Über die erzwungenen Schwingungen von gleichförmigen elastischen Stäben.

Von

A. Kriloff in St. Petersburg.

Einleitung und Problemstellung.

§ 1.

Die Schwingungen, welche ein elastischer Stab um seine Gleichgewichtslage ausführen kann, werden in zwei Klassen eingeteilt: die *freien* und die *erzwungenen* Schwingungen.

Unter *freien* Schwingungen versteht man diejenigen, welche nur durch die Anfangsabweichungen des Stabes von seinem Gleichgewichtszustande bedingt werden, aber von der Wirkung der äußeren Kräfte unabhängig sind.

Erzwungen heißen diejenigen Schwingungen, welche durch die dauernde Wirkung der äußeren Kräfte entstehen, aber von dem Anfangszustande des Stabes unabhängig sind.

Die freien Schwingungen von gleichförmigen Stäben sind nach Euler in sehr ausführlicher Weise in der *Mécanique* von Poisson und in der *Theory of Sound* von Lord Rayleigh behandelt.

Erzwungene Schwingungen bieten für praktische Anwendungen bei dem Eisenbahnbau und bei dem Brücken- und Schiffbau ein ebenso großes Interesse dar wie die freien Schwingungen für die Akustik, besonders wenn man den Fall der ungleichförmigen Stäbe auch mit in Betracht zieht.

Aber sogar die Behandlung der erzwungenen Schwingungen für den einfachsten Fall der gleichförmigen Stäbe ist in den Lehrbüchern nicht zu finden.

Den Gegenstand dieser Abhandlung bildet die Auseinandersetzung einer allgemeinen Methode für die Bestimmung der erzwungenen Schwingungen eines gleichförmigen elastischen Stabes, welcher der Einwirkung einer veränderlichen Kraft unterliegt.

Man wird sich sofort überzeugen, daß die Methode in der Hinsicht eine allgemeine ist, daß sie für analoge Probleme der mathematischen Physik z. B. die Schwingungen von Saiten, die Wärmeleitung in einem Stabe u. dgl. anwendbar ist.

Bei dieser Auseinandersetzung habe ich stets die praktischen Anwendungen und nicht die rein mathematische Seite in den Vordergrund gestellt, da die Abhandlung selbst aus einem Vorstudium für eine dienstliche Untersuchung von Schiffsvibrationen entstanden ist.

§ 2.

Es sei AB ein gleichförmiger, zylindrischer, ursprünglich gerader Stab, und es liege die x-Achse in der Mittellinie des Stabes, das Ende A dem Abszissenwerte $x = 0$ und das Ende B dem Werte $x = l$ entsprechend. Es sei angenommen, daß dieser Stab einer anfänglichen (dem Augenblicke $t = 0$ entsprechenden) Störung seines Gleichgewichtszustandes und der Wirkung einer veränderlichen Kraft unterliege; es sollen seine Schwingungen bestimmt werden.

Es wird ferner angenommen, daß die Richtung der Kraft überall der z-Achse parallel ist, und daß es sich um die ebenen Quer- oder Transversalschwingungen handelt, und daß sie in der zx-Ebene vor sich gehen.

Die auf den Stab wirkende Kraft sei in jedem Punkte auf die Längeneinheit bezogen und durch die Funktion

$$Z = F(x, t),$$

wo $F(x, t)$ eine gegebene Funktion der Abszisse x und der Zeit t ist, dargestellt.

Es ist wohl bekannt, daß dieses Problem mathematisch in folgender Art ausgesprochen wird: es soll z als Funktion der Unabhängigen x und t in der Art bestimmt werden, daß sie folgenden Forderungen Genüge leiste:

1°) *Sie soll der partiellen Differentialgleichung* (der Bewegungsgleichung)*)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = \frac{1}{qs} F(x, t) \tag{1}$$

genügen. Hier bezeichnet q die Dichtigkeit des Stabmaterials, s die Querschnittsfläche, $b^2 = \frac{EJ}{qs}$ eine Konstante. E ist der Elastizitätsmodul, J das Trägheitsmoment der Fläche s um eine zu der Schwingungsebene senkrechte zentrale Achse.

---

*) Poisson, Mécanique § 519—529. Lord Rayleigh, Theory of Sound (2nd ed.) Chap. VIII.

2°) *Sie soll die Anfangsbedingungen, welche die Anfangsstörung darstellen, erfüllen.* Diese Bedingungen werden in folgender Art ausgesprochen: wenn t gleich Null ist, so muß z gleich einer gegebenen Funktion $\varphi(x)$ sein, und die partielle Ableitung $\frac{\partial z}{\partial t}$ muß gleich einer anderen gegebenen Funktion $\psi(x)$ sein. Diese Funktionen sind nur im Intervalle von $x = 0$ bis $x = l$ gegeben und, eine noch anzugebende Beschränkung ausgenommen, im übrigen willkürlich.

3°) *Sie soll den Grenz- oder Befestigungsbedingungen genügen.* Diese Bedingungen beziehen sich auf die Enden $A(x=0)$ und $B(x=l)$ des Stabes und werden so ausgesprochen:

a) Für ein *freies* Ende müssen die (der Abszisse $x = 0$ oder $x = l$) entprechenden Werte von $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ und von $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$ gleich Null werden.

b) Für ein *gestütztes* Ende müssen die entsprechenden Werte von z und von $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ gleich Null werden.

c) Für ein *eingeklemmtes* Ende müssen die entsprechenden Werte von z und von $\frac{\partial z}{\partial x}$ gleich Null werden.

Diese Bedingungen sollen für alle Werte von t gelten. Die unter 2°) besprochenen Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, welche die Anfangsstörung darstellen, müssen diesen Grenzbedingungen auch genügen.

Allgemeiner Ansatz für die Lösung.

§ 3.

Die allgemeine Methode zur Lösung dieses Problems besteht im folgenden.

Man setze

$$z = z_1 + z_2 \tag{2}$$

und bestimme z_1 und z_2 durch die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 z_1}{\partial t^4} = 0 \tag{3}$$

und

$$\frac{\partial^2 z_2}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 z_2}{\partial x^4} = \frac{1}{qs} F(x, t). \tag{4}$$

Man bestimme außerdem die Grenz- und Anfangsbedingungen für z_1 und z_2 so, daß z_1 die freien und z_2 die erzwungenen Schwingungen darstelle. Das wird dadurch erreicht, daß man z_2 und z_1 folgenden Bedingungen unterwirft: 1°) z_2 allein genommen muß den gegebenen, für z geltenden Grenzbedingungen genügen, und was die Anfangsbedingungen anbetrifft, so nehme man sie für z_2 derart, daß, wenn t gleich Null wird, dann z_2 und $\frac{\partial z_2}{\partial t}$ auch gleich Null werden. Hierdurch wird z_2 völlig bestimmt sein. 2°) z_1 allein genommen muß den gegebenen für die Summe $z = z_1 + z_2$ geltenden Grenz- und Anfangsbedingungen genügen.

Wenn die Funktionen z_1 und z_2 in dieser Art bestimmt werden, so sieht man sogleich, daß ihre Summe $z = z_1 + z_2$ der Bewegungsgleichung (1) und den Anfangs- und Grenzbedingungen genügt, so daß $z_1 + z_2$ eine Lösung unseres Problemes ist. Diese Lösung ist dabei so beschaffen, daß z_1 nur von der Anfangsstörung $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ und nicht von der wirkenden Kraft $F(x, t)$ abhängt; z_2 dagegen hängt nur von dieser Kraft ab und ist im Gegenteil von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ d. h. von der Anfangsstörung unabhängig. Mit einem Worte: *z_1 wird die freien, z_2 die erzwungenen Schwingungen darstellen.*

Ansatz der freien Schwingung mittels Normalfunktionen.

