Sur une forme générale des équations de la dynamique.

(Par M. *Paul Appell* à St. Germain-en-Laye.)

1.

Les équations de *Lagrange* ne sont pas applicables quand certaines liaisons s'expriment par des relations différentielles non intégrables, ou quand on introduit des paramètres liés aux coordonnées par des relations différentielles non intégrables. Cette difficulté a fait l'objet de recherches diverses dont on trouvera une bibliographie détaillée dans un opuscule intitulé „*Les mouvements de roulement en dynamique*" que nous venons de publier dans la collection *Scientia* (Carré et Naud, Editeurs).

Nous nous proposons d'indiquer ici une forme générale des équations du mouvement non soumise aux exceptions que nous venons d'énoncer. Pour écrire les équations sous cette nouvelle forme, il suffit de calculer la fonction

$$S = \tfrac{1}{2} \Sigma m J^2,$$

où m désigne la masse d'un quelconque des points du système et J l'accélération absolue de ce point: on voit que cette fonction S est composée avec les accélérations comme la demi-force vive l'est avec les vitesses.

Nous avons indiqué le principe de la méthode que nous suivons ici dans une Note insérée aux Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris le 7. août 1899.

2.

Imaginons un système assujetti à des liaisons telles que pour obtenir le déplacement virtuel le plus général compatible avec les liaisons à l'instant t, il suffise de faire subir à n paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_n$ des variations arbitraires $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$. Si nous appelons alors x, y, z les coordonnées d'un quelconque des points du système par rapport à des axes fixes, le déplacement virtuel de ce point a pour projections sur les axes:

$$(1.)\qquad \begin{cases} \delta x = a_1 \delta q_1 + a_2 \delta q_2 + \cdots + a_n \delta q_n, \\ \delta y = b_1 \delta q_1 + b_2 \delta q_2 + \cdots + b_n \delta q_n, \\ \delta z = c_1 \delta q_1 + c_2 \delta q_2 + \cdots + c_n \delta q_n, \end{cases}$$

où $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$ sont arbitraires: dans ces formules, les coefficients a_1, $a_2, \ldots, c_n$ peuvent dépendre du temps t, des paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et *d'autres paramètres* $q_{n+1}, q_{n+2}, \ldots, q_{n+p}$ dont les variations sont liées à celles de $q_1, q_2, \ldots, q_n$ par des relations de la forme

$$(2.)\quad \begin{cases} \delta q_{n+1} = \alpha_1\ \delta q_1 + \alpha_2\ \delta q_2 + \cdots + \alpha_n \delta q_n, \\ \delta q_{n+2} = \beta_1\ \delta q_1 + \beta_2\ \delta q_2 + \cdots + \beta_n \delta q_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \delta q_{n+p} = \lambda_1\ \delta q_1 + \lambda_2\ \delta q_2 + \cdots + \lambda_n \delta q_n, \end{cases}$$

les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \lambda_n$ dépendant également de t et de l'ensemble des paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{n+1}, \ldots, q_{n+p}$. Dans ces conditions, le déplacement réel du système pendant le temps dt est défini par des relations de la forme

$$(3.)\quad \begin{cases} dx = a_1 dq_1 + a_2 dq_2 + \cdots + a_n dq_n + a\,dt, \\ dy = b_1 dq_1 + b_2 dq_2 + \cdots + b_n dq_n + b\,dt, \\ dz = c_1 dq_1 + c_2 dq_2 + \cdots + c_n dq_n + c\,dt, \end{cases}$$

avec

$$(4.)\quad \begin{cases} dq_{n+1} = \alpha_1 dq_1 + \alpha_2 dq_2 + \cdots + \alpha_n dq_n + \alpha\,dt, \\ dq_{n+2} = \beta_1 dq_1 + \beta_2 dq_2 + \cdots + \beta_n dq_n + \beta\,dt, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ dq_{n+p} = \lambda_1 dq_1 + \lambda_2 dq_2 + \cdots + \lambda_n dq_n + \lambda\,dt, \end{cases}$$

où les coefficients $a, b, c, \alpha, \beta, \ldots, \lambda$, peuvent dépendre de t, $q_1, q_2, \ldots, q_{n+p}$.

