Über partielle Integration.

Von

N. J. Hatzidakis in Athen.

1. Die von Herrn M. Brendel (*Math. Annalen* Bd. LV, S. 248—256) hergeleitete Verallgemeinerung der fälschlich als „*partielle Integration*“ bezeichneten Integration eines Produktes (die eigentlich nur eine „*Faktoren-integration*“ oder „*Integration nach Faktoren*“ genannt werden soll*)) ist mit Fug und Recht die *partielle* Integration zu nennen. Diese partielle Integration läßt sich leicht auf eine Funktion von beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen $u_1, u_2, \cdots, u_n$ übertragen.

2. Ich möchte aber zuerst das Verhalten von Herrn Brendel in ein wenig verschiedenen, meines Erachtens zweckmäßigeren Bezeichnungen kurz andeuten: Es seien u, v zwei beliebige Funktionen von x und $f(u, v)$ eine ebenfalls willkürliche Funktion; dann ist:

$$df(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv,$$

mithin:

$$\frac{\partial f}{\partial u} du = df(u, v) - \frac{\partial f}{\partial v} dv,$$

woraus durch Integration folgt:

$$(\alpha) \qquad \int \frac{\partial f}{\partial u} du = f(u, v) - \int \frac{\partial f}{\partial v} dv;$$

wir setzen nun $\frac{\partial f}{\partial u} \equiv \Phi(u, v)$; dann ist offenbar:

$$\int \frac{\partial f}{\partial u} du \equiv \int \Phi(u, v)\, du, \quad \text{und:} \quad f = \int \textit{nach } u \text{ von } \Phi(u, v);$$

Dieses *partielle* Integral *nach* u ist, was Herr Brendel (*loc. cit.*) mit $\int'$ angedeutet hat, wofür er aber doch ein definitives, dem ∂ der partiellen Differentiation entsprechendes Zeichen verlangt (Math. Annalen Bd. LV, 4. H.).

*) Es mag hier beiläufig erwähnt werden, daß wir Neugriechen diese Benennung schon längst in Gebrauch haben (Ὁλοκλήρωσις κατὰ παράγοντας).

Ich glaube, daß das geeignetste Zeichen dafür folgendes wäre: $\reflectbox{$\displaystyle\int$}_u$, nämlich dasselbe Integralzeichen, nach links hin umgedreht (wie auch ∂ das d, nach links hin gebeugt ist) und mit dem Index u versehen, zur Andeutung der Variablen, nach der man partiell integriert. Dieses Zeichen hat zugleich den Vorteil, daß es den Unterschied zwischen *partieller* und *totaler* Integration scharf hervorhebt. Demgemäß schreibe ich:

$$f \equiv \reflectbox{$\displaystyle\int$}_u \Phi(u, v)\, du;$$

nun ist also auch:

$$\frac{\partial f}{\partial v} \equiv \frac{\partial}{\partial v}\left(\reflectbox{$\displaystyle\int$}_u \Phi(u, v)\, du\right);$$

es läßt sich mithin die Formel (α), welche die von Herrn Brendel ist*), in folgender, klarer Form schreiben:

$$\int \Phi(u, v)\, du = \reflectbox{$\displaystyle\int$}_u \Phi(u, v)\, du - \int \frac{\partial}{\partial v}\left(\reflectbox{$\displaystyle\int$}_u \Phi(u, v)\, du\right) dv. \tag{1}$$

Setzt man darin $\Phi(u, v) \equiv v$, so bekommt man gleich die *Faktorenintegration:*

$$\int v\, du = vu - \int u\, dv.$$

Setzt man dagegen $u \equiv x$, so wird:

$$\int \Phi(x, v)\, dx = \reflectbox{$\displaystyle\int$}_x \Phi(x, v)\, dx - \int \frac{\partial}{\partial v}\left(\reflectbox{$\displaystyle\int$}_x \Phi\, dx\right)\frac{dv}{dx}\, dx, \tag{1'}$$

3. Es ist nun offenbar klar, daß sich die Brendelsche Formel (1) auch auf eine beliebige Anzahl von Veränderlichen übertragen läßt. Denn ist $f(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ vorgelegt und sind $u_1, u_2, \cdots, u_n$ Funktionen von x, dann ist:

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 = df - \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2 - \cdots - \frac{\partial f}{\partial u_n} du_n,$$

mithin

$$\int \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 = f - \int \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2 - \cdots - \int \frac{\partial f}{\partial u_n} du_n; \tag{β}$$

Setzt man nun wieder:

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} \equiv \Phi(u_1, u_2, \cdots, u_n),$$

so wird:

$$f = \reflectbox{$\displaystyle\int$}_{u_1} \Phi\, du_1$$

---

*) Es mag erwähnt werden, daß, außer Worpitzky und Scheibner, auch Bertrand in seinem „*Calcul Intégral*", bereits 1870, diese Formel hat, allerdings in einer anderen Form und ganz anders bewiesen (S. 10—11).

und die Formel (β) nimmt die Form an:

$$(2)\qquad \int \Phi(u_1,\, u_2,\, \cdots,\, u_n)\, d u_1 = \reflectbox{$\int$}_{u_1} \Phi\, d u_1 - \sum_{k=2}^{k=n} \int \frac{\partial}{\partial u_k} \left(\reflectbox{$\int$}_{u_1} \Phi\, d u_1 \right) d u_k .$$

Setzt man speziell:

$$\Phi = u_2 \cdot u_3 \cdots u_n ,$$

so wird die *Faktorenintegration für n Faktoren* gefunden:

$$(2')\qquad \int (u_2 \cdot u_3 \cdots u_n)\, d u_1 = u_1 \cdot u_2 \cdots u_n - \sum_{k=2}^{k=n} \int (u_1 \cdot u_2 \cdots u_{k-1} \cdot u_{k+1} \cdots u_n)\, d u_k .$$

Athen, den 13. April 1902.