§ 4.

Es werden zuerst die freien Schwingungen bestimmt, was auf folgende wohlbekannte Art geschieht: Man suche die allgemeinste Form des Ausdruckes

(5) $$z_1 = \sum XT,$$

wo X eine Funktion von x allein und T eine Funktion von t allein bezeichnet, so daß diese Form der Gleichung (3) und den Grenzbedingungen genüge. Dann werden X und T durch die Gleichungen

(6) $$\begin{cases} \dfrac{d^4 X}{dx^4} - m^4 X = 0 \\ \text{und} \\ \dfrac{d^2 T}{dt^2} + b^2 m^4 T = 0 \end{cases}$$

bestimmt, wobei m einen beliebigen konstanten Wert haben kann.

Man erhält für X

(7) $$X = C_1 \operatorname{Cof} mx + C_2 \operatorname{Sin} mx + C_3 \cos mx + C_4 \sin mx$$

wo C_1, C_2, C_3, C_4 willkürliche Konstanten sind und Cof, Sin in gewöhnlicher Weise die hyperbolischen Funktionen bezeichnen.

Der entsprechende Wert von T ist:

$$T = D \cos m^2 bt + E \sin m^2 bt.$$

Danach nimmt der Ausdruck (5) die folgende Form an:

(8) $$z_1 = \sum DX \cos m^2 bt + \sum EX \sin m^2 bt,$$

wo die Summen über alle möglichen Werte von m zu erstrecken sind. Um die Grenzbedingungen zu befriedigen, bestimmt man die Konstanten C derart, daß jede von den Funktionen X, allein genommen, den Grenzbedingungen genüge, was bekanntlich für jede Kombination dieser Bedingungen zu einer entsprechenden transzendenten Gleichung

$$\Phi(m) = 0 \tag{9}$$

führt.

Es wurde von Poisson*) bewiesen, daß diese Gleichungen unendlich viele Wurzeln besitzen, die sämtlich reell und voneinander verschieden sind. Man bezeichne diese Wurzeln durch

$$m_1, m_2, \cdots, m_k, \cdots.$$

Jeder Wurzel entspricht eine Funktion X, welche bloß eine willkürliche Konstante als Faktor enthalten wird. Die Funktion X, welche der Wurzel m_k entspricht, wollen wir im folgenden durch $C_k X_k$ bezeichnen.

Setzt man

$$C_k D = A_k \quad \text{und} \quad C_k E = B_k,$$

so erhält man für z_1 den Ausdruck:

$$z_1 = \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k X_k \cos m_k^2 bt + \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k X_k \sin m_k^2 bt, \tag{10}$$

wo A_k und B_k willkürliche Konstanten, m_k, wie gesagt, die Wurzeln der transzendenten Gleichung (9) und X_k bestimmte Funktionen von x und m_k sind. Diese Funktionen X_k sollen hier im Anschluß an die englischen Autoren *„den Grenzbedingungen entsprechende Normalfunktionen“* genannt werden.

§ 5.

Die Haupteigenschaft dieser Normalfunktionen wird durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$\int_0^l X_i X_k \, dx = 0, \quad \text{wenn } k \text{ ungleich } i \text{ ist.}$$

Diese Gleichung folgt unmittelbar aus der Gleichung (6) und den Grenzbedingungen, welchen die Normalfunktionen genügen.

Diese Eigenschaft liefert nach Fourier das Mittel zur Berechnung der Koeffizienten N_k bei der Darstellung einer gegebenen Funktion $f(x)$ in der Form einer nach den Normalfunktionen fortschreitenden Reihe:

$$f(x) = N_1 X_1 + N_2 X_2 + \cdots + N_k X_k + \cdots, \tag{11}$$

*) Poisson, Mécanique § 524.

wenn man sich überzeugt oder angenommen hat, daß eine solche Darstellung möglich ist. Die Gleichung (11) wird beiderseits mit $X_k dx$ multipliziert und zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = l$ integriert, wodurch der Wert

$$N_k = \frac{\int_0^l f(x)\, X_k\, dx}{\int_0^l X_k^2\, dx} \tag{10}$$

erhalten wird. Der Nenner in dieser Formel kann ein für allemal vermittels der Gleichung (6) berechnet werden, ohne daß man die Integration auszuführen braucht. In Lord Rayleighs Theory of Sound, Chap. VIII, findet man eine kleine Tabelle, welche die Werte dieses Nenners für alle sechs Kombinationen der Grenzbedingungen angibt.

Die erzwungene Schwingung; allgemeine Lösung des Problems.

§ 6.

Der weitere Schritt in unserer Methode besteht in der Bestimmung von z_2. Das wird folgendermaßen erreicht:

1°) die auf den Stab wirkende veränderliche Kraft $F(x, t)$ (oder in technischer Ausdrucksweise — die im Augenblick t statthabende Verteilung der veränderlichen Belastung) ist in der Form einer nach den, den Grenzbedingungen entsprechenden Normalfunktionen X_k fortschreitenden Reihe darzustellen.

Man setze also:

$$F(x, t) = N_1 X_1 + N_2 X_2 + \cdots + N_k X_k + \cdots, \tag{13}$$

woraus

$$N_k = \frac{\int_0^l F(x, t)\, X_k\, dx}{\int_0^l X_k^2\, dx} \tag{14}$$

folgt, was eine vollkommen bestimmte Funktion der Veränderlichen t darstellt.*)

*) Streng mathematisch gefaßt, ist eine solche Darstellung nur dann möglich, wenn die Funktion $F(x, t)$ denselben Grenzbedingungen wie die Normalfunktionen X genügt. Für die praktischen technischen Anwendungen braucht dies aber nicht der Fall zu sein. Man vergleiche hierzu die Darstellung einer Funktion $f(x)$, die bei $x = 0$ und $x = \pi$ nicht gleich Null ist, durch eine Sinusreihe. Man weiß wohl, daß in diesem Falle mit wachsender Gliederzahl der Reihe die Kurve, welche die Summe dieser Glieder repräsentiert, sich an den Punkten $x = 0$ und $x = \pi$ immer mehr

2°) Man setze ferner

$$(15) \qquad z_2 = \sum_{k=1}^{k=\infty} T_k X_k,$$

wo T_k eine noch zu bestimmende Funktion von t bedeutet.

3°) Die Ausdrücke (13) und (15) sind in die Gleichung (4) einzusetzen, dann ersieht man, daß T_k durch die folgende Gleichung:

$$(16) \qquad \frac{d^2 T_k}{dt^2} + m_k^4 b^2 T_k = \frac{1}{qs} N_k$$

zu bestimmen ist.

Diese Gleichung gibt:

$$T_k = G_k \cos m_k^2 bt + H_k \sin m_k^2 b t + S_k,$$

wo

$$S_k = \frac{1}{qs} \cdot \frac{1}{m_k^2 b} \left[\sin m_k^2 bt \int_0^t N_k \cos m_k^2 bt\, dt - \cos m_k^2 bt \int_0^t N_k \sin m_k^2 bt\, dt\right]$$

und G_k und H_k willkürliche Konstanten sind.

