Théorie nouvelle des nombres de Bernoulli et d'Euler

(par Mr. EDOUARD LUCAS, professeur au lycée Charlemagne, à Paris).

Les développements des fonctions circulaires, et notamment de la tangente, de la cotangente, de la sécante et de la cosécante de l'arc x , en séries ordonnées suivant les puissances croissantes de x , et ceux des fonctions hyperboliques correspondantes, conduisent à la connaissance de nombres analogues à ceux de BERNOULLI et d'EULER, dont l'étude est fort importante dans le calcul intégral, dans le calcul inverse des différences, et dans l'arithmétique supérieure. L'emploi du calcul symbolique permet de simplifier considérablement la théorie de ces nombres, et de généraliser les formules qui les renferment. Tel est l'objet du présent Mémoire.

§ 1. Lemmes préliminaires sur l'emploi des symboles.

1. Si l'on a la relation

$$f(x) = b_0 a_n x^n + \frac{n}{1} b_1 a_{n-1} x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} b_2 a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0 b_n,$$

ou, sous la forme symbolique

$$f(x) = (ax + b)^n,$$

on a aussi, comme on le vérifie aisément

$$f'(x) = na(ax + b)^{n-1}.$$

Remarque. — Il faut avoir soin, dans ce calcul, de ne jamais oublier l'exposant zéro, que l'on doit remplacer, dans chaque cas, par le coefficient correspondant dont l'indice est nul.

2. Si l'on a les formules symboliques

$$f(x) = e^{ax} = a_0 + a_1 \frac{x}{1} + a_2 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \cdots + a_n \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdots n} + \cdots$$

$$f(x) = \cos ax = a_0 - a_2 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + a_4 \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdots,$$

$$f(x) = \sin ax = a_1 \frac{x}{1} - a_3 \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + a_5 \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \cdots,$$

on a aussi, respectivement, les formules symboliques

$$f'(x) = a e^{ax},$$

$$f'(x) = -a \sin ax,$$

$$f'(x) = +a \cos ax,$$

et, de même, pour un certain nombre d'autres fonctions.

3. Si l'on a les formules symboliques

$$A = e^{ax}, \quad B = e^{bx}, \quad C = e^{cx},$$

et, si l'on a, de plus,

$$C = AB,$$

les coefficients a , b , c , sont liés entre eux par la relation symbolique

$$c_n = (a + b)^{(n)},$$

en sorte que l'on peut poser l'identité symbolique

$$e^{ax} \times e^{bx} = e^{(a+b)x}.$$

En désignant par p_n et q_n les nombres des arrangements de p lettres ou de q lettres, n à n , on a ainsi

$$(1+x)^p = e^{px},$$

$$(1+x)^q = e^{qx},$$

$$(1+x)^{p+q} = e^{(p+q)x},$$

et, par suite, la formule symbolique

$$[p+q]_n = (p+q)^n,$$

dans laquelle on suppose $p_0 = 1$.

4. Si l'on désigne par C_m^n le nombre des combinaisons de m objets pris n à n , on a la formule

$$C_m^n = C_{m-p}^{n-p} [C+1]^{(p)},$$

en ne considérant, comme exposants, que les indices supérieurs, et la formule

$$C_{m-p}^{n-p} = C_{m-p}^n (C-1)_{(p)},$$

en ne considérant comme exposants que les indices inférieurs (*).

§ 2. Sur la sommation des puissances semblables des nombres naturels.

5. Soit, en général, une fonction entière $\Delta f(x)$ égale à la différence d'une fonction $f(x)$, pour une différence de l'argument égale à l'unité,

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n;$$

en remplaçant successivement x par 1, 2, 3, ... $(x-1)$, et, en additionnant, on obtient, après avoir posé

$$S_n = 1^n + 2^n + 3^n + \dots + (x-1)^n,$$

la formule

$$f(x) - f(1) = a_0 S_n + a_1 S_{n-1} + a_2 S_{n-2} + \dots + a_n S_0,$$

ou, symboliquement,

$$f(x) - f(1) = \Delta f(S), \quad (1)$$

en ayant soin de ne pas oublier l'exposant zéro de S .

Faisons, dans la formule (1), $f(x)$ égal à $(x-1)^n$, ou à x^n , nous obtenons les deux formules

$$(x-1)^n = S^n - (S-1)^n, \quad (2)$$

$$x^n - 1 = (S+1)^n - S^n, \quad (3)$$

et, par addition et soustraction, les deux formules

$$x^n + (x-1)^n - 1 = (S+1)^n - (S-1)^n, \quad (4)$$

$$x^n - (x-1)^n - 1 = (S+1)^n + (S-1)^n - 2S^n, \quad (5)$$

qui permettent de calculer les sommes S , par voie récurrente, et de deux en deux.

Faisons encore, dans la formule (1), $f(x)$ égal à $\left(x - \frac{1}{2}\right)^n$, nous obtenons l'équation

$$(2x-1)^n - 1 = (2S+1)^n - (2S-1)^n, \quad (6)$$

qui a été donnée par Mr. GILBERT, au moyen de l'analyse infinitésimale (**).

(*) Nouvelle Correspondance Mathématique, t. 2, p. 70 et suiv.

(**) Nouvelles Annales de Mathématiques, 2^e série, t. 8, 1869, p. 437.

Enfin, si l'on fait, dans la formule (1),

$$f(x) = (x+a)(x+a+1)\cdots(x+a+n-1),$$

on obtient

$$\left. \begin{aligned} (x+a)(x+a+1)\cdots(x+a+n-1) - (a+1)(a+2)\cdots(a+n) \\ = n(S+a+1)(S+a+2)\cdots(S+a+n-1), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

et, pour $a=0$,

$$x(x+1)\cdots(x+n-1) - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n(S+1)(S+2)\cdots(S+n-1). \quad (8)$$

6. On tire du système des n équations obtenues en remplaçant successivement n par 1, 2, 3, ... n , dans la formule (3),

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot S_{n-1} = \begin{vmatrix} x^n, & C_n^{n-2}, & C_n^{n-3}, \dots & C_n^1, & 1 \\ x^{n-1}, & C_{n-1}^{n-2}, & C_{n-1}^{n-3}, \dots & C_{n-1}^1, & 1 \\ x^{n-2}, & 0, & C_{n-2}^{n-3}, \dots & C_{n-2}^1, & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^2, & 0, & 0, \dots & C_2^1, & 1 \\ x, & 0, & 0, \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (9)$$

Le déterminant du second membre s'annule pour $x=0$, et pour $x=1$; donc S_n est divisible, quel que soit l'entier n , par le produit $x(x-1)$ ou par S_1 . La formule (2) conduit à un déterminant analogue; inversement, on peut obtenir l'expression de C_n^{n-p} à l'aide de déterminants contenant les sommes $S_{n-1}, S_{n-2}, \dots$ des $(x-1), (2x-1), \dots (nx-1)$, premiers nombres.