„On peut alors obtenir les équations du mouvement comme il suit.

„L'équation générale de la Dynamique déduite du principe de *d'Alembert* et du principe du travail virtuel, est

$$(5.)\quad \Sigma m(x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z) = \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$$

où x'', y'', z'' sont les dérivées deuxièmes des coordonnées par rapport au temps, et X, Y, Z les projections d'une quelconque des forces.

„Cette équation doit avoir lieu pour tous les déplacements (1.) compatibles avec les liaisons: elle se décompose donc dans les n équations suivantes:

$$(6.)\quad \begin{cases} \Sigma m(x''a_1 + y''b_1 + z''c_1) = \Sigma(Xa_1 + Yb_1 + Zc_1), \\ \Sigma m(x''a_2 + y''b_2 + z''c_2) = \Sigma(Xa_2 + Yb_2 + Zc_2), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Sigma m(x''a_n + y''b_n + z''c_n) = \Sigma(Xa_n + Yb_n + Zc_n). \end{cases}$$

Dans ces équations les deuxièmes membres se calculent comme dans les équations de *Lagrange*. En remplaçant δx, δy, δz par leurs valeurs (1.) on a, pour la somme des travaux virtuels des forces appliquées:

$$\Sigma(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z) = Q_1\delta q_1+Q_2\delta q_2+\cdots+Q_n\delta q_n.$$

Les quantités Q_1, Q_2, ..., Q_n sont les deuxièmes membres des équations (6.):

$$Q_1 = \Sigma(Xa_1+Yb_1+Zc_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Pour calculer les premiers membres, divisons par dt les relations (3.) définissant le déplacement réel et désignons par x', y', z', q'_1, q'_2, ..., q'_n les dérivées totales $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dq_1}{dt}$, $\frac{dq_2}{dt}$, ..., $\frac{dq_n}{dt}$. Nous aurons

$$\begin{aligned} x' &= a_1q'_1+a_2q'_2+\cdots+a_nq'_n+a,\\ y' &= b_1q'_1+b_2q'_2+\cdots+b_nq'_n+b,\\ z' &= c_1q'_1+c_2q'_2+\cdots+c_nq'_n+c. \end{aligned}$$

Prenant encore une fois les dérivées totales des deux membres par rapport à t, on a

$$(7.)\qquad \begin{cases} x'' = a_1q''_1+a_2q''_2+\cdots+a_nq''_n+\cdots,\\ y'' = b_1q''_1+b_2q''_2+\cdots+b_nq''_n+\cdots,\\ z'' = c_1q''_1+c_2q''_2+\cdots+c_nq''_n+\cdots, \end{cases}$$

où les termes non écrits ne contiennent pas q''_1, q''_2, ..., q''_n. Mais alors on a évidemment

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\partial x''}{\partial q''_1}, & b_1 &= \frac{\partial y''}{\partial q''_1}, & c_1 &= \frac{\partial z''}{\partial q''_1},\\ a_2 &= \frac{\partial x''}{\partial q''_2}, & b_2 &= \frac{\partial y''}{\partial q''_2}, & c_2 &= \frac{\partial z''}{\partial q''_2}, \end{aligned}$$
$$\cdots\cdots\cdots \text{etc.}$$

Les équations du mouvement s'écrivent donc

$$(8.)\qquad \begin{cases} \Sigma m\left(x''\frac{\partial x''}{\partial q''_1}+y''\frac{\partial y''}{\partial q''_1}+z''\frac{\partial z''}{\partial q''_1}\right) = Q_1,\\ \Sigma m\left(x''\frac{\partial x''}{\partial q''_2}+y''\frac{\partial y''}{\partial q''_2}+z''\frac{\partial z''}{\partial q''_2}\right) = Q_2, \end{cases}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Considérons maintenant la fonction

$$S = \frac{1}{2}\Sigma m(x''^2+y''^2+z''^2) = \frac{1}{2}\Sigma mJ^2,$$

où J est l'accélération absolue du point m: les équations (8.) du mouvement prennent la forme

$$\frac{\partial S}{\partial q_1''} = Q_1, \quad \frac{\partial S}{\partial q_2''} = Q_2, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n''} = Q_n. \tag{9.}$$

