mera barometrica non è necessario di separare dal tubo i pezzi che porta. Basta liberare il pezzo *i''* dal pezzo *i'*.

9. Dovrei ora dare le formule da impiegarsi per dedurre dalle osservazioni barometriche la differenza di livello di due stazioni. Mi riservo di parlarne in un'altra memoria. Osserverò solo che il barometro, come strumento di livellazione, non dà delle misure esatte che quando gli strumenti sono ben regolati sopra un campione, si posson prendere le medie d'un gran numero d'osservazioni e che queste sian fatte prendendo tutte le precauzioni desiderabili; in questo caso soltanto è utile impiegare delle formule complicate come quella di Laplace corretta, di Bauerfeind ec.; ma per un viaggiatore che non faccia altro che un'osservazione, come avviene ordinariamente, bisogna adottare delle formule più semplici, come quella di Sir John Shuckburgh, conosciuta sotto il nome di formula di Babinet, quella di Saint-Robert, ed altre; una sola tavola d'una pagina può, in generale, servire perfettamente alla maggior parte dei viaggiatori. È così che procede il più infaticabile, e senza dubbio il più dotto degli Alpinisti italiani, Felice Giordano.

SOVRA UN PUNTO FONDAMENTALE DELLA TERMODINAMICA CON
L'APPLICAZIONE ALLA RICERCA DEL RAPPORTO DELLE CALO-
RIE DI TEMPERATURA DELL'ARIA ATMOSFERICA E DELL'EQUI-
VALENTE MECCANICO DEL CALORE; PER IL DOTT. PIERO
DONNINI (1).

III.

Determinazione della funzione di Carnot.

6. Riprendiamo adesso l'equazioni (1) e, derivata la seconda di esse rapporto a *t*, paragoniamo il risultato con la prima, e poniamo:

(1) *Continuazione, e fine* V. pag. 56.

$$\frac{dp}{dt} = q \quad \frac{d^2p}{dt^2} = r :$$

sostituendo e riducendo, deberremo all'equazione differenziale :

$$\frac{dC}{dt} + \frac{r}{q} C = A ,$$

donde integrando, con l'avvertenza che :

$$\int \frac{r}{q} = 1. \frac{dp}{dt} ,$$

e designando con $\phi(v)$ una funzione arbitraria di v , si ricava:

$$(11) \quad C \frac{dp}{dt} = A \int \frac{dp}{dt} dt + \phi(v) .$$

La forma della funzione C , che si deduce da questa equazione, è indipendente dalla natura del corpo scelto, e non muta passando dall'uno all'altro di quelli, cui l'equazioni fondamentali (1) sono applicabili, qualunque del resto possa essere per ciascuno di essi la forma della funzione $p = f(v, t)$.

Nel caso però dell'aria atmosferica, al quale abbiamo esplicitamente dichiarato di riferirci, la (11) diviene :

$$(12) \quad C \frac{dp}{dt} = Ap + \phi(v)$$

dove altro non rimane d'indeterminato che la funzione arbitraria $\phi(v)$.

Per definirla basterà considerare quello stato dell'aria, nel quale può ritenersi che questo fluido si comporti come un gas perfetto, e assumerlo come limite. Imperocchè, avendosi per tale stato simultaneamente, (Vedi N. 1, 2, 5) :

$$p = a \frac{t}{v} \quad \text{e} \quad C = At$$

dalla (12) sostituendo si dedurrà $\phi(t) = 0$, donde finalmente:

$$(13) \quad C = A \cdot \frac{p}{\frac{dp}{dt}}.$$

Da questa formula, di cui l'altra $C = At$ è un caso particolare, apparisce che la funzione di Carnot varia proporzionalmente al rapporto della pressione alla sua derivata, presa rispetto alla temperatura assoluta. Vedremo fra breve la relazione, che questo rapporto alla sua volta ha con la temperatura assoluta stessa: in quali casi esso vari in ragion diretta della medesima, in quali si allontani dall'esatta proporzionalità e di quanto.

