**IV. Experimentelle Bestimmung
von Lichtgeschwindigkeiten in Krystallen.
Zweite Mittheilung: Schiefe Schnitte in zwei-
axigen Krystallen; von W. Kohlrausch.**

In einer frühern Arbeit¹⁾ habe ich die Fresnel'sche Theorie der Lichtbrechung für optisch einaxige Krystalle allgemein und für die drei Hauptschnitte zweiaxiger Krystalle experimentell geprüft. Es sollen jetzt auch für zwei schiefe Schnitte eines Weinsäurekrystalles, deren Wellencurven damals nur graphisch²⁾ mitgetheilt wurden, die Beobachtungen mit der Theorie verglichen werden.

Die in Frage stehenden Schnitte sind beide nahezu senkrecht auf der Ebene der optischen Axen, also dem gewöhnlich sogenannten ersten Hauptschnitte. Ferner ist der eine Schnitt annähernd senkrecht, der andere parallel zu einer optischen Axe.

Zur bequemern Uebersicht des Folgenden wolle man im Auge behalten, dass die Weinsäure ein optisch positiver Krystall ist. Es enthält also die Halbirungslinie des spitzen Winkels der optischen Axen (die erste Mittellinie) die mittlere und die grösste Lichtgeschwindigkeit b und a , die Halbirungslinie des stumpfen Winkels der optischen Axen (die zweite Mittellinie) die mittlere und die kleinste Lichtgeschwindigkeit b und c , die Senkrechte auf der Ebene der optischen Axen die grösste und die kleinste a und c . Ich nenne, wohl dem gewöhnlichen Gebrauche entsprechend, die letztere Ebene ersten Hauptschnitt — er enthält den Kreis $v = b$ und das Oval mit den Halbaxen a und c ; — zweiten Hauptschnitt die Ebene, die den grössten Kreis und das kleinste Oval enthält und hier senkrecht auf der zweiten Mittellinie steht; dritten Hauptschnitt denjenigen mit kleinstem Kreise und grösstem Ovale, hier senkrecht auf der ersten Mittellinie.

1) Wied. Ann. VI. p. 86. 1879.

2) l. c. p. 109.

Wie in der frühern Arbeit, sei die erste Mittellinie als *Z*-Axe, die zweite als *X*-Axe, die auf der optischen Axenebene Senkrechte als *Y*-Axe angenommen. Da die Curven mit inconstantem Radius in den Hauptschnitten zweiaxiger Krystalle wie die des ersten Hauptschnittes in einaxigen Krystallen Ovale sind, so ergibt sich der Winkel χ , welchen die Schnittlinie unserer Beobachtungsebene und des ersten Hauptschnittes mit der *X*-Axe einschliesst, nach derselben Formel wie der Winkel ϑ auf p. 91 l. c. Der in den ersten Hauptschnitt fallende Radiusvector der einer Schlieffläche zukommenden Wellencurve, d. h. der grösste der innern, der kleinste der äussern Schnittcurve, wurde wie l. c. p. 99 beschrieben ermittelt. Von ihm aus werde der Winkel ψ , der die Lage der Radiivectoren in der Schlieffläche bestimmt, gezählt.

Würden nun die Schlieffebenen genau senkrecht auf dem ersten Hauptschnitte stehen, so müsste dem grössten Radiusvector der äussern und dem kleinsten der innern Curve derselbe Winkel $\psi = 90^\circ$ zukommen. Das ist nun bei keinem der beiden Schnitte der Fall. Aus dem Unterschiede σ von ψ für beide lässt sich jedoch die Lage des Schnittes bestimmen, denn es liegt das Maximum der äussern Curve auf dem Kreise $v = a$ des zweiten Hauptschnittes, das Minimum der innern Curve auf dem Kreise $v = c$ des dritten Hauptschnittes. Also ist aus dem Winkel σ , den die erwähnten Maxima und Minima einschliessen, und aus dem Winkel χ die Lage der Schlieffläche zu den drei Coordinatenaxen zu ermitteln, und aus ihr sind mit Hülfe von ψ die Richtungscosinus $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ einer jeden Beobachtungsrichtung zu berechnen.