7. On obtient des déterminants d'ordre moitié moindre, en employant l'une des relations (4), (5) et (6). La relation (6) donne, par exemple, en posant $2x-1=y$, et pour les valeurs impaires de l'exposant:

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1) 2^{2n+1} S_{2n} = \begin{vmatrix} y^{2n+1}, & C_{2n+1}^{2n-2}, & C_{2n+1}^{2n-4}, \dots & C_{2n+1}^4, & C_{2n+1}^2, & 1 \\ y^{2n-1}, & C_{2n-1}^{2n-2}, & C_{2n-1}^{2n-4}, \dots & C_{2n-1}^4, & C_{2n-1}^2, & 1 \\ y^{2n-3}, & 0, & C_{2n-3}^{2n-4}, \dots & C_{2n-3}^4, & C_{2n-3}^2, & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^3, & 0, & 0, \dots & 0, & C_3^2, & 1 \\ y, & 0, & 0, \dots & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} \quad (10)$$

Le déterminant s'annule pour $x = \frac{1}{2}$, donc S_{2n} est divisible par S_2 ; on voit, de plus, que S_{2n} est une fonction impaire de $\left(x - \frac{1}{2}\right)$, et que, par suite, le quotient $\frac{S_{2n}}{S_2}$ est une fonction paire de la même quantité.

La formule (6) conduit à un déterminant analogue, pour les valeurs paires de l'exposant, et donne l'expression de S_{2n+1} . La comparaison des deux déterminants donne la relation

$$\frac{\partial S_{2n+1}}{\partial x} = (2n+1)S_{2n}.$$

On en déduit que S_{2n+1} est une fonction paire de $\left(x - \frac{1}{2}\right)$, et, de plus, que S_{2n+1} est divisible par $x^2(x-1)^2$, ou par S_3 .

Enfin, on peut obtenir plus généralement S_n en fonction d'un déterminant contenant au moins $(n+1)$ fonctions arbitraires de x ; il suffit, pour cela, de considérer $(n+1)$ équations semblables à l'équation (1).

§ 3. Sur les nombres de Bernoulli.

8. On peut poser symboliquement l'équation

$$nS_{n-1} = (x+B)^n - B^n, \quad (11)$$

dans laquelle on remplacera les exposants de B par des indices, et B_0 par l'unité. Ces coefficients B sont appelés Nombres de Bernoulli, parce que JACQUES BERNOULLI les a remarqués le premier, comme formant le coefficient du dernier terme, dans les sommes des puissances paires. La comparaison de la formule (9), et de la formule (7), donne

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot B_{n-1} = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} C_n^{n-2} & C_n^{n-3}, \dots & C_n^1 & 1 \\ C_{n-1}^{n-2} & C_{n-1}^{n-3}, \dots & C_{n-1}^1 & 1 \\ 0, & C_{n-2}^{n-3}, \dots & C_{n-2}^1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, \dots & C_2^1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (12)$$

On peut trouver ainsi un grand nombre de formules analogues, mais on

peut encore calculer directement les coefficients B de la manière suivante. En changeant x en $x+1$ dans l'équation (11), on obtient, par différence, l'identité

$$nx^{n-1} = (x+B+1)^n - (x+B)^n, \quad (13)$$

qui a lieu pour toutes les valeurs entières positives de x , et, par suite, quelle que soit la valeur de x . En particulier, pour $x=0$, $x=\pm 1$, $x=-\frac{1}{2}$, et, par addition et soustraction, on a les relations récurrentes

$$\left. \begin{aligned} (B+1)^n - B^n &= 0, \\ B^n - (B-1)^n &= n(-1)^{n-1}, \\ (B+1)^n - (B-1)^n &= n(-1)^{n-1}, \\ (B+2)^n - (B+1)^n &= n, \\ (2B+1)^n - (2B-1)^n &= 2n(-1)^{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

La première de ces relations, que l'on peut obtenir en faisant $x=1$, dans la relation (11), a été indiquée par MOIVRE (*). On peut encore obtenir les nombres B au moyen de déterminants déduits des équations (13) et (14); on a d'ailleurs, pour les premiers coefficients,

$$B_0=1, \quad B_1=-\frac{1}{2}, \quad B_2=\frac{1}{6}, \quad B_4=-\frac{1}{30}, \quad B_6=\frac{1}{42}, \quad B_8=-\frac{1}{30}, \dots;$$

les coefficients d'indice impair sont nuls, à l'exception de B_1 , ainsi que cela résulte de la troisième et de la cinquième des équations (14). La formule (12) fait voir que $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot B_{n-1}$ est un nombre entier.

Enfin, on déduit encore de la formule (11) l'égalité

$$\frac{\partial S_n}{\partial x} = n S_{n-1} + B_n, \quad (15)$$

qui permet de trouver rapidement S_n par voie d'intégration, en calculant chaque fois la constante, par l'une des conditions $S_n=1$ pour $x=2$, et $S_n=0$ pour $x=1$.

9. La formule (13) peut être généralisée de la manière suivante, en observant que le premier membre est la dérivée de x^n , et le second la différence symbolique de $(x+B)^n$. On a donc

$$f(x+B+1) - f(x+B) = f'(x), \quad (16)$$

(*) LACROIX: *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, t. 3, n.º 84.

ainsi qu'il est facile de le vérifier, en développant $f(x)$ suivant les puissances croissantes de x .