Per ora avvertiremo che, risultando dalla equazione (8):

$$\frac{dp}{dt} + \frac{1}{v} \left(u + t \frac{du}{dt} \right),$$

la funzione C può anche scriversi:

$$(14) \quad C = At : \left(1 + \frac{t}{u} \frac{du}{dt} \right).$$

E siccome fra i coefficienti a, b, c della (7) sussistono sensibilmente le relazioni:

$$b = \frac{a}{272,5 \cdot 878} \quad , \quad c = \frac{b}{57 \cdot 272,5} ,$$

se per maggior semplicità poniamo:

$$(15) \quad \frac{a}{c} = 57 \cdot 272,5^2 \cdot 878 = m$$

$$\frac{b}{c} = 57 \cdot 272,5 = n$$

dalla (9) si ricaverà :

$$\frac{t}{u} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{-n \frac{t}{v} + 2 \frac{t^2}{v^2}}{n - n \frac{t}{v} + \frac{t^2}{v^2}} :$$

donde apparisce che il termine $\frac{t}{u} \cdot \frac{du}{dt}$ si mantiene una frazione assai piccola, comunque si faccia variare fra limiti molto distosti il valore del rapporto $\frac{t}{v}$; sicchè il fattore, da cui è moltiplicato il prodotto At nella (14), viene ad aver per conseguenza un valore, il quale si scosta sempre assai poco dall'unità, sebbene vari da un caso all'altro.

7. Ciò posto immaginiamo di tenere la nostra massa di aria sotto una pressione costante p_0 , variandone ad arbitrio il volume o la temperatura, e denotiamone con v_0 il volume iniziale, che per più semplicità supporremo corrispondere a 0° centigradi. Si determini il volume che la detta nostra massa occuperà alla temperatura assoluta t , e se ne sostituisca il valore nella (14): traendo profitto delle relazioni che intercedono fra i coefficienti a , b , c , non che di quelle che legano intra di loro a_1 , b_1 , c_1 , avremo, tenuto conto ancora della (6):

$$C = At \cdot G$$

dove:

$$G = \frac{p_0 v_0^3 - b_1 v_0 + 2c_1}{p_0 v_0^3} = \text{cost} :$$

dunque « i valori della funzione C , che si desumono dalla considerazione di vari stati di una massa di aria, mantenuta a « pressione costante, sono proporzionali alle temperature assolute corrispondenti dei detti stati ».

Altrettanto non interviene quando gli stati del fluido considerati sono interamente arbitrari, e si passa dall'uno all'altro,

col variare in un modo qualsiasi due delle tre variabili t, v e p . Ma i valori di C , in questo secondo caso, se non sono più esattamente proporzionali alle dette temperature, si trova però che possono aversi come tali con sufficiente approssimazione.

Infatti la (14), posti in luogo di u e $\frac{du}{dt}$ i loro valori, può mettersi sotto la forma :

$$C = At \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{1} - \frac{k}{t}$$

od anche nell'altra :

$$C = \frac{k - t}{k - 2t} \cdot At$$

dove

$$k = \frac{av^2 - ct^2}{bv - 2ct} = \frac{m - \frac{t^2}{v^2}}{n - 2\frac{t}{v}} v.$$

« Da queste formule, ove si abbiano presenti le (15), si rileva che la funzione C in generale è uguale ad At moltiplicato per un coefficiente, che varia da uno stato all'altro del fluido, mantenendosi però costantemente assai vicino all'unità, di cui è maggiore o minore secondo che k è positivo o negativo ».

La verità di questa illazione apparirà sempre più manifesta dai valori del detto coefficiente, che abbiamo calcolati per due stati assai diversi, assumendo per unità di volume quello occupato da un kilogrammo di aria, sotto la pressione di un metro di mercurio, alla temperatura di 0° centigradi. I dati di cui ci siamo serviti ed i resultamenti ottenuti si rilevano dalla seguente tavoletta, dove k , sta a denotare il rapporto

$$\frac{k - t}{k - 2t}.$$

t	v	$t : v$	k_1
266°,5	1	266,5	$\frac{997}{996}$
500	$\frac{1}{12}$	6000	$\frac{241}{240}$