Diese Konstanten sind derart zu bestimmen, daß, wenn t gleich Null wird, dann auch T_k und $\frac{dT_k}{dt}$ gleich Null werden. Diese Bedingungen folgen unmittelbar aus dem im § 3 Gesagten über die Anfangsbedingungen, welchen z_2 genügen muß. So erhält man:

$$G_k = 0 \quad \text{und} \quad H_k = 0$$

und es wird:

$$(17) \quad T_k = \frac{1}{qsm_k^2 b} \left[\sin m_k^2 bt \int_0^t N_k \cos m^2 bt\, dt - \cos m^2 bt \cdot \int_0^t N_k \sin m^2 bt\, dt\right].$$

4. Es bleibt noch z_1 so zu bestimmen, daß die Summe $z = z_1 + z_2$ den Anfangsbedingungen genüge; da aber bei $t = 0$ z_2 und $\frac{\partial z_2}{\partial t}$ beide gleich Null sind, so sind diese Anfangsbedingungen, wie schon im § 3 bemerkt wurde, folgende:

$$(18) \qquad \begin{cases} \text{Wenn } t = 0 \text{ ist, so muß } z_1 \text{ gleich } \varphi(x) \text{ werden,} \\ \quad \text{„} \quad t = 0 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \frac{\partial z_1}{\partial t} \quad \text{„} \quad \psi(x) \quad \text{„} \end{cases}$$

---

einer Senkrechten zur Abszissenachse annähert, so daß diese Senkrechten die entsprechenden Punkte der Abszissenachse mit den Punkten $(0, f(0))$ und $(\pi, f(\pi))$ verbinden. In unserem Falle, wo $F(x, t)$ die Belastung auf den Stab ist, sieht man unmittelbar ein, daß $F(x, t)$ und seine Reihendarstellung (mit vertikaler Ordinate an den Endpunkten) hinsichtlich ihrer Wirkung auf den Stab gleichbedeutend sind.

Näheres darüber kann man bei Byerly, Elementary Treatise on Fourier's Series etc. (Boston, 1893), S. 64 und 65 oder bei R. Fricke, Analytisch-funktionentheoretische Vorlesungen (Leipzig, 1900), S. 14 finden.

Diese Bedingungen reichen aus, um die im Ausdrucke (10) noch vorhandenen willkürlichen Konstanten A_k und B_k $(k = 1, 2, \cdots)$ eindeutig zu bestimmen, denn sie liefern die zwei Gleichungen (19):

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{k=\infty} A_k X_k = \varphi(x) \\ &\sum_{k=1}^{k=\infty} b m_k^2 B_k X = \psi(x), \end{aligned}\right.$$

aus welchen:

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} &A_k = \frac{\int\limits_0^l \varphi(x)\cdot X_k\,dx}{\int\limits_0^l X_k^2\,dx} \\ &\text{und} \\ &B_k = \frac{1}{b m_k^2}\cdot\frac{\int\limits_0^l \psi(x) X_k\,dx}{\int\limits_0^l X_k^2\,dx} \end{aligned}\right.$$

folgt.

Wenn man alle diese einzelnen Resultate und Entwicklungen zusammenzieht, *so sieht man ein, daß unsere Aufgabe durch folgende Ausdrücke formal vollkommen gelöst ist*:

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} &z = z_1 + z_2, \\ &z_1 = \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k X_k \cos m_k^2 bt + \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k X_k \sin m_k^2 bt, \\ &z_2 = \sum_{k=1}^{k=\infty} T_k X_k, \end{aligned}\right.$$

wobei T_k durch die Formel (17), *A_k und B_k durch die Formeln* (20) *und m_k durch die transzendente Gleichung* (9) *bestimmt sind.*

Wird die Lösung in dieser Form dargestellt, so ersieht man unmittelbar, daß, wenn $F(x, t)$ gleich Null gesetzt wird, z_2 verschwindet, z_1 aber unverändert bleibt; wenn man dagegen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ gleich Null nimmt, so verschwindet z_1, und z_2 bleibt unverändert. Dieses zeigt, daß z_1 wirklich die freien, und z_2 wirklich die erzwungenen Schwingungen des Stabes darstellt.

Die obige Rechnung ist rein formal durchgeführt worden. In jedem einzelnen Falle, wenn die Funktionen wirklich gegeben, nicht nur bezeichnet werden, und man dabei streng mathematisch verfahren will, müßte man beweisen, daß die in der Lösung vorkommenden unendlichen Reihen alle die Operationen (Integration und mehrfache Differentationen nach x und t) ohne weiteres zulassen.

Ganz anders steht die Sache in den praktisch-technischen Anwendungen Hier braucht man nur eine ziemlich grobe Annäherung, für welche schon wenige erste Glieder der Reihen genügen. *Die nötige Anzahl dieser Glieder kann durch eine unmittelbare Rechnung bestimmt werden.* Um das zu erreichen, beachte man, daß die veränderliche Belastung $F(x, t)$ praktisch niemals genau, sondern nur näherungsweise angegeben ist: man berechne also die Werte dieser Funktion, welche ihren Verlauf charakterisieren, und man vergleiche sie mit denjenigen Werten, welche durch die Summe der ersten Glieder der Reihe (13) geliefert werden, und man nehme danach so viele Glieder in der Reihe, daß die Abweichungen die praktisch zugelassenen Grenzen der Genauigkeit in der Angabe der Belastung nicht überschreiten.

Gewöhnlich genügen dazu die ersten 2 bis 6, selten 10 Glieder der Reihen. Wir wollen also im folgenden immer stillschweigend annehmen, daß unsere Reihen sich auf endliche Summen reduzieren.

Bewegung eines Stabes unter beweglicher Last.

§ 7.

Um die oben entwickelte allgemeine Methode an einigen Beispielen zu erläutern, werde ich die einfachsten und interessantesten Fälle untersuchen.

1. Beispiel. *Ein gleichförmiger zylindrischer Stab ist an beiden Enden frei gestützt und der Wirkung einer sich gleichförmig bewegenden punktförmigen Last unterworfen. Die Geschwindigkeit der Bewegung sei a, und die Last sei als eine Kraft P angesehen. Es wird verlangt, die erzwungenen Schwingungen des Stabes zu ermitteln.*

Wir wollen erst die allgemeinen Formeln für einen an beiden Enden gestützten Stab entwickeln und dann diese Formeln auf das Beispiel anwenden.

Die Grenzbedingungen für einen gestützten Stab sind folgende:

$$\text{Bei } x = 0 \text{ muß } z = 0 \text{ und } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \text{ werden,}$$

$$\text{„ } x = l \text{ „ } z = 0 \text{ „ } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \text{ „}$$

für jeden beliebigen Wert der anderen Veränderlichen t. Gemäß diesen Grenzbedingungen sind die Normalfunktionen zu bestimmen.