Haben nämlich σ und χ die erwähnte Bedeutung, ist ω der Winkel, den der Radiusvector $\psi = 90^\circ$ einschliesst mit der Schnittlinie von Schlieffläche und zweitem Hauptschnitte, so ist:

$$\cos \omega = \frac{\sin \psi}{\sin \chi}$$

der Cosinus des Winkels, den dieselbe Schnittlinie mit der *Z*-Axe einschliesst. Sind ferner α und β die Winkel zwischen Schlißfläche und zweitem bezüglich erstem Hauptschnitte, so ist:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \sigma \operatorname{tg} \omega}, \quad \cos \beta = \cos \omega \sin \alpha.$$

Daraus ergibt sich der Winkel ε , den die Projection eines Radiusvectors $\psi = \psi$ auf den ersten Hauptschnitt einschliesst mit dem Radiusvector $\psi = 0$, aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \cos \beta \operatorname{tg} \psi,$$

und schliesslich sind:

$$\cos \alpha = \frac{\cos (\chi + \varepsilon) \cos \psi}{\cos \varepsilon},$$

$$\cos \gamma = \frac{\sin (\chi + \varepsilon) \cos \psi}{\cos \varepsilon},$$

wodurch auch β gegeben ist. Somit ist die Lage jedes einzelnen Radiusvectors in seiner Schlißebene und in der Wellenfläche bestimmt.

Es handelt sich demnächst darum, wie der Radiusvector aus diesen Richtungscosinus am einfachsten zu berechnen ist. Ebenso wie der l. c. p. 110 angedeutete Weg, führt auch einerseits die Berechnung mit Hülfe des Constructionsellipsoides, andererseits die Auflösung der Wellenflächengleichung nach v und Bestimmung der Wurzeln auf directem Wege oder durch die Gräfe'sche Näherungsmethode auf sehr weitschweifige numerische Rechnungen. Es wurde deshalb folgender Weg zur Berechnung von v eingeschlagen. Jeder Radiusvector mit seinen Richtungscosinus wird in die Gleichung der Wellenfläche:

$$\frac{x^2}{v^2 - a^2} + \frac{y^2}{v^2 - b^2} + \frac{z^2}{v^2 - c^2} = 0,$$

oder einfacher in:

$$\frac{\cos^2 \alpha}{v^2 - a^2} + \frac{\cos^2 \beta}{v^2 - b^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{v^2 - c^2} = 0$$

eingesetzt, so ergibt sich im allgemeinen, dem Beobachtungsfehler in v entsprechend, ein von Null verschiedener Werth Δf , aus welchem sich durch Differentiation der letzten Gleichung nach v der Fehler Δv ergibt als:

$$\Delta v = - \frac{\Delta f}{2v \left[\frac{\cos^2 \alpha}{(v^2 - a^2)^2} + \frac{\cos^2 \beta}{(v^2 - b^2)^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{(v^2 - c^2)^2} \right]}.$$

Durch Anbringung dieser Correction am beobachteten Radiusvector findet sich dann das für die Wellenfläche aus $\alpha\beta\gamma$ berechnete v .

Es zeigte sich nun, dass weder für die dem berechneten χ entsprechende Ebene, noch für irgend eine andere benachbarte Ebene genügende Uebereinstimmung aller beobachteten mit den berechneten Radiivectoren stattfand, d. h. dass wenn die Fresnel'sche Theorie der Wirklichkeit entspricht, an der Schliffebene Lichtgeschwindigkeiten beobachtet wurden, die nicht alle in dieser Ebene liegen. Es fragt sich also zunächst: was messen wir bei unserer Beobachtungsmethode an schiefen Schnitten?

Aus den Berechnungen der genannten ersten Arbeit geht hervor, dass die in den Hauptschnitten beobachteten Lichtgeschwindigkeiten Wellennormalen sind, d. h. Radiivectoren derjenigen Fläche, die gebildet wird von den Endpunkten sämmtlicher auf die Wellenebenen vom Erregungsmittelpunkte aus gefälltten Normalen, und dass dieselben zugleich in der Beobachtungsrichtung selbst in der Wellenfläche vorhanden sind. Soeben wurde aber bemerkt, dass gerade letzteres bei den schiefen Schnitten nicht der Fall ist.