Come abbiamo avvertito or ora, il coefficiente k_1 di At differisce in più od in meno dall'unità, secondo che k è positivo o negativo, ed è precisamente eguale ad essa soltanto per $k = \infty$, ossia per :

$$\frac{t}{v} = \frac{n}{2} = 7266,25$$

poichè allora :

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad \text{e} \quad C = At.$$

Dunque concludendo « la funzione di Carnot in generale è « della forma :

$$C = (1 \mp \varepsilon) At,$$

« dove ε indica una frazione molto piccola dell'unità, che è po-
« sitiva, nulla o negativa, secondo che il rapporto della tempe-
« ratura assoluta al volume è minore, uguale o maggiore di
« $b : 2c$ ».

Considerata però l'estrema piccolezza di ε , nella pratica si potrà sempre trascurare questo numero, ed assumere addirittura, come costuma farsi, $C = At$.

8. Le conclusioni, a cui siamo divenuti nel n.º precedente, manifestano con quanto fondamento abbia il Clausius stabilito, che la funzione C si poteva con molta probabilità ritenere siccome avente la nota forma: ma esse, a nostro avviso, rendono

ragione altresì della leggiera divergenza, che a noi sembra sussistere, fra due fatti invocati dal Clausius medesimo in appoggio della sua deduzione, e da lui considerati come sensibilmente concordanti (1).

È noto che Clapeyron e Thompson (Vedi l'introduzione) si sono valse della seconda equazione fondamentale, sotto la forma

$$\frac{dQ}{dv} = C \cdot \frac{dp}{dt},$$

per calcolare i valori di C corrispondenti a diverse temperature, togliendo a questo fine direttamente dall'esperienza i dati necessari alla risoluzione della detta equazione. Clapeyron ha scelto le temperature di ebollizione dell'etere, dell'alcool, dell'acqua e dell'olio di trementina sotto la pressione ordinaria: Thompson invece si è limitato alla considerazione del vapor d'acqua; ma siccome ha determinato di grado in grado i valori di C, da 0° a 230° centigradi, così è venuto implicitamente a calcolare questa funzione, anche per le temperature scelte dal Clapeyron.

Riportiamo nella seguente tavoletta le temperature assolute di ebollizione dei liquidi suddetti, sotto la pressione atmosferica, ed i rapporti di ciascuna di esse alla prima o più bassa, non che i rapporti dei valori corrispondenti di C al più piccolo di essi, che il Clausius ha già dedotti dai numeri trovati rispettivamente da Clapeyron e da Thompson.

Nomi dei liquidi	Temperature di	Rapporti di	Rapporto dei valori di C secondo	
	ebollizione	queste temper.	Clapeyron	Thompson
Etere	308°,5	1	1	1
Alcool	351,8	1,14	1,13	1,12
Acqua	373	1,21	1,22	1,17
Olio di trement.	429,8	1,39	1,27	1,31

(1) Clausius. Op. cit., pag. 57 e 58.

Dalla semplice ispezione di questa tabella, si rileva che delle due serie di valori di C , in generale, si accostano più alla esatta proporzionalità con le temperature assolute corrispondenti quelli dovuti al Clapeyron: il qual risultato concorda pienamente con la nostra teoria, avendo il Clapeyron istesso operato a pressione costante.

Ma indipendentemente da ciò, l'approssimazione più grande, a cui le nostre formole aprono l'adito in molte indagini fisiche, apparirà anche sotto più viva luce dall'applicazione, che siamo per farne alla ricerca del *rapporto delle calorie di temperatura dell'aria a pressione ed a volume costante, ed alla determinazione dell'equivalente meccanico del calore*.

IV.

APPLICAZIONI

Rapporto delle calorie di temperatura dell'aria atmosferica. Equivalente meccanico del calore.

9. Le calorie di temperatura, a pressione ed a volume costante K ed N , di un corpo qualunque sono legate da una equazione (1), la quale, posto in luogo di C il suo valore dato dalla (13), e facendo capitale della relazione (16), assume la forma:

$$K - N = A \frac{pv}{t} = Au :$$

donde apparisce intanto che « la differenza delle dette calorie « di temperatura dell'aria non è una quantità costante, ma « sibbene una funzione della temperatura e del volume ».