Da

$$X = C_1 \,\mathfrak{Cof}\, mx + C_2 \,\mathfrak{Sin}\, mx + C_3 \cos mx + C_4 \sin mx,$$

so liefern die Grenzbedingungen folgendes System von Gleichungen:

$$(\alpha) \qquad \left\{ \begin{aligned} C_1 + C_3 &= 0 \\ C_1 - C_3 &= 0 \\ C_1 \,\mathfrak{Cof}\, ml + C_2 \,\mathfrak{Sin}\, ml + C_3 \cos ml + C_4 \sin ml &= 0 \\ C_1 \,\mathfrak{Cof}\, ml + C_2 \,\mathfrak{Sin}\, ml - C_3 \cos ml - C_4 \sin ml &= 0, \end{aligned} \right.$$

aus welchen

$$C_1 = 0 \quad \text{und} \quad C_3 = 0$$

folgt; das System (α) wird also mit dem folgenden äquivalent:

$$\begin{aligned} C_2 \,\mathfrak{Sin}\, ml + C_4 \sin ml &= 0 \\ C_2 \,\mathfrak{Sin}\, ml - C_4 \sin ml &= 0; \end{aligned}$$

die Determinante dieses Systems muß verschwinden, sie lautet aber:

$$\Delta = \mathfrak{Sin}\, ml \cdot \sin ml.$$

Um unnütze Transformationen vom Imaginären zum Reellen zu vermeiden, hat man nur die Gleichung $\Delta = 0$ durch die aus ihr folgende:

$$(\mathrm{q}') \qquad \sin ml = 0$$

zu ersetzen, dann wird $C_2 = 0$ und C_4 bleibt willkürlich.

Die Gleichung (q′) ist die den Grenzbedingungen entsprechende transzendente Gleichung, welche die Werte der Konstanten m liefert.

Es folgt:

$$m_k = \frac{k\pi}{l}. \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

Die negativen Werte der ganzen Zahl k braucht man nicht zu betrachten, da die ihnen entsprechenden Glieder mit den aufgenommenen, den positiven Werten von k entsprechenden, sich vereinigen.

Also werden die Normalfunktionen:

$$X_k = \sin \frac{k\pi x}{l}. \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

Die Formeln (19), (20), (21) liefern dann die folgende allgemeine Lösung:

$$
(22)\left\{\begin{aligned}
z &= \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{k=\infty}\sin\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k^2\pi^2 b t}{l^2}\cdot\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx \\
&+ \frac{2l}{\pi^2 b}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k^2\pi^2 b t}{l^2}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx \\
&- \frac{1}{qs}\,\frac{2l}{\pi^2 b}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k^2\pi^2 b t}{l^2}\int_0^t dt\int_0^l F(x,t)\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k^2\pi^2 b t}{l^2}\,dx \\
&+ \frac{1}{qs}\,\frac{2l}{\pi^2 b}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k^2\pi^2 b t}{l^2}\int_0^t dt\int_0^l F(x,t)\sin\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k^2\pi^2 b t}{l^2}\,dx
\end{aligned}\right.
$$

des Problems der Schwingungen eines an beiden Enden gestützten Stabes, für welchen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ die Anfangsstörung und $F(x, t)$ die wirkende Kraft darstellen.

Um diese allgemeine Lösung für unser Beispiel zu benutzen, muß man die punktförmige Kraft P als den Grenzfall einer auf einer kurzen Strecke λ, welche den Angriffspunkt der Kraft P enthält, gleichförmig verteilten Kraft $p = \frac{P}{\lambda}$ ansehen. Dieser Betrachtung zufolge hat man die Funktion $F(x, t)$ so zu definieren:

$F(x, t) = 0$ im Intervalle von $x = 0$ bis $x = at$

$F(x, t) = p = \frac{P}{\lambda}$ „ „ „ $x = at - \frac{\lambda}{2}$ bis $x = at + \frac{\lambda}{2}$ *)

$F(x, t) = 0$ „ „ „ $x = at + \frac{\lambda}{2}$ bis $x = l$.

Diese Definition gestattet eine leichte Ausführung der Quadraturen und man erhält:

$$
N_k = \frac{2}{l}\int_0^l F(x,t)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\,p\int_{at-\frac{\lambda}{2}}^{at-\frac{\lambda}{2}}\sin\frac{k\pi x}{l}\cdot dx
$$

$$
= \frac{2p}{k\pi}\left[\cos\frac{k\pi\left(at-\frac{\lambda}{2}\right)}{l} - \cos\frac{k\pi\left(at+\frac{\lambda}{2}\right)}{l}\right] = \frac{4p}{k\pi}\sin\frac{k\pi\lambda}{2l}\sin\frac{k\pi}{l}\left(at+\frac{\lambda}{2}\right)
$$

*) Statt der Werte $at - \frac{\lambda}{2}$ und $at + \frac{\lambda}{2}$ kann man auch $at - \varepsilon$ und $at + (\lambda - \varepsilon)$ nehmen, wobei ε irgend einen Wert haben kann, welcher kleiner als λ ist. Das Resultat bleibt unabhängig von ε.

und die Formel (22) liefert, wenn man $\varphi(x) = 0$ und $\psi(x) = 0$ setzt, den Ausdruck:

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} z = z_2 = \frac{4}{\pi^3}\frac{pl^4}{qs}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^3}\frac{\sin\frac{k\pi\lambda}{2l}}{k^2\pi^2b^2 - a^2l^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi}{l}\left(at + \frac{\lambda}{2}\right) \\ - \frac{4}{\pi^3}\frac{pl^4}{qs}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^3}\frac{\sin\frac{k\pi\lambda}{l}}{k^2\pi^2b^2 - a^2l^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k^2\pi^2bt}{l^2} \\ - \frac{4}{\pi^4}\frac{pl^5}{qs}\frac{a}{b}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^4}\frac{\sin\frac{k\pi\lambda}{2l}\cos\frac{k\pi\lambda}{2l}}{k^2\pi^2b^2 - a^2l^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k^2\pi^2bt}{l^2}. \end{aligned}\right.$$

Man gelangt noch leichter zu dieser Formel, wenn man die Gleichungen (16) und (17) unmittelbar benutzt.

In unserem Falle wird nämlich die Gleichung (16):

$$(24)\qquad \frac{d^2T_k}{dt^2} + \frac{\pi^4k^4}{l^4}b^2T_k = \frac{1}{qs}\frac{4p}{k\pi}\sin\frac{k\pi\lambda}{2l}\sin\frac{k\pi}{l}\left(at + \frac{\lambda}{2}\right),$$

woraus man ohne Rechnung das partikuläre Integral S_k erhält:

$$S_k = \frac{1}{qs}\frac{4p}{k\pi}\frac{\sin\frac{k\pi\lambda}{2l}}{\frac{\pi^4k^4}{l^4}b^2 - \frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}}\sin\frac{k\pi}{l}\left(at + \frac{\lambda}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{qs}\frac{4pl^4}{\pi^3k^3}\frac{\sin\frac{k\pi\lambda}{2l}}{k^2\pi^2b^2 - a^2l^2}\sin\frac{k\pi}{l}\left(at + \frac{\lambda}{2}\right),$$

und wenn man im allgemeinen Integral die willkürlichen Konstanten G_k und H_k derart bestimmt, daß für $t = 0$ T_k und $\frac{dT_k}{dt}$ auch gleich Null werden, so erhält man:

$$G_k = -\frac{4}{\pi^2}\frac{pl^4}{qs}\frac{1}{k^3}\frac{\sin\frac{k\pi\lambda}{2l}}{k^2\pi^2b^2 - a^2l^2}$$

und

$$H_k = -\frac{4}{\pi^3}\frac{pl^5a}{qsb}\frac{1}{k^4}\frac{\sin\frac{k\pi\lambda}{2l}\cos\frac{k\pi\lambda}{2l}}{k^2\pi^2b^2 - a^2l^2},$$

wonach die Formeln (15) und (17) die oben angeführte Form für z_2 ergeben.