Prenons, par exemple, la factorielle

$$f(x) = x(x+1) \cdots (x+n-1),$$

nous avons

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \cdots + \frac{1}{x+n-1};$$

d'autre part,

$$f(x+B+1) - f(x+B) = n(x+B+1)(x+B+2) \cdots (x+B+n-1);$$

par suite,

$$\frac{B+x+1}{x+1} \cdot \frac{B+x+2}{x+2} \cdots \frac{B+x+n-1}{x+n-1} \cdot \frac{n}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \cdots + \frac{1}{x+n-1}. \quad (17)$$

Pour $x=1$, nous obtenons

$$\frac{B+2}{2} \cdot \frac{B+3}{3} \cdots \frac{B+n}{n} = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right], \quad (18)$$

et, pour $x=0$, en changeant n en $n+1$,

$$(B+1)(B+2) \cdots (B+n) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{n+1}. \quad (19)$$

On déduit de la relation (16), dans l'hypothèse de $x=0$, la formule

$$f(B+1) - f(B) = f'(0). \quad (20)$$

Faisons, dans cette dernière formule, la supposition

$$f(x) = e^{xz},$$

il vient

$$e^{Bz}(e^z - 1) = z,$$

et, par suite,

$$\frac{z}{e^z - 1} = e^{Bz}. \quad (21)$$

Ce développement, bien connu, demeure convergent pour les valeurs réelles ou imaginaires de z dont le module est inférieur à 2π .

Si nous faisons, dans la même formule,

$$f(x) = \sin\left(x - \frac{1}{2}\right)z, \text{ ou } f(x) = \cos\left(x - \frac{1}{2}\right)z,$$

nous obtenons

$$\frac{z}{2} \cotg \frac{z}{2} = \cos Bz, \quad -\frac{z}{2} = \sin Bz. \quad (22)$$

Le dernier résultat coïncide avec $B_3 = B_5 = B_7 = \dots = 0$, et $B_1 = -\frac{1}{2}$.

10. La formule (16) est encore susceptible d'une certaine généralisation. On peut, en effet, par l'introduction d'une nouvelle variable y , l'écrire sous la forme

$$\Delta_{x=1} f(x+B, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}; \quad (23)$$

si l'on applique cette formule à la fonction $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ considérée par rapport à y , on a, de même,

$$\Delta_{x=1, y=1}^2 f(x+B, y+B') = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad (24)$$

et, pour une fonction de trois ou d'un plus grand nombre de variables,

$$\Delta_{x=1, y=1, z=1}^3 f(x+B, y+B', z+B'') = \frac{\partial^3 f(x, y, z)}{\partial x \partial y \partial z}. \quad (25)$$

On ne réduira pas les B avec les B' et avec les B'' , mais lorsque le développement symbolique du premier membre sera effectué, on remplacera B^n , B'^n , B''^n par B_n . On aura ainsi les relations concernant les produits deux à deux, trois à trois, etc.,... des nombres de BERNOULLI.

En faisant $f(x)$ égal à $(x+y)^n$, on a, par exemple,

$$(B+B'+2)^n - 2(B+B'+1)^n + (B+B')^n = 0; \quad (26)$$

de même,

$$(B+B'+B''+3)^n - 3(B+B'+B''+2)^n + 3(B+B'+B''+1)^n - (B+B'+B'')^n = 0, \quad (27)$$

et ainsi de suite.

11. Considérons la série de x quantités

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \dots \quad u_p, \dots \quad u_x,$$

et formons une table de multiplication, en écrivant successivement les uns au dessous des autres les produits des termes de cette série, par ceux de la série

$$v_1, \quad v_2, \quad v_3, \dots \quad v_p, \dots \quad v_x;$$

la somme des termes de la table sera égale au produit des sommes des deux séries, que nous désignerons par U_x et V_x , ainsi qu'on le voit en faisant l'addition par lignes ou par colonnes.

D'autre part, en prenant seulement les p premiers termes de la table qui se trouvent dans la $p^{i\text{ème}}$ ligne, et les $p-1$ premiers de la $p^{i\text{ème}}$ colonne, on a, pour expression de leur somme

$$u_p V_p + v_p U_p - u_p v_p,$$

et, par suite, en faisant la somme de ces expressions de $p=1$ à $p=x$, on a la formule

$$U_x V_x - \sum_{p=1}^{p=x} (u_p V_p + v_p U_p) + \sum_{p=1}^{p=x} u_p v_p = 0. \quad (28)$$

Considérons, de même, une troisième série de quantités,

$$w_1, \quad w_2, \quad w_3, \dots \quad w_p, \dots \quad w_x,$$

et plaçons les unes au dessus des autres les tables obtenues en multipliant tous les termes de la première table, successivement par tous les termes de la troisième série. Nous formerons ainsi un cube, sorte de Table de multiplication à trois entrées, et le compartiment ayant pour coordonnées p, q, r contiendra le produit $u_p v_q w_r$.

Cela posé, considérons successivement les cubes ayant, à partir de l'origine, 1, 2, 3, ... p unités de côté, et cherchons la somme des termes qu'il faut ajouter au $(p-1)^{i\text{ème}}$ cube pour obtenir le $p^{i\text{ème}}$. Elle a pour expression

$$(u_p V_p + v_p U_p - u_p v_p)(W_p - w_p) + w_p U_p V_p,$$

et, puisque la somme des termes de toutes les tables est égale au produit des sommes des trois séries, on a

$$\left. \begin{aligned} U_x V_x W_x - \sum_{p=1}^{p=x} u_p V_p W_p - \sum_{p=1}^{p=x} v_p W_p U_p - \sum_{p=1}^{p=x} w_p U_p V_p \\ + \sum_{p=1}^{p=x} u_p v_p W_p + \sum_{p=1}^{p=x} v_p w_p U_p + \sum_{p=1}^{p=x} w_p u_p V_p - \sum_{p=1}^{p=x} u_p v_p w_p = 0. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Dans le cas où les trois séries sont identiques, on a

$$U_x^3 - 3 \sum_{p=1}^{p=x} u_p U_p^2 + 3 \sum_{p=1}^{p=x} u_p^2 U_p - \sum_{p=1}^{p=x} u_p^3 = 0. \quad (30)$$

On a, de même, par induction, la formule générale

$$U_x^n - C_n^1 \sum_{p=1}^{p=x} u_p U_p^{n-1} + C_n^2 \sum_{p=1}^{p=x} u_p^2 U_p^{n-2} + \dots + (-1)^n \sum_{p=1}^{p=x} u_p^n = 0. \quad (31)$$

12. Si l'on fait dans la formule précédente $u_p = 1$, et si l'on désigne par S'_n la somme des $n^{\text{èmes}}$ puissances des x premiers nombres, on obtient la formule symbolique

$$x^n + (S' - 1)^n - S'^n = 0,$$

qui coïncide avec la formule (2), si l'on remplace x par $x-1$ et S' par S . Quant à l'expression de S'_n en fonction de x , elle se déduit de celle de S_n donnée dans la formule (11), en changeant simplement le signe de B_1 .