E siccome supposta la pressione p costante, e designato con w il volume occupato sotto la medesima da un kilogrammo di aria, alla temperatura iniziale di $0^{\circ} C$, si ha:

$$(16) \quad K - N = A \alpha \cdot p w$$

(1) De Saint Robert, Op. cit., pag. 66.

così è visibile che « la suddetta differenza delle calorie di temperatura si mantiene invariabile, finchè la pressione rimane la stessa ».

Consideriamo adesso il nostro kil. di aria sempre alla temperatura di 0° C, ma sotto la pressione $p_0 = 1^m$, ed assumiamo, conforme alle convenzioni prestabilite, il volume occupato dal medesimo per unità di volume. Se denotansi con c' e c'' i valori particolari, che prendono K ed N alla pressione p_0 , e si combina l'equazione (16) coll'analogia relativa al caso presente, si deverrà agevolmente all'equazione

$$(17) \quad K - N = p w (c' - c''):$$

dalla quale si rileva che la differenza delle calorie di temperatura dell'aria a pressione ed a volume costante, comunque vari da una pressione all'altra, è facile a determinarsi, quando si conosca il valore, che ha sotto una data pressione iniziale.

Ora il Regnault, riassumendo i risultati delle sue indagini sperimentali, intorno alle calorie di temperatura a pressione costante, si esprime in questi termini: « Nelle esperienze sull'aria atmosferica, fatte sotto pressioni che hanno variato da t a 10 atmosf., non ho trovato differenze di sorta fra le quantità di calore, che una medesima massa di questo gas abbandona, raffreddandosi di uno stesso numero di gradi. Così, contro alle esperienze di Delaroche e Berard, che hanno constatato una differenza notevolissima sotto pressioni, che variavano solamente da 1^{at} ad $1^{at},33$, le calorie di temperatura di una medesima massa di gas sarebbero indipendenti dalla sua densità (¹) ».

Ammettendo questa conclusione del Regnault come esatta, se ne inferisce che debbono necessariamente variare, da una pressione all'altra, le calorie di temperatura a volume costante; le quali nei singoli casi verranno ad esser note, quando si abbia il mezzo di calcolare il rapporto di esse alle calorie di temperatura a pressione costante. Ora l'inverso di questo rapporto, ricavato dalla (17), è:

(1) *Comptes Rendus de l'Academie ec.* T. XXXVI, p. 685.

$$(18) \quad \frac{c'}{N} = \frac{1}{1 - \beta pw}$$

dove

$$\beta = 1 - \frac{c''}{c'} :$$

e poichè il valore del prodotto pw può sempre aversi dalla tavola di Regnault o dalla nostra formola (6), così non resta che a determinare il rapporto $c' : c''$ corrispondente allo stato assunto come iniziale.

10. A quest'oggetto rammentiamo che la pressione d'una colonna di mercurio alta un metro, presa per unità, equivale ad 1^{at},31579, e che il volume occupato, a zero gradi cent., da un kil. di aria sotto la pressione ordinaria è 0^m,77329; e nella (7), in luogo di p e di v , poniamo rispettivamente :

$$\frac{p}{10330 \cdot 1,31579} \quad , \quad \frac{v}{0,5877} .$$

La detta equazione verrà così ad esprimere le quantità p e v nelle unità consuete, cioè le pressioni in kilog. per metro quadrato ed i volumi in metri cubi: e se per più brevità conveniamo di continuare a rappresentare con a , b e c i nuovi valori dei coefficienti della medesima, si troverà:

$$a = 29,36497$$

$$b = 29,314 \cdot 0,5877 \cdot \alpha \cdot b_1$$

$$c = 29,314 \cdot 0,5877^2 \cdot \alpha^2 \cdot c_1$$

dove α , b_1 e c_1 conservano i valori, che sono stati loro attribuiti per l'addietro.