Nun liegt in den Hauptschnitten der specielle Fall vor, dass die Wellennormale und der ihr zugehörige Strahl¹⁾, die miteinander den Winkel δ bilden, beide in der Beob-

1) Unter Strahl die Gerade verstanden, welche den Schnittpunkt unendlich benachbarter Wellenebenen mit dem Schnittpunkte derselben Ebenen verbindet, nachdem sie sich eine gegebene Zeit hindurch fortgeschoben haben.

achtungsebene liegen, während die den Strahlen der schiefen Schnitte zugehörigen Wellennormalen im allgemeinen ausserhalb derselben liegen. Da also die beobachteten Lichtgeschwindigkeiten weder als Strahlen noch als Wellennormalen in den untersuchten schiefen Schnitten vorhanden sind, so liegt die Vermuthung nahe, dass sie die Wellennormalen zu den in der Beobachtungsebene gelegenen Strahlen sind, aber beobachtet in einer Richtung, welche man durch Projection der beobachteten Normalen auf die Beobachtungsebene erhält; nur dann ist es verständlich, dass bei den Hauptschnitten der Winkel δ keine Rolle spielt, denn für diese fällt die Wellennormale mit ihrer Projection auf die Beobachtungsebene zusammen.

Nennen wir demnach die im Vorigen aus $\alpha \beta \gamma$ berechneten Radiivectoren v_s , die beobachteten Lichtgeschwindigkeiten v_n und lassen letzteren die Richtungs cosinus $\cos \alpha_n$, $\cos \beta_n$, $\cos \gamma_n$ zukommen. Es seien ferner $x y z$ die Coordinaten des Punktes, in dem die Wellennormale v_n die Wellenfläche trifft, $\xi \eta \zeta$ die Coordinaten des Schnittpunktes von Wellenebene und zugehörigem Strahle, so ist:

$$\operatorname{tg}^2 \delta = \frac{R^2}{v^2},$$

wenn R der Abstand des Punktes $x y z$ von $\xi \eta \zeta$, d. h. wenn:

$$R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 \text{ ist.}$$

Da nun, wie bekannt, die Gleichungen bestehen:

$$(x - \xi)^2 = \frac{x^2}{(v^2 - a^2)^2} R^4 \text{ u. s. w.,}$$

so kann auch gesetzt werden:

$$R^2 = \frac{1}{\frac{x^2}{(v^2 - a^2)^2} + \frac{y^2}{(v^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(v^2 - c^2)^2}}.$$

Der Strahl $\xi \eta \zeta$ liege in unserer Beobachtungsebene, P sei die Normale vom Punkte $x y z$ auf diese Ebene, R und P mögen mit der X - Y - Z -Axe bezüglich die Winkel u v w und p q r bilden, a' b' c' seien die Projectionen von R auf die YZ -, ZX - und XY -Ebene und θ der Winkel

zwischen der Normalen v_n und ihrer Projection auf die Beobachtungsebene. Dann ist:

$$\sin^2 u = \frac{a'^2}{R^2} = \frac{(y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}{R^2} = \frac{\frac{y^2}{(v^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(v^2 - c^2)^2}}{\frac{x^2}{(v^2 - a^2)^2} + \frac{y^2}{(v^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(v^2 - c^2)^2}},$$

und analog finden sich $\sin v$ und $\sin w$.

Da nun ferner hinreichend nahe:

$$p = 90^\circ - \chi; \quad q = 90^\circ; \quad r = \chi$$

ist, so ist der Winkel zwischen R und P gegeben durch die Gleichung:

$$\cos(\widehat{RP}) = \cos u \sin \chi + \cos w \cos \chi.$$

Ohne die Grenzen der verlangten Genauigkeit zu überschreiten, dürfen wir, da δ meist kleiner als 2° ist, den Werth von 4° aber nie überschreitet, setzen:

$$\delta : \Theta = R : P = 1 : \cos(\widehat{RP}).$$

Somit ergibt sich der in Frage kommende Winkel Θ , den die beobachtete Wellennormale mit der Beobachtungsebene einschliesst, durch die Beziehung:

$$\Theta = \delta \cos(\widehat{RP}).$$

Es wurde demnach der in der Projection der Normale auf die Beobachtungsebene gelegene Radiusvector v_s nach der p. 430 angegebenen Methode berechnet, und statt mit Hülfe von $\alpha\beta\gamma$ und Θ die gesuchte Wellennormale v_n aus ihren Richtungscosinus $\cos \alpha_n \dots$ und der Wellenflächengleichung ebenso zu ermitteln, mit, wie die Ausrechnung und Vergleichung für einzelne Radiivectoren ergab, genügender Genauigkeit v_s multiplicirt mit $\cos \Theta$, der beobachteten Wellennormale v_n gleichgesetzt. Dabei wurde in der Berechnung von Θ auch unbedenklich davon abgesehen, dass die $\alpha\beta\gamma$ nicht streng genommen auch für v_n gelten, und dass der Winkel Θ für einen Radiusvector gilt, dem statt des Winkels ψ in der Beobachtungsebene der Winkel $\psi + \chi$ zukommt, wo:

$$\sin \chi = \sin \delta \sin(\widehat{RP})$$

ist, denn α ist klein, solange Θ verhältnissmässig wesentlich von der Einheit verschieden ist.