Faisons maintenant dans la formule (28),

$$u_p = p^m, \quad v_p = p^n,$$

nous obtenons ainsi, en supposant $B_1 = +\frac{1}{2}$ la relation symbolique

$$S'_m S'_n + S'_{m+n} = S'_m \frac{(S' + B)^{n+1} - B^{n+1}}{n+1} + S'_n \frac{(S' + B)^{m+1} - B^{m+1}}{m+1}. \quad (32)$$

qui exprime $S'_m S'_n$ en fonction linéaire des sommes S' .

On obtient ainsi, comme cas particuliers, pour $m=n$, et pour S ou pour S' , à cause de la disparition de B_1 ,

$$\left. \begin{aligned} S_1^2 &= S_3, \\ S_2^2 &= \frac{2}{3} S_5 + \frac{1}{3} S_3, \\ S_3^2 &= \frac{1}{2} S_7 + \frac{1}{2} S_5, \\ S_4^2 &= \frac{2}{5} S_9 + \frac{2}{3} S_7 - \frac{1}{15} S_5, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

La première de ces formules est fort ancienne; la troisième est due à JACOBI, qui l'a indiquée dans une remarque, sur un passage d'une lettre de SCHUMACHER à GAUSS (*).

(*) *Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher, herausgegeben von C. A. F. Peters. — Vierter Band. Altona, 1862.*

Inversement, on déduit des formules (33), les relations,

$$\left. \begin{aligned} 2S_3 &= 2S_1^2, \\ 2S_5 &= 3S_2^2 - S_1^2, \\ 2S_7 &= 4S_3^2 - 3S_2^2 + S_1^2, \\ 2S_9 &= 5S_4^2 - \frac{20}{3}S_3^2 + \frac{11}{2}S_2^2 - \frac{11}{6}S_1^2, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

et, sous forme de déterminant, on a, par exemple,

$$2S_{13} = - \begin{vmatrix} 2S_1^2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3S_2^2 & C_3^2 B_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4S_3^2 & 0 & C_4^2 B_2 & 1 & 0 & 0 \\ 5S_4^2 & 0 & C_5^2 B_4 & C_5^2 B_2 & 1 & 0 \\ 6S_5^2 & 0 & 0 & C_6^2 B_4 & C_6^2 B_2 & 1 \\ 7S_6^2 & 0 & 0 & C_7^2 B_6 & C_7^2 B_4 & C_7^2 B_2 \end{vmatrix} \quad (35)$$

13. L'équation (32) donne en faisant $m=1$, $n=2q+1$ et en posant

$$\frac{S_{2q+1}}{S_1^2} = Q_{2q+1}, \quad y = 2S_1 = x(x-1),$$

la formule

$$yQ_{2q+1} - 2Q_{2q+3} = Q \frac{(Q+B)^{2q+2} - B^{2q+2}}{q+1}; \quad (36)$$

on obtient ainsi, en faisant successivement $q=1, 2, 3, \dots$ les résultats suivants,

$$\left. \begin{aligned} Q_3 &= 1, \\ Q_5 &= \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}, \\ Q_7 &= \frac{1}{2}y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}, \\ Q_9 &= \frac{2}{5}y^3 - \frac{3}{3}y^2 + \frac{6}{5}y - \frac{3}{5}, \\ Q_{11} &= \frac{1}{3}y^4 - \frac{4}{3}y^3 + \frac{17}{6}y^2 - \frac{10}{3}y + \frac{5}{3}, \\ Q_{13} &= \frac{2}{7}y^5 - \frac{5}{3}y^4 + \frac{82}{15}y^3 - \frac{236}{21}y^2 + \frac{1382}{105}y - \frac{691}{105}, \\ Q_{15} &= \frac{1}{4}y^6 - \frac{6}{3}y^5 + \frac{28}{3}y^4 - \frac{88}{3}y^3 + \frac{359}{6}y^2 - 70y + 35, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

On calcule ainsi rapidement les sommes S_{2q+1} . L'équation (32) donne encore, en faisant $m=2$ et $n=2q+1$, et en posant

$$\frac{S_{2q}}{S_2} = Q_{2q},$$

la formule

$$y^2 Q_{2q+1} = Q^2 \frac{(Q+B)^{2q+2} - B^{2q+2}}{2q+2} + Q^{2q+2} \frac{2Q^2+1}{3}, \quad (38)$$

dans le développement de laquelle on supposera B_1 égal à zéro.

On a ainsi successivement, les résultats

$$\left. \begin{aligned} 3Q_2 &= 3, \\ 5Q_4 &= 3y - 1, \\ 7Q_6 &= 3y^2 - 3y + 1, \\ 9Q_8 &= 3y^3 - 6y^2 + \frac{27}{5}y - \frac{9}{5}, \\ 11Q_{10} &= 3y^4 - 10y^3 + 17y^2 - 15y + 5, \\ 13Q_{12} &= 3y^5 - 15y^4 + 41y^3 - \frac{472}{7}y^2 + \frac{2073}{35}y - \frac{691}{35}, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

et, plus particulièrement,

$$5Q_9 = (y-1)(2y^2 - 3y + 3), \quad (40)$$

$$11Q_{10} = (y-1)(3y^3 - 7y^2 + 10y - 5). \quad (41)$$

14. Il résulte immédiatement de la formule (11) que les rapports

$$\frac{S_n}{x} \text{ et } \frac{S_{2n-1}}{x^2},$$

ont respectivement pour valeurs

$$B_n \text{ et } \frac{2n-1}{2} B_{2n-2},$$

quand x tend vers zéro. Si l'on introduit ces hypothèses dans les formules précédentes qui contiennent S , on obtient un grand nombre de formules correspondantes pour les nombres de BERNOULLI. Ainsi, par exemple, la formule (32) devient

$$B_{m+n} = B^m \frac{(B+B')^{n+1} - B'^{n+1}}{n+1} + B^n \frac{(B+B')^{m+1} - B'^{m+1}}{m+1}. \quad (42)$$

On ne réduit pas les B avec les B' ; mais, après le développement du second membre, on remplace B^n et B'^n par B_n . En particulier, si l'on fait $m=1$, et $n=2q-1$, on obtient la formule

$$2q B_{2q} = B[(B+B')^{2q} - B'^{2q}], \quad (43)$$

et, pour $m=0$ et $n=2q-1$, on obtient la formule suivante

$$(2q-1)B_{2q} + (B+B')^{2q} = 0, \quad (44)$$

qui a été donnée par Mr. WORONTZOFF (*) et par Mr. LE PAIGE (**).