Die Formel (23) liefert also die Lösung der Aufgabe über die erzwungenen Schwingungen eines Stabes unter der Wirkung einer auf einer kurzen Strecke λ gleichförmig verteilten Last, welche sich mit der Geschwindigkeit a längs des Stabes bewegt.

Die Formel (23) setzt voraus, daß keiner der im Nenner vorkommenden Ausdrücke

$$k^2\pi^2 b^2 - a^2 l^2 = 0$$

wird.*)

Wäre eine derartige ganze Zahl $k = k_1$ vorhanden, daß

$$k_1^{\,2}\pi^2 b^2 - a^2 l^2 = 0 \tag{26}$$

sei, dann müßte man die dem Werte $k = k_1$ entsprechenden Glieder durch folgende Glieder ersetzen:

$$-\frac{1}{qs}\,\frac{2pl\cdot\sin\frac{k_1\pi\lambda}{l}}{k_1^{\,2}\pi^2 a}\cdot t\sin\frac{k_1\pi x}{l}\cdot\cos\frac{k_1\pi}{l}\left(at+\frac{\lambda}{2}\right)$$
$$+\frac{1}{qs}\,\frac{2pl^2}{k_1^{\,3}\pi^3 a^2}\sin\frac{k_1\pi\lambda}{2l}\cos\frac{k_1\pi\lambda}{2l}\sin\frac{k_1\pi x}{l}\sin\frac{k_1\pi a t}{l},$$

wie es aus (24) folgt, und alle die Summen von $k = 1$ bis $k = \infty$, $k = k_1$ ausgenommen, betrachten.

Die Formel (26) sagt eine gewisse Art von Synchronismus aus zwischen der Periode einer dem Stabe zugehörenden freien Schwingungsart und dem Zeitintervalle, in welchem die Last die ganze Stablänge l durchläuft. Die Zahl der einfachen Schwingungen, welche dem Werte $k = k_1$ entspricht, ist:

$$n_1 = \frac{\pi^2 k_1^{\,2} b}{\pi l^2} = \frac{\pi k_1^{\,2} b}{l^2}$$

und die entsprechende halbe Schwingungsperiode:

$$\tau_1 = \frac{l^2}{\pi k_1^{\,2} b}.$$

Die Zeit, welche die Belastung gebraucht, um die Länge l durchzulaufen, ist

$$T = \frac{l}{a}.$$

So sieht man, daß die Relation (26) mit der folgenden

$$T = k_1 \tau_1 \tag{27}$$

gleichbedeutend ist.

Man kann dieser Relation noch eine andere anschauliche Form geben: wenn man mit τ die halbe Periode des Grundtons ($k = 1$) des Stabes bezeichnet, so hat man

$$\tau_1 = \frac{\tau}{k_1^{\,2}}$$

*) Das Auftreten dieser unendlichen Koeffizienten rührt bekanntlich daher, daß wir unser Problem ohne Berücksichtigung der Reibung angesetzt hatten. Es ist dies der Kürze halber geschehen, da bei Einführung von Reibungsgliedern das Problem sich ohne weitere Schwierigkeiten nach den gleichen Methoden behandeln läßt.

und die Formel (27) nimmt die folgende Form an:

$$(27') \qquad T = \frac{\tau}{k_1}$$

oder

$$(27'') \qquad a = \frac{k_1 l}{\tau}.$$

Für die meisten in der Technik gebräuchlichen Fälle wird der Wert (27″) für die Geschwindigkeit a, bei welchem der oben angedeutete Synchronismus stattfinden kann, ein sehr großer, in der Praxis noch nicht vorkommender werden.

§ 8.

Wollen wir jetzt zur Betrachtung der punktförmigen Belastung übergehen.

Man braucht nur in die Formel (23) für p seinen Wert

$$p = \frac{P}{\lambda}$$

einzusetzen und zur Grenze $\lambda = 0$ zu übergehen.

Man hat dann

$$\lim p \sin\frac{k\pi\lambda}{2l} = \lim \frac{P}{\lambda}\sin\frac{k\pi\lambda}{2l} = \frac{P}{2l}k\pi$$

und die Formel (23) wird:

$$(28) \qquad \begin{cases} z_2 = \dfrac{2Pl^3}{\pi^2 qs}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^2(k^2\pi^2b^2 - a^2l^2)}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi at}{l} \\ \qquad - \dfrac{2Pl^4a}{\pi^3 qsb}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^3(k^2\pi^2b^2 - a^2l^2)}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k^2\pi^2bt}{l^2}, \end{cases}$$

wobei im Falle des oben angedeuteten Synchronismus die zwei dem Werte $k = k_1$ entsprechenden Glieder durch die folgenden

$$-\frac{1}{qs}\frac{Pl}{k_1\pi a}t\sin\frac{k_1\pi x}{l}\cos\frac{k_1\pi at}{l} + \frac{1}{qs}\frac{Pl}{k_1\pi^2a^2}\sin\frac{k_1\pi x}{l}\sin\frac{k_1\pi at}{l}$$

zu ersetzen und die Summen, k_1 ausgenommen, zu betrachten sind.

Diskussion der erhaltenen Resultate.

§ 9.

Zwei Bemerkungen bieten sich sofort dem Praktiker:

1°) Wenn die Belastung P sich *sehr langsam* längs des Stabes bewegt, so wird sie offenbar *statisch* wirken, und in jedem Augenblicke muß die Formel (28) die der statischen Belastung entsprechende Form des Stabes darstellen. Das soll geprüft werden.

2°) Bei der Behandlung des Problems wurde nur die Schwerewirkung der Last, nicht ihre Trägheitswirkung berücksichtigt.

Bei der Trägheitswirkung hängt der Druck, welchen die Last auf den Stab ausübt, von der *Beschleunigung des Angriffspunktes der Last* ab. Dieser Einfluß soll untersucht werden.

§ 10.

Um die *erste von diesen Fragestellungen* zu beantworten, wollen wir vorläufig ein *Beispiel* untersuchen.

Man nehme an, daß im Zeitaugenblick t die Last P bis zur Mitte des Stabes angekommen sei, so daß $\frac{at}{l} = \frac{1}{2}$ ist. Nun wollen wir die Durchbiegung des Stabes für den Angriffspunkt der Last berechnen.

Man weiß, daß diese statische Durchbiegung gleich $\frac{1}{48}\frac{Pl^3}{EJ}$ ist, und es ist nun prüfen, ob die Formel (28) diesen Wert geben wird.

Um die Formel (28) anzuwenden, müssen wir in dieser Formel a verschwindend klein annehmen und

$$\frac{at}{l} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{x}{l} = \frac{1}{2}$$

setzen. Die Formel (28) gibt dann:

$$z_2 = \frac{2Pl^3}{\pi^2 qs} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^4\pi^2 b^2} \sin\frac{k\pi}{2} \sin\frac{k\pi}{2}$$

oder

$$z_2 = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EJ} \sum_{j=0}^{j=\infty} \frac{1}{(2j+1)^4},$$

da $b^2 = \frac{EJ}{qs}$ ist, und alle diejenigen Glieder, für welche k eine gerade Zahl ist, verschwinden, weil dann $\sin\frac{k\pi}{2}$ gleich Null wird.