On voit que, pour les écrire, il suffit de calculer la seule fonction S, et l'exprimer de façon qu'elle ne contienne plus d'autres dérivées deuxièmes que celles des paramètres $q_1, q_2, \dots, q_n$ dont les variations sont regardées comme arbitraires. Il peut arriver que cette fonction S, calculée en fonction de $q_1, q_2, \dots, q_{n+p}$, contienne leurs dérivées premières $q_1', q_2', \dots, q_{n+p}'$ et leurs dérivées deuxièmes $q_1'', q_2'', \dots, q_{n+p}''$; les relations (4.) divisées par dt donnent $q_{n+1}', q_{n+2}', \dots, q_{n+p}'$ en fonction linéaire de $q_1', q_2', \dots, q_n'$, et, en les dérivant par rapport au temps, on obtient de même $q_{n+1}'', q_{n+2}'', q_{n+p}''$ en fonction linéaire de $q_1'', q_2'', \dots, q_n''$; on peut donc toujours faire en sorte que la fonction S ne contienne plus d'autres dérivées deuxièmes que $q_1'', q_2'', \dots, q_n''$: elle contient d'ailleurs ces quantités au deuxième degré. Une fois la fonction S ainsi préparée, on peut écrire les équations (9.). Ces équations jointes aux conditions (4.) forment un système de $n+p$ équations définissant $q_1, q_2, \dots, q_{n+p}$ en fonction du temps.

3.

Prenons, par exemple, un corps solide mobile autour d'un point fixe O et calculons la fonction S en rapportant le mouvement à un système d'axes O, x, y, z mobiles à la fois dans le corps et dans l'espace. Appelons Ω la rotation instantanée du trièdre $Oxyz$ et P, Q, R ses composantes suivant les axes, ω la rotation du corps et p, q, r ses composantes. Une molécule m du corps de coordonnées x, y, z possède une vitesse absolue v de projections

$$v_x = qz - ry, \cdots.$$

Cette molécule possède une accélération absolue J ayant pour projections

$$J_x = \frac{d}{dt} v_x + Q v_z - R v_y, \dots, \tag{10.}$$

comme il résulte de ce que J est la vitesse absolue du point de coordonnées v_x, v_y, v_z. Or on a, en appelant p', q', r' les dérivées de p, q, r par rapport au temps

$$\frac{dv_x}{dt} = q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt} + zq' - yr', \dots$$

où $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, projections de la vitesse relative de la molécule, par rapport aux axes O, x, y, z, sont

$$\frac{dx}{dt} = qz - ry - (Qz - Ry), \ldots; \tag{11.}$$

en effet la vitesse relative est la différence géométrique entre la vitesse absolue et la vitesse d'entrainement. D'après cela, on a l'expression suivante de J que nous ordonnons par rapport à x, y, z:

$$J_x = -x(q^2+r^2)+y[q(p-P)+pQ-r']+z[r(p-P)+pR+q']. \tag{12.}$$

On a de même J_y et J_z et enfin

$$2S = \Sigma m(J_x^2+J_y^2+J_z^2).$$

Pour simplifier nous écrirons ici cette somme en supposant que les axes O, x, y, z sont des axes principaux d'inertie au point O, et appelant A, B, C les moments d'inertie par rapport à ces axes; nous avons, en nous bornant aux termes en p', q', r':

$$\left\{\begin{array}{l} 2S = Ap'^2+Bq'^2+Cr'^2+2[(C-B)qr+A(rQ-qR)]p' \\ \quad +2[(A-C)rp+B(pR-rP)]q'+2[(B-A)pq+C(qP-pQ)]r'+\cdots. \end{array}\right. \tag{13.}$$

4.