La formule (35) donne encore, après avoir divisé par x^2 ,

$$13B_{12} = - \begin{vmatrix} 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, \\ 3B_2^2, & C_3^2 B_2, & 1, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & C_4^2 B_2, & 1, & 0, & 0, \\ 5B_4^2, & 0, & C_5^4 B_4, & C_5^2 B_2, & 1, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & C_6^4 B_4, & C_6^2 B_2, & 1, \\ 6B_6^2, & 0, & 0, & C_7^6 B_6, & C_7^4 B_4, & C_7^2 B_2. \end{vmatrix} \quad (45)$$

§ 4. De la somme des puissances alternées des nombres naturels.

15. En désignant par x un nombre pair, on a

$$\begin{aligned} n[1^{n-1} + 2^{n-1} + 3^{n-1} + \dots + (x-1)^{n-1}] &= (x+B)^n - B^n, \\ n\left[1^{n-1} + 2^{n-1} + 3^{n-1} + \dots + \left(\frac{x}{2}-1\right)^{n-1}\right] &= \left(\frac{x}{2}+B\right)^n - B^n; \end{aligned}$$

multiplions par 2^n tous les termes de la seconde égalité, et retranchons de la première, nous obtenons la formule

$$2n[1^{n-1} - 2^{n-1} + 3^{n-1} + \dots + (x-1)^{n-1}] = P^n - (x+P)^n, \quad (46)$$

en supposant

$$P_n = 2(2^n - 1)B_n. \quad (47)$$

(*) Nouvelles Annales de Mathématiques, 2^e série, t. 15, janvier 1876.

(**) Bulletins de l'Académie royale de Belgique, t. 41, mai 1876.

nous avons ainsi

$$\begin{aligned} P_0 &= 0, & P_1 &= -1, & P_2 &= +1, & P_4 &= -1, & P_6 &= +3, \\ P_8 &= -17, & P_{10} &= +155, & P_{12} &= -2073, \dots \end{aligned}$$

et P_{2n+1} est nul, en même temps que B_{2n+1} .

Il résulte immédiatement de la définition des coefficients P , que l'on a la formule symbolique

$$\frac{1}{2}f(P) = f(2B) - f(B). \quad (48)$$

Ainsi, par exemple, la formule

$$\frac{x}{2} \operatorname{tang} \frac{x}{2} = \frac{x}{2} \cotg \frac{x}{2} - x \cot x,$$

nous donne

$$-\frac{x}{2} \operatorname{tang} \frac{x}{2} = \cos 2Bx - \cos Bx,$$

et, par suite,

$$-x \operatorname{tang} \frac{x}{2} = \cos Px, \quad (49)$$

formule connue dont nous donnerons plus loin une démonstration directe.

16. Si, dans la formule (46), on change x en $x+2$, on obtient, par soustraction, la formule

$$(x+P+2)^n - (x+P)^n = 2n[x^{n-1} - (x+1)^{n-1}], \quad (50)$$

qui s'applique pour toutes les valeurs paires de x , et, par suite, pour des valeurs quelconques. On obtient, en généralisant, la formule suivante dans laquelle f désigne une fonction quelconque

$$f(x+P+2) - f(x+P) = 2[f'(x) - f'(x+1)], \quad (51)$$

et, avec la notation des différences,

$$\Delta_{x=2} f(x+P) = -2 \Delta_{x=1} \frac{\partial f(x)}{\partial x}.$$

On obtient encore, comme au paragraphe précédent,

$$\Delta_{x=2, y=2}^2 f(x+P, y+P') = (-2)^2 \Delta_{x=1, y=1}^2 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}; \quad (52)$$

dans le cas de trois variables

$$\Delta_{x=2, y=2, z=2}^3 f(x+P, y+P', z+P'') = (-2)^3 \Delta_{x=1, y=1, z=1}^3 \frac{\partial^3 f(x, y, z)}{\partial x \partial y \partial z}, \quad (53)$$

et ainsi de suite.

17. Faisons $x=0$, dans la formule (51), nous obtenons

$$f(P+2)-f(P)=2[f'(0)-f'(1)], \quad (54)$$

et, en particulier, pour $f(x)$ successivement égal à x^n , $(x-1)^n$, $(x-2)^n, \dots$,

$$\left. \begin{aligned} (P+2)^n - P^n &= -2n, & (P+1)^n - (P-1)^n &= 2n(-1)^{n-1}, \\ 2^n - (P-2)^n &= 2n[(-2)^{n-1} - (-1)^{n-1}], & (P+2)^n - (P-2)^n &= 2n[(-2)^{n-1} - (-1)^{n-1} - 1], \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

.....

On tire de la première des relations (55), en remarquant que P est nul, et en remplaçant successivement n par 2, 3, 4, ... n ,

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot P_{n-1} = - \begin{vmatrix} n, & 2C_n^2, & 2^2 C_n^3, \dots & 2^{n-2} C_n^{n-1}, \\ n-1, & 1C_{n-1}^1, & 2C_{n-1}^2, \dots & 2^{n-3} C_{n-1}^{n-2}, \\ n-2, & 0, & 1C_{n-2}^1, \dots & 2^{n-4} C_{n-2}^{n-3}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 4, & 0, & 0, \dots & 2^2 C_4^3, \\ 3, & 0, & 0, \dots & 2C_3^2, \\ 2, & 0, & 0, \dots & 1C_2^1. \end{vmatrix} \quad (56)$$

La seconde et la quatrième des relations (55) donneraient, de la même manière, un déterminant d'ordre moitié moindre.