Es ist aber bekannt, daß die Summe

$$\sum_{j=0}^{j=\infty} \frac{1}{(2j+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

ist, also hat man wirklich

$$z_2 = \frac{1}{48}\frac{Pl^3}{EJ},$$

wie es auch sein muß.

Dieses Verfahren ist nun im *allgemeinen Falle* anzuwenden.

Man nehme also an, daß im betrachteten Zeitmomente t die Last sich im Punkt C, welcher der Abszisse $x = c$ entspricht, befinde, dann ist

$$at = c.$$

Die Gleichungen der elastischen Linie sind in diesem Falle, wie bekannt, die folgenden:*)

$$\zeta_1 = \frac{P}{EJ}\frac{c(l-c)}{6l}\left[(2l-c)x - \frac{x^3}{c}\right]$$

für die Strecke von $x = 0$ bis $x = c$ und

$$\zeta_2 = \frac{P}{EJ}\frac{c(l-c)}{6l}\left[(l+c)(l-x) - \frac{(l-x)^3}{(l-c)}\right]$$

für die Strecke von $x = c$ bis $x = l$.

Wenn man in der Formel (28) a als verschwindend klein betrachtet, at aber gleich c setzt, so erhält man:

$$(29) \qquad z_2 - \frac{2Pl^3}{qsb^2\pi^4}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^4}\sin\frac{k\pi c}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}$$

und man hat zu zeigen, daß für das Intervall von $x = 0$ bis $x = c$ z_2 gleich ζ_1, und für das Intervall von $x = c$ bis $x = l$ z_2 gleich ζ_2 ist. Um das zu erreichen, braucht man nur eine Funktion $F(x)$ zu betrachten, welche folgender Art definiert ist:

$$F(x) = \zeta_1 \text{ im Intervalle von } x = 0 \text{ bis } x = c,$$
$$F(x) = \zeta_2 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \; x = c \; \text{"} \; x = l$$

und die so definierte Funktion in eine Sinusreihe zu zerlegen; diese Reihe soll dieselbe wie in der Formel (29) sein.

Wenn man

$$F(x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} N_k \sin\frac{k\pi x}{l}$$

setzt, so hat man:

$$N_k = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

Aber der Definition der Funktion $F(x)$ zufolge hat man:

$$\frac{l}{2}N_k = \int_0^l F(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = \int_0^c \zeta_1 \sin\frac{k\pi x}{l}\,dx + \int_c^l \zeta_2 \sin\frac{k\pi x}{l}\,dx$$

$$= \frac{P}{EJ}\frac{c(l-c)}{6l}\cdot\left\{\int_0^c\left[(2l-c)x - \frac{x^3}{c}\right]\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_c^l\left[(l+c)(l-x) - \frac{(l-x)^3}{l-c}\right]\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx\right\}$$

*) Jahrbuch der Hütte, Biegungselastizität. Fall 3.

und nach Ausführung der Rechnung erhält man:

$$N_k = \frac{2P}{EJ}\frac{l^3}{k^4\pi^4}\sin\frac{k\pi c}{l}.$$

Folglich wird die Funktion $F(x)$ so dargestellt:

$$(29') \qquad F(x) = \frac{2P}{EJ}\frac{l^3}{\pi^4}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^4}\sin\frac{k\pi c}{l}\sin\frac{k\pi c}{l},$$

was, mit der Formel (29) verglichen, zeigt, daß

$$z_2 = F(x)$$

ist, wenn man beachtet, daß $EJ = b^2 q s$ ist.

Diese Prüfung ist für den Mathematiker überflüssig, aber dem Techniker sagt sie viel mehr, als die strengste abstrakte Untersuchung.

§ 11.

Wollen wir jetzt die *zweite Bemerkung* erläutern.

Wenn die Belastung $F(x, t)$ auf dem Stabe unmittelbar aufläge, und das Material des Stabes so hart wäre, daß es durch die Wirkung der Last keine lokalen Eindrücke erleidet, so würde die Bewegungsgleichung, dem D'Alembertschen Prinzipe zufolge, anstatt der Form (1) die folgende Form annehmen:

$$(30) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + b^2\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = \frac{1}{qs}F(x,t)\left[1 - \frac{1}{g}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right],$$

wo, wie früher, $F(x, t)$ die Belastung pro Längeneinheit und g die Beschleunigung der Schwerkraft bezeichnet und die z-Achse vertikal angenommen ist.

Das Vorhandensein des Gliedes:

$$\frac{1}{qs}F(x,t)\frac{1}{g}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

würde für die Integration unserer Gleichung sehr große Schwierigkeiten darbieten, aber in der Praxis der Baukonstruktionen ist dieses Glied von einem unmerkbar kleinen Einfluß.

Wollen wir erst ein *Beispiel* betrachten — nämlich die *Eisenbahnschienen.*

Hier dient als Last der Druck des Rades auf die Schiene. Diesen Druck kann man sich auf einer sehr kurzen Strecke λ in der Umgebung des Punktes, wo das Rad die Schiene berührt, irgendwie verteilt denken.

Dieser Druck beträgt im Maximum 7000 kg und die übrigen Konstanten sind: $J = 1037\ \mathrm{cm}^4$, $E = 2250000 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{cm}^4}$. Das Gewicht der Schiene üblichen Profils ist 33,4 kg pro Meter, folglich ist:

$$qs = \frac{33{,}4}{100} \cdot \frac{1}{981} = 0{,}00034\,.$$

Als Länge l kann man die Entfernung zweier Querschwellen voneinander, etwa 90 cm, annehmen.

Also wenn das Kilogramm als Gewichts- und der Zentimeter als Längeneinheit angenommen wird, so hat man folgende Zahlenwerte:

$$b_2 = \frac{EJ}{qs} = \frac{2250000 \cdot 1037}{0{,}00034} = 6{,}86 \cdot 10^{12},$$

$$\frac{2Pl^3}{qsb^2\pi^4} = \frac{2 \cdot 7000 \cdot 90 \cdot 90 \cdot 90}{1037 \cdot 2250000 \cdot \pi^4} = 0{,}045\,.$$

Die Formel (28) zeigt also, daß die Amplitude der Schwingungen in diesem Falle etwa den Wert 0,5 mm erreichen würde.

Wenn die Geschwindigkeit des Zuges 108 Kilometer pro Stunde wäre, dann ist:

$$a = \frac{108 \cdot 1000 \cdot 100}{3600} = 3000 \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}}$$

und

$$\frac{\pi a}{l} = \frac{3{,}14 \cdot 3000}{90} = 104\,,$$

so daß die Beschleunigung $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ ungefähr den Wert

$$0{,}045 \cdot (104)^2 = 490$$

erreichen würde, und es würde $\frac{1}{g}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ etwa $= \frac{1}{2}$ werden, was zu zeigen scheint, daß die Vernachlässigung dieses Gliedes einen beträchtlichen Fehler einführen würde.

Das wäre auch der Fall, wenn das Gewicht des Wagens oder der Lokomotive *starr* auf dem Rade liegen würde. In der Praxis ist es aber nie der Fall, der Druck wird zu den Achsenbüchsen durch die Federn übertragen.

Diese Federn sind so konstruiert, daß unter der Maximalbelastung von 7 Tonnen sie etwa 50 mm nachgeben. Wenn man diesen Umstand beachtet, so wird man zu ganz anderen Schlüssen gelangen.