Équations d'Euler. Prenons comme axes mobiles trois axes *invariablement liés* au corps et coïncidant avec trois axes principaux d'inertie. Nous aurons alors

$$P = p, \quad Q = q, \quad R = r,$$

$$2S = Ap'^2 + Bq'^2+Cr'^2+2(C-B)qrp'+2(A-C)rpq'+2(B-A)pqr'+\cdots.$$

Appelons L, M, N les sommes des moments des forces appliquées par rapport aux axes, et

$$\delta\lambda, \quad \delta\mu, \quad \delta\nu$$

les angles élémentaires dont il faut faire tourner le corps autour des axes pour l'amener d'une position à une position infiniment voisine. Nous ferons jouer à λ, μ, ν le rôle des paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_n$. On a, d'une part,

$$\Sigma(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z) = L\delta\lambda+M\delta\mu+N\delta\nu;$$

et, d'autre part, les composantes p, q, r de la rotation instantanée du corps sont

$$p = \frac{d\lambda}{dt} = \lambda', \quad q = \frac{d\mu}{dt} = \mu', \quad r = \frac{d\nu}{dt} = \nu'.$$

La fonction S est alors

$$S = \frac{1}{2}(A\lambda''^2 + B\mu''^2 + C\nu''^2) + (C-B)\mu'\nu'\lambda'' + (A-C)\nu'\lambda'\mu'' + (B-A)\lambda'\mu'\nu'' + \cdots$$

où les termes non écrits ne contiennent pas λ'', μ'', ν''. Les équations du mouvement sont donc

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda''} = L, \quad \frac{\partial S}{\partial \mu''} = M, \quad \frac{\partial S}{\partial \nu''} = N.$$

La première par exemple, s'écrit

$$A\lambda'' + (C-B)\mu'\nu' = L;$$

d'après les valeurs de p, q, r, c'est précisément une des équations d'*Euler*.

5.

Corps de révolution suspendu par un point O de son axe. Menons par O un axe fixe $O\alpha$ et prenons pour axe Oz l'axe de révolution, pour axe Oy la perpendiculaire au plan αOz, et pour axe Ox la perpendiculaire au plan yOz. Quand la position du trièdre $Oxyz$ est connue, pour avoir celle du corps, il suffit de connaître l'angle φ que fait avec Oy, un rayon issu de O et invariablement lié au corps dans le plan des xy: la dérivée φ' de cet angle, par rapport au temps, représente la rotation propre du corps autour de Oz. La rotation ω du corps est alors la résultante de la rotation Ω du trièdre et de la rotation φ'. On a donc

$$p = P, \quad q = Q, \quad r = R + \varphi'.$$

La fonction S, définie par l'expression (13.) devient alors, puisque $A = B$:

$$(14.) \qquad 2S = A(p'^2 + q'^2) + Cr'^2 + 2(AR - Cr)(pq' - qp') + \cdots.$$

Soient encore, $\delta\lambda, \delta\mu, \delta\nu$ les angles élémentaires dont il faut faire tourner le corps autour des axes Ox, Oy, Oz pour l'amener d'une position à une position voisine, et L, M, N les moments des forces par rapport aux axes, on a comme plus haut

$$p' = \lambda'', \quad q' = \mu'', \quad r' = \nu''$$

et les équations du mouvement sont

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda''} = L, \quad \frac{\partial S}{\partial \mu''} = M, \quad \frac{\partial S}{\partial \nu''} = N;$$

c'est-à-dire, puisque la composante R de la rotation Ω ne dépend pas de λ'', μ'', ν'',

$$\begin{aligned} Ap' - (AR - Cr)q &= L, \\ Aq' + (AR - Cr)p &= M, \\ Cr' &= N. \end{aligned}$$

6.

Cerceau. Pour calculer la fonction S relative à un système quelconque, on peut employer un théorème analogue à celui de *Koenig* pour le calcul de la force vive. Prenons par exemple un cerceau ou un disque homogène d'épaisseur négligeable assujetti à rouler sur un plan horizontal. Appelons a le rayon du cerceau, G son centre: soit $G\alpha$ la verticale ascendante menée par G, Gz la normale au plan du cerceau, c'est-à-dire l'axe de révolution du corps: nous désignerons par Θ l'angle $\alpha G z$.

