) \\ &+ (x^2 + xy + y^2)^2[a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 + 2abc(a+b+c)]. \end{aligned}$$

III. Théorème général sur les Déterminants fonctionnels.

Théorème. — Soit en général D le déterminant

$$\begin{vmatrix} P, & \Delta P, & \Delta^2 P, & \dots \\ Q, & \Delta Q, & \Delta^2 Q, & \dots \\ R, & \Delta R, & \Delta^2 R, & \dots \\ . & . & . & . \end{vmatrix}.$$

où chaque colonne est dérivée de la première par l'opération Δ quelconque répétée une, deux fois etc. de suite, et en sorte que la dernière colonne ne renferme que des constantes par rapport à Δ , on aura :

$$(1) \quad \Delta D = 0$$

Exemple 1. Soit

$$\Delta = \frac{d}{dx} + \frac{d}{dy} + \frac{d}{dz};$$

on aura, en posant

$$D = \begin{vmatrix} xy & y+z & 1 \\ yz & y+z & 1 \\ zx & z+x & 1 \end{vmatrix}, \quad D' = \begin{vmatrix} \frac{1}{x+y} & \frac{1}{(x+y)^2} & \frac{1}{(x+y)^3} \\ \frac{1}{y+z} & \frac{1}{(y+z)^2} & \frac{1}{(y+z)^3} \\ \frac{1}{z+x} & \frac{1}{(z+x)^2} & \frac{1}{(z+x)^3} \end{vmatrix},$$

$$\Delta D = 0, \quad \Delta D' = 0.$$

Exemple 2. Soit

$$\Delta = \frac{d}{dx} + \frac{d}{dy} + \frac{d}{dz} + \frac{d}{dt}$$

$$D = \begin{vmatrix} xyz & xy + yz + zx, & x + y + z, & 1 \\ yzt & yz + zt + ty, & y + z + t, & 1 \\ ztx & zt + xt + xz, & z + t + x, & 1 \\ txy & tx + ty + xy, & t + x + y, & 1 \end{vmatrix}^*),$$

il viendra pareillement $\Delta D = 0$.

Exemple 3. Au moyen de la propriété, que nous avons exposée dans un article précédent, dont jouissent les coefficients A d'une forme binaire transformée, on peut avec les coefficients, fonctions de p, q, p', q' , de la substitution

$$x = pX + qY,$$

$$y = p'X + q'Y$$

former un déterminant qui jouit de cette propriété. Ainsi soit ce déterminant

$$\begin{vmatrix} p^n, & p^{n-1}p', & \dots & \dots & p'^n \\ p^{n-1}q, & p^{n-1}q' + (n-1)p^{n-2}p'q, & \dots & p'^{n-1}q' \\ p^{n-2}q^2, & \dots & \dots & \dots & p'^{n-2}q'^2 \\ \vdots & & & & \\ pq^{n-1}, & q^{n-1}p' + (n-1)q^{n-2}q'p, & \dots & p'q'^{n-1} \\ q^n, & q^{n-1}q' & \dots & \dots & q^n \end{vmatrix}$$

où chaque colonne en allant de gauche à droite et réciproquement, ou chaque ligne de haut en bas et réciproquement, resulte des 4 opérations

$$p' \frac{d}{dp} + q' \frac{d}{dq}, p \frac{d}{dp'} + q \frac{d}{dq'}; q \frac{d}{dp} + q' \frac{d}{dp'}, p \frac{d}{dq} + p' \frac{d}{dq'}.$$

Ainsi on aura d'après le théorème général

$$\begin{cases} 1 \left\{ p' \frac{d\varphi}{dp} + q' \frac{d\varphi}{dq} = 0, \right. \\ 2 \left\{ p \frac{d\varphi}{dp'} + q \frac{d\varphi}{dq'} = 0, \right. \\ 3 \left\{ p \frac{d\varphi}{dq} + p' \frac{d\varphi}{dq'} = 0, \right. \\ 4 \left\{ q \frac{d\varphi}{dp} + q' \frac{d\varphi}{dp'} = 0. \right. \end{cases}$$

*) Tous ces déterminants peuvent facilement se réduire; et on aura par exemple,

$$D' = \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x+y)^3(y+z)^3(z+x)^3}.$$

La démonstration est évidente, car l'opération Δ rendra toujours égales deux colonnes.

En combinant ensemble la 1^e et la 3^e et la 4^e on déduit

$$p \frac{d\varphi}{dp} - q' \frac{d\varphi}{dq'} = 0,$$

$$q \frac{d\varphi}{dq} - p' \frac{d\varphi}{dp'} = 0,$$

d'où

$$p \frac{d\varphi}{dp} + q \frac{d\varphi}{dq} - p' \frac{d\varphi}{dp'} - q' \frac{d\varphi}{dq'} = 0.$$

Or comme φ est évidemment une fonction homogène par rapport à p, q, p', q' , en appelant μ son degré, on aura :

$$p \frac{d\varphi}{dp} + p' \frac{d\varphi}{dp'} + q \frac{d\varphi}{dq} + q' \frac{d\varphi}{dq'} = \mu \varphi.$$

En combinant ensemble les deux dernières équations, on aura

$$p \frac{d\varphi}{dp} + p' \frac{d\varphi}{dp'} = \frac{\mu}{2} \varphi.$$

Mais l'équation (4) nous fournit

$$q \frac{d\varphi}{dp} + q' \frac{d\varphi}{dp'} = 0;$$

d'où en éliminant $\frac{d\varphi}{dp'}$, il viendra

$$(pq' - p'q) \frac{d\varphi}{dp} = \frac{\mu}{2} q' \varphi;$$

et par suite

$$\varphi = \lambda (pq' - p'q)^{\frac{\mu}{2}} + C.$$

Et comme il sera facile de vérifier que $C = 0$, $\lambda = 1$, $\mu = n(n+1)$, il viendra enfin

$$\varphi = (pq' - p'q)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Turin, Janvier 1881.