Die Grundflächen der Federn sind mit den Achsenbüchsen starr verbunden, so daß sie dieselbe Bewegung in der Vertikalebene wie die Berührungspunkte der Räder mit der Schiene machen; der Wagen selbst ist aber mit den Enden der Federn verbunden und sein Schwerpunkt wird nur um soviel schwingen wie diese Enden.

Bezeichne man durch P die auf jeder Feder aufliegende Last, durch f die durch diese Last hervorgerufene statische Durchbiegung der Feder, so erhält man unmittelbar das Resultat, daß die Periode der freien Schwingungen der Last P auf der Feder

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{f}{g}}$$

ist. Wenn die Grundfläche der Feder erzwungenen Schwingungen unterworfen wird, so werden diese Schwingungen auch ein Mitschwingen oder erzwungene Schwingungen in der Last P hervorrufen. Die Amplitude dieses Mitschwingens hat, wie bekannt, ein bestimmtes Verhältnis zu jener der Grundflächen der Federn. Man hat nämlich folgendes Resultat: Wenn die erzwungenen Schwingungen der Grundfläche der Feder aus einer Summe von Gliedern der Form

$$h \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \alpha\right)$$

bestehen, so besteht die Schwingung der Last aus einer Summe von Gliedern der Form

$$h \frac{\tau^2}{T^2 - \tau^2} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \alpha\right),$$

so daß die Amplituden der entsprechenden Einzelschwingungen im Verhältnisse

$$\frac{\tau^2}{T^2 - \tau^2} = \frac{\frac{\tau^2}{T^2}}{1 - \frac{\tau^2}{T^2}}$$

zueinander stehen.

In unserem Falle hat man:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{f}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{5}{981}} = 0{,}45 \text{ sec.}$$

Die Periode τ für die Glieder der in der Formel (28) enthaltenen Summen, welche den Faktor $\sin \frac{k\pi a t}{l}$ besitzen, ist

$$\tau = \frac{2l}{ak}$$

und für jene mit dem Faktor $\sin \frac{k^2\pi^2 b t}{l^2}$ behafteten ist

$$\tau_1 = \frac{2l^2}{k^2\pi b}.$$

Die Perioden τ und τ_1 erhalten ihren größten Wert für $k = 1$, nämlich

$$\tau = \frac{2l}{a} = \frac{2 \cdot 90}{3000} = 0{,}06 \text{ sec}$$

und

$$\tau_1 = \frac{2l^2}{\pi b} = \frac{2 \cdot 90 \cdot 90}{\pi \cdot \sqrt{6{,}86} \cdot 10^6} = 0{,}0022 \text{ sec}.$$

Man sieht also, daß im ersten Falle

$$\frac{\tau^2}{T^2} = \left(\frac{0{,}06}{0{,}45}\right)^2 = 0{,}018$$

ist, und im zweiten:

$$\frac{\tau_1^2}{T^2} = \left(\frac{0{,}0022}{0{,}45}\right)^2 = 0{,}000025$$

ist.

Diese Resultate zeigen, daß nur $\frac{1}{50}$ der Beschleunigung der Grundflächen der Federn auf die Last übertragen wird, also daß der vom Rade auf die Schiene ausgeübte Druck sich nicht mehr als um 1% von dem Gewichte der Last unterscheidet, d. h. daß er in den Grenzen etwa von $0{,}99\ P$ bis $1{,}01\ P$ schwankt.

Zu ganz analogen Resultaten gelangt man, wenn man auch die übrigen in der Praxis vorkommenden Fälle untersucht, was in einer ziemlich allgemeinen Art durchgeführt werden kann, indem man die Durchbiegung des Stabes und die zulässige Spannung anstatt der anderen den Stab charakterisierenden Konstanten benutzt.

Man wird sich überzeugen, daß das Glied

$$\frac{1}{qs} F(x, t) \frac{1}{g} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \tag{31}$$

immer einer praktisch unmerklichen Variation der Belastung $F(x, t)$ entspricht, so daß diese Belastung als die wirkende Kraft angesehen werden kann. Wenn man aus irgend welchen Gründen den Einfluß dieser Variationen untersuchen will, so hat man nur die oben angegebenen Resultate als die erste Annäherung anzusehen, das Glied (31) als eine Störungsfunktion zu betrachten und die Methode der sukzessiven Annäherungen anzuwenden, ganz analog dem, wie es in der theoretischen Astronomie gemacht wird.

Ehe wir zum zweiten Beispiel übergehen, wollen wir noch den Einfluß der Geschwindigkeit der Last für den Fall der Eisenbahnschienen näher betrachten.

Da

$$b^2 = 6{,}86 \cdot 10^{12}$$

ist, so ist

$$b = 2{,}62 \cdot 10^6, \quad \frac{a}{b} = \frac{3000}{2{,}62 \cdot 10^6} = \frac{1}{870}, \quad \frac{a^2 l^2}{\pi^2 b^2} = \frac{3000 \cdot 3000 \cdot 90 \cdot 90}{\pi^2 \cdot 6{,}86 \cdot 10^{12}} = \frac{1}{940},$$

und

$$\frac{al}{\pi b} = \frac{1}{31}.$$

Wenn man die Formel (28) in folgender Art schreibt:

$$(28') \quad \begin{cases} z_2 = \dfrac{2Pl^3}{qsb^2\pi^4} \displaystyle\sum_{k=1}^{k=\infty} \dfrac{1}{k^4\left(1 - \dfrac{a^2l^2}{k^2\pi^2b^2}\right)} \sin\dfrac{k\pi x}{l} \sin\dfrac{k\pi a t}{l}, \\ -\dfrac{2Pl^3}{qsb^2\pi^4}\dfrac{al}{\pi b} \displaystyle\sum_{k=1}^{k=\infty} \dfrac{1}{k^5\left(1 - \dfrac{a^2l^2}{k^2\pi^2b^2}\right)} \sin\dfrac{k\pi x}{l} \sin\dfrac{k\pi a t}{l}, \end{cases}$$

so sieht man ein, daß der Faktor $1 - \frac{a^2l^2}{k^2\pi^2b^2}$ sich von 1 weniger als um $\frac{1}{940}$ unterscheidet, so daß man diesen Faktor durch 1 ersetzen kann, und dieses um so mehr, da die Größe b^2 nie bis zu $\frac{1}{1000}$ ihres Wertes bekannt sein kann, weil schon eine Abnutzung um $\frac{1}{20}$ mm der oberen Fläche der Schiene das Trägheitsmoment des Querschnitts mehr als um $\frac{1}{1000}$ seines Wertes ändert.

Das zweite Glied in der Formel (28′) beträgt weniger als $\frac{1}{30}$ des ersten und kann auch praktisch vernachlässigt werden.

Wenn man beachtet, daß $\frac{2}{\pi^4} = \frac{1}{48{,}7}$ und daß $b^2 \cdot qs = EJ$ ist, so kann man die angenäherte Formel schreiben:

$$(32) \qquad z_2 = \frac{1}{48{,}7} \cdot \frac{Pl^3}{EJ} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^4} \sin\frac{k\pi x}{l} \sin\frac{k\pi a t}{l},$$

und wenn man diese Formel mit der Formel (29′) vergleicht, so sieht man, daß sogar bei der größten üblichen Geschwindigkeit des Zuges die auf die Schiene wirkende Last als eine statische angesehen werden kann.