18. Dans l'hypothèse

$$f(x) = (x+a)(x+a+2) \cdots (x+a+2n),$$

la formule (54) nous donne,

$$\left. \begin{aligned} & (n+1)(P+a+2)(P+a+4) \cdots (n+a+2n) \\ & = a(a+2) \cdots (a+2n) \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a+2} + \cdots + \frac{1}{a+2n} \right] \\ & - (a+1)(a+3) \cdots (a+2n+1) \left[\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+3} + \cdots + \frac{1}{a+2n+1} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

et, par exemple, pour $a=0$,

$$\left. \begin{aligned} & (n+1)(P+2)(P+4) \cdots (P+2n) = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) \\ & - 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1) \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n+1} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

et, pour $a = -1$

$$\left. \begin{aligned} (n+1)(P+1)(P+3)\cdots(P+2n-1) = \\ -1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \right] - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n). \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Posons maintenant dans la formule (54), $f(x) = e^{xz}$, nous obtenons

$$e^{Pz} = -\frac{2z}{1+e^z}; \quad (60)$$

si nous posons $f(x) = \sin(x-1)z$, nous obtenons

$$\cos Pz = -z \operatorname{tg} \frac{z}{2}, \quad (61)$$

et si nous posons $f(x) = \cos(x-1)z$,

$$\sin Pz = -z. \quad (62)$$

Cette dernière formule confirme le résultat $P_1 = -1$ et $P_{2n+1} = 0$.

§ 5. De la somme des puissances semblables des nombres impairs.

19. Si l'on désigne par T_n la somme des $n^{\text{èmes}}$ puissances des x premiers nombres impairs, on déduit du développement

$$(2x-1)^n = 2^n x^n - C_n^1 2^{n-1} x^{n-1} + C_n^2 2^{n-2} x^{n-2} + \cdots + (-1)^n,$$

en y remplaçant successivement x par 1, 2, 3, ... x , et en ajoutant, la formule symbolique

$$T^n = (2S' - 1)^n; \quad (63)$$

on voit ainsi que les symboles T et $2S' - 1$ peuvent être remplacés l'un par l'autre, dans les formules. Inversement, du développement

$$(2x)^n = (2x-1)^n + C_n^1 (2x-1)^{n-1} + C_n^2 (2x-1)^{n-2} + \cdots + 1,$$

on déduit la formule symbolique

$$(2S')^n = (T+1)^n, \quad (64)$$

et l'on pourra remplacer les symboles $T+1$ et $2S'$ l'un par l'autre.

On peut encore exprimer T_n en fonction de T_{n-1} , T_{n-2} , ...; soit en effet, la formule

$$f(y+2) - f(y) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n;$$

remplaçons successivement y par les x premiers nombres impairs, et ajoutons, il vient

$$f(2x+1) - f(1) = f(T+2) - f(T). \quad (65)$$

On en déduira aisément un très-grand nombre de résultats semblables à ceux que nous avons exposés dans les paragraphes précédents, mais nous ne nous occuperons que des coefficients de x dans le développement de T_n ; ces coefficients apparaissent encore dans un certain nombre de séries trigonométriques.

20. On a les deux formules

$$\begin{aligned} 2n[1^{n-1} - 2^{n-1} + 3^{n-1} + \dots + (2x-1)^{n-1}] &= P^n - (2x+P)^n, \\ n[1^{n-1} + 2^{n-1} + 3^{n-1} + \dots + (2x-1)^{n-1}] &= (2x+B)^n - B^n, \end{aligned}$$

et, par conséquent, si l'on pose

$$4R_n = 2B_n - P_n, \quad (66)$$

on a, aisément, la formule

$$nT_{n-1} = (2x+R)^n - R^n. \quad (67)$$

Si l'on remplace P en fonction de B dans l'expression de R , on a

$$R_n = B_n(1 - 2^{n-1}), \quad (68)$$

et, plus généralement,

$$f(z+R) = f(z+B) - \frac{1}{2}f(z+2B). \quad (69)$$

On trouve ainsi pour les nombres R les valeurs suivantes

$$R_0 = \frac{1}{2}, \quad R_1 = 0, \quad R_2 = -\frac{1}{6}, \quad R_4 = +\frac{7}{30}, \dots$$

21. Posons dans l'expression de T_{n-1} , l'égalité $y = 2x+1$, et remplaçons y par $y+1$, nous obtenons, par différence, la relation

$$ny^{n-1} = (y+R+1)^n - (y+R-1)^n, \quad (70)$$

et, plus généralement

$$f'(y) = f(y+R+1) - f(y+R-1). \quad (71)$$

Faisons, dans cette dernière, $y=0$, il vient

$$f'(0) = f(R+1) - f(R-1), \quad (72)$$

et pour les hypothèses successives $f(x) = e^{xz}$, $f(x) = \sin xz$, $f(x) = \cos xz$, il

vient

$$e^{Rz} = \frac{z}{e^z - e^{-z}}, \quad \cos Rz = \frac{z}{2} \operatorname{coséc} z, \quad \sin Rz = 0. \quad (73)$$

On aurait pu obtenir encore la seconde de ces formules par la relation

$$\operatorname{coséc} z = \frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{z}{2} + \frac{1}{2} \cot \frac{z}{2},$$

ou bien

$$\operatorname{coséc} z = -\frac{\cos Pz}{2z} + \frac{\cos Bz}{z} = \frac{2}{z} \cos Rz. \quad (74)$$

La convergence de ces diverses séries a lieu pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de z dont le module est inférieur à π (*).

22. On trouvera pour les nombres R un grand nombre de formules analogues à celles qui ont été données pour les nombres B et pour les nombres P ; nous indiquerons, particulièrement, les suivantes

$$\frac{(R+z+2)(R+z+4)\cdots(R+z+2n)}{(z+1)(z+3)\cdots(z+2n-1)} = \frac{z+2n+1}{2n+2} \left[\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+3} + \cdots + \frac{1}{z+2n+1} \right] \quad (75)$$

et, successivement, pour z égal à 0, +1, -1,

$$\left. \begin{aligned} \frac{R+2}{1} \cdot \frac{R+4}{3} \cdot \frac{R+6}{5} \cdots \frac{R+2n}{2n-1} \cdot \frac{2n+2}{2n+1} &= \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n+1}, \\ \frac{R+3}{2} \cdot \frac{R+5}{4} \cdot \frac{R+7}{6} \cdots \frac{R+2n+1}{2n} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n+2}, \\ (R+1)(R+3)(R+5)\cdots(R+2n-1) &= \frac{n}{n+1} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n. \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

23. On peut encore exprimer T_n en fonction du dernier terme $z=2x-1$, et on obtiendra la formule

$$2nT_{n-1} = (z+2B)^n - 2R_n, \quad (77)$$

dans laquelle on supposera $B_1 = +\frac{1}{2}$. Maintenant, si l'on fait dans la formule (28), les hypothèses

$$u_p = (2p-1)^m, \quad v_p = (2p-1)^n,$$

on obtient

$$T_m T_n + T_{m+n} = T^m \frac{(T+2B)^{n+1} - 2R^{n+1}}{2(n+1)} + T^n \frac{(T+2B)^{m+1} - 2R^{m+1}}{2(m+1)}, \quad (78)$$

(*) J. A. SERRET: *Traité de Trigonométrie*, 5^e édition, p. 265 et 312.