Die Methode der Berechnung von v_s hat den einen Uebelstand, dass, sobald v_n sehr nahe gleich a , b oder c wird, und zugleich bezüglich $\cos^2 \alpha$, $\cos^2 \beta$, $\cos^2 \gamma$ sehr klein werden, ein unbedeutender Fehler von v_n bedeutende Ungenauigkeit der Berechnung hervorrufen kann. Es wurde in diesen Fällen stets das berechnete v_s noch einmal in die Gleichung der Wellenfläche eingesetzt und zwischen den beiden Werthen von Δf für $\Delta f = 0$ interpolirt.

In den folgenden Tabellen sind Beobachtung und Berechnung zusammengestellt, und es enthält die erste Spalte die laufende Nummer der Beobachtung, die zweite den

Weinsäure $\perp$ Axe									
Nr.	ψ	Innere Curve					Aeussere Curve		
		Radiivectoren		Fehler in $\frac{1}{10}$	Rad. in d. Beob. eb.	Radiivectoren		Fehler in $\frac{1}{10}$	
		beob.	ber.			beob.	ber.		
1	85,59	6,2310	6,2306	+ 0,006	6,2306	6,6893	6,6893	$\pm 0,000$	
2	84,66	6,2319	6,2309	+ 16	6,2311	6,6893	6,6892	+ 02	
3	74,41	6,2389	6,2386	+ 05	6,2391	6,6816	6,6827	— 16	
4	64,16	6,2530	6,2522	+ 13	6,2535	6,6702	6,6694	+ 12	
5	53,91	6,2702	6,2719	— 27	6,2739	6,6510	6,6504	+ 09	
6	44,41	6,2938	6,2945	— 01	6,2979	6,6280	6,6278	+ 03	
7	33,66	6,3228	6,3239	— 18	6,3291	6,5977	6,5980	— 05	
8	24,66	6,3499	6,3501	— 03	6,3572	6,5714	6,5706	+ 12	
9	14,66	6,3776	6,3771	+ 08	6,3874	6,5409	6,5411	— 03	
10	3,66	6,3948	6,3954	— 10	6,4098	6,5169	6,5174	— 08	
11	5,34	6,3934	6,3935	— 02	6,4073	6,5193	6,5199	— 09	
12	15,19	6,3743	6,3744	— 02	6,3845	6,5417	6,5420	— 05	
13	25,09	6,3475	6,3469	+ 10	6,3540	6,5698	6,5713	— 23	
14	35,09	6,3189	6,3177	+ 19	6,3227	6,6016	6,6012	+ 06	
15	45,34	6,2904	6,2900	+ 02	6,2934	6,6284	6,6291	— 11	
16	55,34	6,2679	6,2670	+ 14	6,2690	6,6527	6,6523	+ 06	
17	65,19	6,2501	6,2490	+ 18	6,2502	6,6698	6,6701	— 04	
18	75,46	6,2378	6,2365	+ 21	6,2369	6,6833	6,6829	+ 06	
19	85,84	6,2319	6,2306	+ 0,021	6,2306	6,6897	6,6892	+ 0,007	