Nähere Betrachtungen über diesen Gegenstand sind von rein praktischem Interesse und gehören nicht zum Zwecke dieser Abhandlung.

§ 12.

2. Beispiel. *Ein an beiden Enden frei gestützter Stab ist der Wirkung einer im Punkte $x = c$ angreifenden periodischen Kraft unterworfen. Diese Kraft ist der z-Achse parallel gerichtet und ihre Intensität durch die Formel*

$$F = P \sin nt$$

dargestellt. Es wird verlangt, die im Stabe erzwungenen Schwingungen zu bestimmen.

Um in diesem Falle die allgemeine Formel (22) anwenden zu können, muß man wieder die in einem Punkte konzentriert angreifende Kraft als den Grenzfall einer auf einer verschwindend kleinen Strecke λ gleichförmig verteilten Kraft ansehen.

Man setze also erst:

$$p = \frac{P}{\lambda}$$

und denke sich die Funktion $F(x, t)$, welche die Belastung darstellt, in der folgender Art definiert:

$$F(x, t) = 0 \qquad \text{im Intervalle von } x = 0 \text{ bis } x = c - \frac{\lambda}{2},$$
$$F(x, t) = p \sin nt \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad x = c - \frac{\lambda}{2} \text{ bis } x = c + \frac{\lambda}{2},$$
$$F(x, t) = 0 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad x = c + \frac{\lambda}{2} \text{ „ } x = l,$$

dann hat man:

$$\int_0^l F(x, t) \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx = p \int_{c-\frac{\lambda}{2}}^{c+\frac{\lambda}{2}} \sin nt \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot dx$$
$$= \frac{2pl}{k\pi} \sin \frac{k\pi\lambda}{2l} \sin \frac{k\pi}{l}\left(c + \frac{\lambda}{2}\right) \sin nt.$$

Folglich

$$N_k = \frac{p}{k\pi} \sin \frac{k\pi\lambda}{2l} \sin \frac{k\pi}{l}\left(c + \frac{\lambda}{2}\right) \sin nt,$$

wonach die Formel (22) oder einfacher die Gleichungen (15) und (16) das folgende Resultat liefern:

$$(33)\quad \begin{cases} z_2 = \dfrac{1}{qs} \dfrac{pl^4}{\pi} \displaystyle\sum_{k=1}^{k=\infty} \dfrac{1}{k} \dfrac{\sin \frac{k\pi\lambda}{2l} \sin \frac{k\pi}{l}\left(c + \frac{\lambda}{2}\right)}{k^4\pi^4 b^2 - n^2 l^4} \sin \dfrac{k\pi x}{l} \sin nt \\ \quad - \dfrac{1}{qs} \dfrac{pl^6 n}{\pi^3 b} \displaystyle\sum_{k=1}^{k=\infty} \dfrac{1}{k^3} \dfrac{\sin \frac{k\pi\lambda}{2l} \sin \frac{k\pi}{l}\left(c + \frac{\lambda}{2}\right)}{k^4\pi^4 b^2 - n^2 l^4} \sin \dfrac{k\pi x}{l} \sin \dfrac{k^2\pi^2 bt}{l^2}, \end{cases}$$

wobei angenommen wird, daß es keine solche ganze Zahl k gibt, daß einer der Nenner gleich Null wäre.

Falls aber ein solcher Wert $k = k_1$ existiert, so daß

$$(34)\qquad k_1^4 \pi^4 b^2 - n^2 l^4 = 0$$

ist, oder daß

$$\frac{k_1 \pi^2 b}{l^2} = n$$

ist, dann muß man die Summe der beiden dem Werte $k = k_1$ entsprechenden Glieder durch die folgenden

$$(35)\qquad \begin{cases} -\dfrac{1}{qs}\dfrac{pl}{k_1\pi}\dfrac{\sin\dfrac{k_1\pi\lambda}{2l}\sin\dfrac{k_1\pi}{l}\left(c+\dfrac{\lambda}{2}\right)}{2n}\, t\cos nt\sin\dfrac{k_1\pi x}{l}, \\ +\dfrac{1}{qs}\dfrac{p}{k_1\pi}\dfrac{\sin\dfrac{k_1\pi\lambda}{2l}\sin\dfrac{k_1\pi}{l}\left(c+\dfrac{\lambda}{2}\right)}{2n^2}\sin nt\sin\dfrac{k_1\pi x}{l} \end{cases}$$

ersetzen und in der Formel (33) die Summen, $k = k_1$ ausgeschlossen, betrachten.

Die Relation (34) zeigt den Synchronismus der Periode der Kraft mit der Periode einer der freien Schwingungen, welche der Stab ausführen kann oder, anders gesagt, den Synchronismus mit einem der Töne, die dem Stabe entsprechen.

Die Formel (35) zeigt die bekannte Resonanzerscheinung, die bei dem Synchronismus stattfindet.

Gehen wir jetzt zum Grenzfall $\lambda = 0$ über.

Man erhält unmittelbar:

$$(36)\qquad \begin{cases} z_2 = \dfrac{1}{qs}\dfrac{Pl^3}{2}\sum\limits_{k=1}^{k=\infty}\dfrac{\sin\dfrac{k\pi c}{l}}{k^4\pi^4b^2-n^2l^4}\sin\dfrac{k\pi x}{l}\sin nt \\ \quad -\dfrac{1}{qs}\dfrac{Pl^5}{2\pi^2}\dfrac{n}{b}\sum\limits_{k=1}^{k=\infty}\dfrac{1}{k^2}\dfrac{\sin\dfrac{k\pi c}{l}}{k^4\pi^4b^2-n^2l^4}\sin\dfrac{k\pi x}{l}\sin\dfrac{k^2\pi^2 b}{l^2}t, \end{cases}$$

nur im Falle des Synchronismus hat man die Summe der zwei dem Werte $k = k_1$ entsprechenden Glieder durch die folgende Summe

$$-\frac{1}{ps}\frac{P}{4l}\frac{1}{n}\,t\cdot\sin\frac{k_1\pi c}{l}\cdot\cos nt\cdot\sin\frac{k_1\pi x}{l}$$

$$+\frac{1}{qs}\frac{P}{4l}\frac{1}{n^2}\sin\frac{k_1\pi c}{l}\sin nt\sin\frac{k_1\pi x}{l}$$

zu ersetzen.

Hier sieht man auch den Effekt der Resonanz deutlich ein; man bemerkt aber dabei, daß die dem Werte $k = k_1$ entsprechenden Glieder fortfallen, wenn die Kraft in dem entsprechenden Knotenpunkte angreift, denn es ist dann:

$$\frac{k_1 c}{l} = \text{einer ganzen Zahl}$$

und

$$\sin\frac{k_1\pi c}{l} = 0.$$

Diese Beispiele zeigen, wie die entwickelte Methode anzuwenden ist; es wurde der gestützte Stab nur wegen der Einfachheit der Rechnungen betrachtet. Die anderen Fälle bieten auch keine Schwierigkeiten dar.

Praktische Anwendungen auf Untersuchung der Wirkung der beweglichen Last im Eisenbahnbau und auf Untersuchung der Schiffsvibrationen gehören nicht zum Gegenstande und zum Zwecke dieser Abhandlung und werden in den „Abhandlungen des Instituts der Wegebauingenieure“ („Sbornik Instituta Puteii Soobstschenia“) (russisch) Platz finden.

Marine-Akademie zu St.-Petersburg, Winter 1904—1905.