Annali di Matematica, tomo VIII.

et l'on exprime ainsi le produit $T_m T_n$ en fonction linéaire des sommes T . De plus, dans l'hypothèse $z=0$, $2_n T_{n-1}$ devient égal à P_n , et on obtient alors de nouvelles relations entre les nombres B et P , car les nombres R disparaissent de l'équation (78).

§ 6. De la somme des puissances alternées des nombres impairs.

24. Si l'on pose

$$\tau_n = -1^n + 3^n - 5^n + \dots + (4x-1)^n, \quad (79)$$

on a

$$2\tau_n = (4x+E)^n - E^n; \quad (80)$$

les nombres E sont déterminés par l'identité

$$2[(4x+3)^n - (4x+1)^n] = (4x+E+1)^n - (4x+E)^n, \quad (81)$$

obtenue en changeant x en $x+1$ dans la relations (80), et en prenant les différences des résultats. Si l'on pose $y=4x$, on a l'identité

$$2[(y+3)^n - (y+1)^n] = (y+E+1)^n - (y+E)^n, \quad (82)$$

qui a lieu, non seulement pour les valeurs entières de y égales à un multiple de 4, mais pour toutes les valeurs de y . On a, pour $y=-1$,

$$(E+2)^n - (E-2)^n = 2[1 - (-1)^n], \quad (83)$$

et, par conséquent, la relation

$$(E+2)^{2n} - (E-2)^{2n} = 0, \quad (84)$$

qui indique que E_{2n+1} est nul. Les premiers coefficients E , que Mr. SYLVESTER a désignés sous le nom de NOMBRES D'EULER (*), ont les valeurs suivantes:

$$E_0 = 1, \quad E_2 = -1, \quad E_4 = +5, \quad E_6 = -61, \quad E_8 = 1385, \quad E_{10} = -50521, \dots$$

25. La relation (82) donne aisément la relation plus générale

$$f(y+E+4) - f(y+E) = 2[f(y+3) - f(y+1)], \quad (85)$$

et, pour $y=0$,

$$f(E+4) - f(E) = 2[f(3) - f(1)]. \quad (86)$$

(*) Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 25, p. 161.

Si l'on pose, en particulier, $f(x)$ égale à e^{xz} , on obtient le développement

$$e^{xz} = \frac{2}{e^z + e^{-z}}, \quad (87)$$

qui reste convergent pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de z dont le module est inférieur à $\frac{\pi}{2}$. En changeant, dans cette formule, z en zi , i désignant $\sqrt{-1}$, on a encore,

$$\sec z = e^{Eiz}. \quad (88)$$

On déduit encore de la formule (87), l'identité

$$e^{Ez} e^z + e^{Ez} e^{-z} = 2;$$

donc, d'après le lemme 3, et pour n différent de zéro,

$$(E+1)^n + (E-1)^n = 0. \quad (89)$$

En donnant à n des valeurs paires, on en déduit que les nombres E sont entiers et impairs (*).

26. On peut démontrer aussi simplement que P_n est entier et impair. En effet, la formule (60) donne l'identité

$$e^{xz}(1+e^z) = -2z;$$

donc, d'après le lemme 3, et pour $n > 1$,

$$P^n + (P+1)^n = 0. \quad (90)$$

En supposant n pair et égal à $2q$, et les nombres P_n entiers et impairs, pour n inférieur à $2q$, on a la congruence

$$2P_{2q} + 2^q - 2 \equiv 0, \quad (\text{Mod. } 2),$$

puisque la somme des coefficients de rang impair dans la puissance $2q$ du binôme, est égal à $2^q - 2$, en exceptant les extrêmes. Cette congruence montre immédiatement que P_{2q} est aussi entier et impair.

27. Cette propriété de P_n entier et impair, peut-être généralisée de la manière suivante, et il est facile de démontrer que le nombre Q_n défini par la relation

$$Q_n = a(a^n - 1)B_n, \quad (91)$$

(*) E. CATALAN: *Sur les nombres de Bernoulli et d'Euler*. Mémoires de l'Académie de Belgique, t. 37, pag. 9 de l'Extrait.

est aussi un nombre entier, quel que soit l'entier a . On retrouve les résultats précédents dû à Mr. CATALAN, si a est égal à 2.

Mr. CLAUSEN et Mr. STAUDT ont, en effet, découvert en même temps cette expression

$$B_{2n} = A_{2n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma} \cdots - \frac{1}{\lambda}, \quad (92)$$

dans laquelle A_{2n} représente un nombre entier, et les dénominateurs $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$, tous les nombres premiers tels que $\alpha-1, \beta-1, \gamma-1, \dots, \lambda-1$, soient diviseurs de $2n$ (*).

Si l'on multiplie les deux membres de l'équation (92) par $a(a^{2n}-1)$, le premier membre devient égal à Q_{2n} ; chacune des fractions du second devient un nombre entier, car si $\alpha-1$ est un diviseur de $2n$, le binôme $a^{2n}-1$ est divisible par $a^{\alpha-1}-1$; et, si α est premier, le binôme $a(a^{\alpha-1}-1)$ est divisible par α , d'après le théorème de FERMAT.

On pourrait d'ailleurs donner de cette propriété de Q_n une autre démonstration, indépendante du théorème que nous venons de rappeler.

28. Mr. HERMITE a indiqué une méthode de calcul des nombres entiers A , que nous allons démontrer plus simplement, tout en la généralisant (**). Cette méthode conduit à la connaissance d'un grand nombre de fonctions numériques, venant se joindre à toutes celles dont la théorie des fonctions elliptiques a donné l'origine et les propriétés.