Prenons ensuite, comme dans l'exemple précédent, pour axe Gy la perpendiculaire au plan $\alpha G z$ et pour axe Gx la perpendiculaire au plan yGz. De cette façon Gy est une horizontale du plan du cerceau et Gx une ligne de plus grande pente de ce plan aboutissant au point H par lequel le cerceau touche le plan fixe.

Prenons la masse du cerceau pour unité; appelons J_0 l'accélération du point G et J' l'accélération relative d'un point m du cerceau par rapport à des axes de directions fixes passant par G. En appliquant un théorème analogue au théorème de *Koenig*, on a

$$\frac{1}{2}\Sigma m J^2 = \frac{1}{2}J_0^2 + \frac{1}{2}\Sigma m J'^2,$$

formule que nous écrirons

$$S = \frac{1}{2}J_0^2 + S'.$$

Le mouvement relatif du cerceau autour du point G est le mouvement d'un corps de révolution suspendu par un point de son axe. En appliquant à ce mouvement les notations du numéro précédent on a, d'après (14.):

$$2S' = A(p'^2+q'^2)+Cr'^2+2(AR-Cr)(pq'-qp')+\cdots.$$

Il reste donc à calculer J_0^2. Pour cela appelons u, v, w les projections de la vitesse absolue du point G sur les axes Gx, Gy, Gz: pour exprimer que le cerceau roule, il faut écrire que le point matériel du cerceau qui se trouve au contact avec le sol, au point H, a une vitesse nulle. On a donc puisque la vitesse de ce point est la résultante de sa vitesse relative autour de G et de la vitesse d'entrainement de G

$$(15.) \qquad u = 0, \quad v+ra = 0, \quad w-qa = 0;$$

les coordonnées du point H, par rapport aux axes $Gxyz$, sont en effet $a, 0, 0$.

Comme la rotation instantanée du trièdre $Gxyz$ est Ω, l'accélération absolue du point G a pour projections sur les axes Gx, Gy, Gz:

$$\frac{du}{dt}+Qw-Rv,$$
$$\frac{dv}{dt}+Ru-Pw,$$
$$\frac{dw}{dt}+Pv-Qu,$$

c'est-à-dire d'après (15.)

$$a(Qq+Rr), \quad -ar'-aPq, \quad aq'-aPr;$$

et on a, en faisant la somme des carrés et remarquant que $P=p$, $Q=q$,

$$J_0^2 = a^2(q'^2+r'^2)+2a^2p(qr'-rq')+\cdots$$

où nous n'écrivons pas les termes ne contenant pas p', q', r'. On a donc enfin

$$2S = Ap'^2+(A+a^2)q'^2+(C+a^2)r'^2+2(AR-Cr)(pq'-qp')+2a^2p(qr'-rq')+\cdots$$

Appelons encore

$$\delta\lambda, \quad \delta\mu, \quad \delta\nu$$

les angles infiniment petits dont il faut faire tourner le cerceau autour des axes Gx, Gy, Gz pour l'amener d'une position à une position infiniment voisine. Ces quantités sont arbitraires et déterminent complètement le déplacement du cerceau. Nous prendrons λ, μ, ν comme paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et nous aurons encore

$$p' = \lambda'', \quad q' = \mu'', \quad r' = \nu''.$$

Nous pouvons alors écrire les premiers membres des équations du mouvement telles que (9.). Il reste à calculer les deuxièmes membres. Pour cela il faut calculer la somme des travaux des forces appliquées:

$$\Sigma(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)$$

et la mettre sous la forme

$$L_1\delta\lambda+M_1\delta\mu+N_1\delta\nu;$$

L_1, M_1, N_1 seront les deuxièmes membres des équations. Ces quantités ont une signification simple. Menons par le point de contact H avec le sol trois axes Hx_1, Hy_1, Hz_1 parallèles aux axes Gx, Gy, Gz: L_1, M_1, N_1 sont respectivement les sommes des moments des forces appliquées par rapport à ces nouveaux axes. En effet, la vitesse de la molécule placée en H étant nulle dans un déplacement compatible avec les liaisons, le déplacement infiniment petit du cerceau est le déplacement résultant de trois rotations élémentaires $\delta\lambda, \delta\mu, \delta\nu$ autour des axes Hx_1, Hy_1, Hz_1, sans déplacement de H; ce qui démontre la proposition.