$$\chi = 38,48^0, \quad \sigma = 0,9^0, \quad w = 0,3^0, \quad b = 89,59^0.$$

Weinsäure in Axe							
Nr.	ψ	Innere Curve			Äussere Curve		
		Radiivectoren		Fehler in ‰	Radiivectoren		Fehler in ‰
		beob.	ber.		beob.	ber.	
1	2,12	6,5006	6,4992	+ 0,012	6,5203	6,5230	- 0,042
2	3,38	6,4970	6,4990	- 31	6,5272	6,5277	- 08
3	8,13	6,4784	6,4805	- 33	6,5442	6,5450	- 12
4	18,13	6,4390	6,4402	- 19	6,5782	6,5798	- 25
5	28,38	6,3997	6,3965	+ 50	6,6103	6,6106	- 05
6	38,38	6,3589	6,3560	+ 46	6,6347	6,6356	- 14
7	48,13	6,3214	6,3186	+ 46	6,6547	6,6553	- 09
8	58,38	6,2877	6,2837	+ 64	6,6695	6,6719	- 36
9	67,88	6,2615	6,2573	+ 67	6,6833	6,6818	+ 22
10	78,13	6,2438	6,2395	+ 69	6,6888	6,6883	+ 08
11	88,13	6,2345	6,2303	+ 68	6,6905	6,6900	+ 08
12	81,87	—	—	—	6,6896	6,6892	+ 06
13	72,62	6,2460	6,2437	+ 37	6,6821	6,6827	- 09
14	61,87	6,2669	6,2673	- 06	6,6721	6,6719	+ 03
15	52,12	6,2984	6,2978	+ 10	6,6567	6,6580	- 20
16	41,72	6,3368	6,3372	- 06	6,6396	6,6387	+ 14
17	32,57	6,3741	6,3740	+ 02	6,6162	6,6176	- 21
18	22,07	6,4195	6,4198	- 05	6,5857	6,5890	- 60
19	12,37	6,4606	6,4617	- 17	6,5569	6,5586	- 26
20	7,17	6,4832	6,4837	- 08	6,5390	6,5413	- 35
21	1,97	6,4994	6,4996	- 03	6,5218	6,5221	- 05
22	0,38	6,5034	6,5037	- 05	6,5160	6,5160	$\pm 0,000$

$$\chi = 51,95^{\circ}, \quad \sigma = 3,10^{\circ}, \quad w = 1,22^{\circ}, \quad b = 88,66^{\circ}.$$

Winkel ψ , der für innere und äussere Curve gemeinsam gilt. Für die innere sowohl wie für die äussere Curve gibt die erste und zweite Spalte die beobachteten und die berechneten Radiivectoren, die dritte den Fehler der beobachteten gegen die berechneten Werthe, in Procenten derselben ausgedrückt.

Um die Grösse der Abweichung der für die Beobachtungsebene selbst berechneten Radiivectoren von den beobachteten zu zeigen, sind in der Tabelle „Weinsäure $\perp$ Axe“ in der vierten Spalte der innern Curve die ersten Werthe angeführt. Unter jeder Tabelle sind die die

Lage des Schnittes bestimmenden Winkel χ , σ , w und b angegeben.

Bei Nr. 11 der Tabelle „Weinsäure in Axe“ und Nr. 19 der Tabelle „Weinsäure $\perp$ Axe“ wurde v_s , da bei ψ nahezu gleich 90° die Rechnungsmethode keine brauchbaren Resultate lieferte, aus den bekannten Radiivectoren des zweiten und dritten Hauptschnittes interpolirt. Bei „Weinsäure in Axe“ innere Curve Nr. 12 ist wahrscheinlich ein Beobachtungsfehler untergelaufen, da der beobachtete Radiusvector unmöglich an dieser Stelle liegen kann.

Vergleichen wir schliesslich die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Berechnung für die schiefen Schnitte mit der für die Hauptschnitte, so ergab sich bei letzteren ein wahrscheinlicher Fehler von $0,02\%$, während er sich hier zu $0,017\%$ berechnet.

Das Resultat der Messungen lässt sich demnach dahin zusammenfassen, dass auf Grund der vorstehenden Ueberlegungen und Rechnungen, von denen die der ersten Mittheilung specielle und einfachere Fälle waren, auch für die schiefen Schnitte optisch zweiaxiger Krystalle die Fresnel'sche Theorie der Lichtbewegung in Krystallen mit der Beobachtung durchweg in Einklang gefunden wurde.

Strassburg i/E., März 1879.

V. Ueber das Wärmeleitungsvermögen der Flüssigkeiten; von W. Beetz.

Die Ergebnisse der Untersuchungen, welche bisher mit grossem Aufwande von Sorgfalt über das Wärmeleitungsvermögen der Flüssigkeiten angestellt worden sind ¹⁾,

1) Pogg. Ann. CXXXIV. p. 618. 1868. Phil. Mag. (4) XXXV. p. 283 u. XXXVII. p. 468. 1868 u. 69. Phil. Trans. CLIX. 2. p. 637. 1870. Lundquist, Undersökning af några vätskors lednings-