Désignons par $f(x)$ une fonction de degré $2n$

$$f(x) = a_0 x^{2n} + \frac{2n}{1} a_1 x^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2} a_2 x^{2n-2} + \dots,$$

dans laquelle les coefficients $a_0, a_1, a_2, \dots$ sont des nombres entiers, mais arbitraires, et posons

$$\varphi_r = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r} \left[\frac{d^r f(x+1)}{dx^r} - \frac{d^r f(x)}{dx^r} \right];$$

la formule (16) devient

$$f'(x) = B_0 \varphi_0 + B_1 \varphi_1 + B_2 \varphi_2 + B_4 \varphi_4 + \dots \quad (93)$$

(*) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 21, p. 372. — *Beweis eines Lehrsatzes, die Bernoullischen Zahlen betreffend.*

(**) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 81, p. 93. — *Extrait d'une lettre de Mr. Hermite à Mr. Borchardt.*

Si nous portons, dans cette équation, les valeurs successives des coefficients B données par le théorème de STAUDT, nous obtiendrons, en posant encore,

$$\Sigma_1 = A_0 \varphi_0 + A_1 \varphi_1 + A_2 \varphi_2 + A_4 \varphi_4 + \dots - f'(x), \quad (94)$$

et, pour p premier,

$$\Sigma_p = \frac{1}{p} [\varphi_{p-1} + \varphi_{2p-2} + \varphi_{3p-3} + \dots], \quad (95)$$

la formule suivante, pour le calcul des nombres A ,

$$\Sigma_1 = \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_5 + \Sigma_7 + \dots, \quad (96)$$

dans laquelle les Σ se rapportent à tous les nombres premiers jusqu'à $2n+1$.

Les termes qui forment Σ_p proviennent de ceux qui contiennent le facteur $\frac{1}{p}$, et par suite des nombres B dont l'indice est un multiple de $p-1$. Tous ces nombres sont évidemment entiers; car, d'une part, les fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ représentent des nombres entiers, pour des valeurs entières quelconques de x , et d'autre part, si la somme des fractions

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} + \dots + \frac{1}{\lambda},$$

est un nombre entier, lorsque $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ désignent des nombres premiers différents, les fractions qui forment cette somme, sont aussi des nombres entiers.

On retrouve les deux propositions de Mr. HERMITE, en supposant simplement $f(x) = (x+1)^{2n+1}$. On a, ainsi,

$$A_0 = A_2 = A_4 = A_6 = A_8 = A_{10} = A_{12} = 1, \quad A_{2n+1} = 0,$$

et

$$A_{14} = +2, \quad A_{16} = -6, \quad A_{18} = +56, \quad A_{20} = -518, \quad A_{22} = +6193, \\ A_{24} = -86579, \quad A_{26} = +1425518, \dots$$

§ 7. Relations mutuelles entre les nombres B, P, R, E , et les intégrales définies correspondantes.

23. Nous avons vu, précédemment, que si l'on pose

$$\left. \begin{aligned} 1^n + 2^n + 3^n + 4^n + \dots + (x-1)^n &= S_n, \\ 1^n - 2^n + 3^n - 4^n + \dots + (2x-1)^n &= \sigma_n, \\ 1^n + 3^n + 5^n + 7^n + \dots + (2x-1)^n &= T_n, \\ 1^n - 3^n + 5^n - 7^n + \dots - (4x-1)^n &= -\tau_n, \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

on a les formules symboliques

$$\left. \begin{aligned} {}^n S_{n-1} &= (x+B)^n - B^n, & 2n\sigma_{n-1} &= (2x+P)^n - P^n, \\ {}^n T_{n-1} &= (2x+R)^n - R^n, & 2\tau_n &= (4x+E)^n - E^n, \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

dans lesquelles on remplace les exposants de B, P, R, E , après le développement, par des indices. On a, d'ailleurs, pour déterminer ces coefficients, les relations de récurrence

$$\left. \begin{aligned} f(x+B+1) - f(x+B) &= f'(x), \\ f(x+P+2) - f(x+P) &= 2f'(x) - 2f'(x+1), \\ f(x+R+2) - f(x+R) &= f'(x+1), \\ f(x+E+4) - f(x+E) &= 2f(x+3) - 2f(x+1). \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

Ces coefficients proviennent encore de la somme des inverses des puissances, semblables ou alternées, de tous les nombres entiers, ou de tous les nombres impairs. On a, en effet,

$$\left. \begin{aligned} S_{-2n} &= \frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \dots = \frac{2^{2n-1} \tau_{2n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n)} (-1)^{n-1} B_{2n}, \\ T_{-2n} &= \frac{1}{1^{2n}} - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{4^{2n}} + \dots = \frac{\tau_{2n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n)} R_{2n}, \\ \sigma_{-2n} &= \frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \dots = \frac{1}{4} \frac{\tau_{2n}}{1 \cdot 2 \dots (2n)} (-1)^n P_{2n}, \\ \tau_{-2n} &= \frac{1}{1^{2n}} - \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} - \frac{1}{7^{2n}} + \dots = \frac{1}{2^{2n+2}} \frac{\tau_{2n+1}}{1 \cdot 2 \dots (2n)} (-1)^n E_{2n}. \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

Les relations de récurrence qui précèdent, et dans lesquelles f désigne une fonction quelconque, donnent les développements

$$\left. \begin{aligned} \cos Bz &= \frac{z}{2} \cotg \frac{z}{2}, \\ \cos Pz &= -z \tangent \frac{z}{2}, \\ \cos Rz &= \frac{z}{2} \operatorname{cosec} z, \\ \cos Ez &= \operatorname{sec} z, \end{aligned} \right\} \quad (101) \quad \text{et} \quad \left. \begin{aligned} e^{Bz} &= \frac{z}{e^z - 1}, \\ e^{Pz} &= -\frac{2z}{e^z + 1}, \\ e^{Rz} &= \frac{z}{e^z - e^{-z}}, \\ e^{Ez} &= \frac{2}{e^z + e^{-z}}, \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

dont on connaît les conditions de convergence. Ces développements donnent lieu, au moyen du calcul des résidus, aux expressions de B , P , R , E , par des intégrales définies prises entre les limites 0 et ∞ , ou 0 et 2π , et conduisent à des formules analogues aux formules

$$B_{2n} = \int_0^\infty \frac{t^{2n-1} dt}{e^{2\pi t} - 1}, \quad \text{et} \quad E_{2n} = \pm 2^{2n+2} \int_0^\infty \frac{t^{2n} dt}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}, \quad (103)$$

données par PLANA, et Mr. CATALAN, pour les nombres B et E .

Par conséquent, si l'on profite des relations qui existent entre les fonctions circulaires, ou entre les fonctions hyperboliques correspondantes, en obtient un grand nombre de formules nouvelles contenant, en même temps, ces coefficients, ou les intégrales définies dont nous venons de parler.