Si la seule force appliquée est le poids g appliqué en G, on a évidemment

$$L_1 = 0, \quad N_1 = 0,$$
$$M_1 = -ga\cos\Theta.$$

Les équations du mouvement sont alors

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda''} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \mu''} = -ga\cos\Theta, \quad \frac{\partial S}{\partial \nu''} = 0,$$

c'est-à-dire, d'après la valeur de S

$$Ap' - (AR - Cr)q = 0,$$
$$(A + a^2)q' + (AR - Cr)p - a^2pr = -ga\cos\Theta,$$
$$(C + a^2)r' + a^2pq = 0.$$

M. *Korteweg* et moi avons remarqué, à peu près en même temps, que l'intégration de ces équations se ramène à l'intégration de l'équation hypergéométrique de *Gauss* suivie d'une quadrature. (Voyez un article des Rendi conti del Circolo Matematico di Palermo, suivi d'une lettre de M. *Korteweg*, premier fascicule 1900.)

7.

Dans ce qui précède nous avons déduit les équations (9.) du principe de *d'Alembert* associé au principe du travail virtuel. On peut aussi les rattacher au principe de la moindre contrainte de *Gauss* (Journal de *Crelle*, t. IV). Il ne pouvait du reste pas en être autrement, puisque, comme le remarque *Gauss*, tous les principes de l'équilibre et du mouvement devant se ramener au principe des vitesses virtuelles et au principe de *d'Alembert*, se ramènent nécessairement les uns aux autres.

Si l'on forme la fonction

$$R = S - (Q_1 q_1'' + Q_2 q_2'' + \cdots + Q_n q_n'')$$

qui contient les lettres q'' au deuxième degré, on voit que les équations du mouvement (9.) peuvent s'écrire

$$\frac{\partial R}{\partial q_1''} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial q_2''} = 0, \cdots, \frac{\partial R}{\partial q_n''} = 0. \tag{16.}$$

Ce sont les équations que l'on aurait à écrire pour trouver les valeurs de

$q_1'', q_2'', \cdots, q_n''$ rendant R *minimum.* Inversement les valeurs des q'' tirées de ces équations rendent R minimum, car les termes homogènes du deuxième degré de R proviennent de S et constituent une forme quadratique définie positive. Comme les valeurs des q'' déterminent les accélérations, on peut interpréter ce résultat en disant que *les valeurs des accélérations à chaque instant rendent R minimum.*

Dans cet énoncé, on peut remplacer la fonction R par toute autre fonction qui en diffère seulement par des termes indépendants des accélérations, par exemple par les deux fonctions suivantes:

$$\frac{1}{2}\Sigma m(x''^2+y''^2+z''^2)-\Sigma(Xx''+Yy''+Zz''),$$
$$\frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m}[(mx''-X)^2+(my''-Y)^2+(mz''-Z)^2].$$

Le fait que les accélérations rendent cette dernière fonction minimum est une conséquence immédiate du principe de la moindre contrainte de *Gauss* comme l'a montré M. *A. Mayer* dans un intéressant article intitulé: „Ueber die Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung für reibungslose Punktsysteme, die Bedingungsungleichungen unterworfen sind“ und „Zur Regulirung der Stösse in reibungslosen Punktsystemen, die dem Zwange von Bedingungsungleichungen unterliegen“. Abdruck aus den Berichten der mathematisch-physikalischen Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Sitzung vom 3. Juli 1899. Cet enoncé du principe de *Gauss* que j'ai donné, de mon côté, après M. *Mayer,* dans les Comptes Rendus du 11. septembre 1899, se trouve déjà dans le Tome III des Oeuvres de *Hertz,* page 224 (Leipzig, 1894.)