Ora la differenza delle calorie di temperatura c' e c'' , sotto la pressione iniziale p_0 , è data dalla formola:

$$c' - c'' = A \left(a - \frac{b}{\alpha v_0} + \frac{c}{\alpha^2 v_0^2} \right) :$$

indi se prendiamo $p_a = 1^{\text{at}}, 31579$ e perciò $v_0 = 0,5877$, e adottato per A il valore $\frac{1}{425}$, che sembra essere il più probabile, sostituiamo in vece dei coefficienti a , b e c i valori si avrà:

$$c' - c'' = 0,068997 :$$

d'onde, poichè secondo Regnault $c' = 0,2375$, si trae finalmente:

$$\frac{c'}{c''} = 1,409 .$$

Questo valore del rapporto delle calorie di temperatura, a pressione ed a volume costante, dell'aria atmosferica non differisce che di 0,001 da quello (1,41) che suole comunemente usarsi, e che il Clausius ⁽¹⁾ medesimo suggerisce di preferire, limitandosi però alla seconda decimale: d'altrettanto si scosta ma in eccesso dal valore 1,408, che è dal Rankine ⁽²⁾ ritenuto come il più esatto: ma è d'uopo osservare che esso non può legittimamente adottarsi se non che nei casi, in cui la pressione si allontana poco dalla ordinaria.

Infatti il valore del detto rapporto diminuisce lentamente aumentando la pressione; poichè scema insieme il valore del prodotto pv , che bisogna sostituire nella (18), dove $\beta = 0,290277$. All'incontro, facendosi l'aria di mano in mano più rarefatta, e posto che nelle sue dilatazioni a temperatura costante, questo fluido si uniformi alla medesima legge (rappresentata dalla (6)), che segue nelle sue compressioni, il detto rapporto crescerà, ma quasi insensibilmente; dacchè in questa ipotesi, per quanto grande si voglia supporre il volume occupato dal nostro kilogrammo di aria, il più gran valore che può assumere il rapporto stesso non giunge a superare di 0,0008 quello trovato di sopra. Dunque il valore 1,41 ordinariamente attribuito al detto rapporto, e riguardato come costante, non è che un limite verso il quale il medesimo si avvicina, a misura che il fluido si viene rarefacendo, senza poterlo raggiungere mai: e questa con-

(1) Op. cit., pag. 292.

(2) Op. cit., pag. 318.

clusione si deve a dirittura considerare come fornita di quel medesimo grado di esattezza, di cui gode l'ipotesi che l'aria atmosferica segua la stessa legge, sì nelle sue compressioni che nelle dilatazioni a temperatura costante.

La tavola seguente contiene nell'ultima colonna i valori del rapporto cercato, corrispondenti a diverse pressioni comprese fra una e ventisei atmosfere. Le cifre che Gay-Lussac e Welter, Dulong, Masson, Weisbach ed altri hanno proposto per questo rapporto, desumendole dall'esperienza, e sempre nella supposizione che fosse invariabile, sono così conosciute che non accade fermarsi a dire, quali di esse concordino di più coi nostri risultati. Ci sembra per altro che non sia fuor di luogo avvertire che, grazie ai valori di $c' : N$ già calcolati, o che si possono nei singoli casi determinare mediante la (18), viene a sparire quell'incertezza, che il Clausius ha notato sussistere circa i valori da assegnarsi alle cifre decimali, al di là della seconda, quando ha proposto di adottare pel rapporto delle due calorie di temperatura il valore 1,41, siccome il più probabile. Ecco pertanto la tavola.

Pressioni in metri di mercurio	Volumi corrispondenti	Prodotti $p \cdot w$	Valori del rapporto $\frac{c'}{N}$
1,000000	1	1,000000	1,40900
3,987432	$\frac{1}{4}$	0,996858	1,40719
7,945696	$\frac{1}{8}$	0,993212	1,40510
11,882232	$\frac{1}{12}$	0,990186	1,40337
15,804480	$\frac{1}{16}$	0,987780	1,40199
19,719880	$\frac{1}{20}$	0,985994	1,40097

11. Per dare un altro saggio delle approssimazioni maggiori, che l'uso delle nostre formole rende possibili, applichiamo l'equazione (19) alla determinazione del valore dell'equivalente meccanico del calore $J = \frac{1}{A}$, assumendo il rapporto $\frac{c'}{c''}$ come noto ed eguale a 1,41.

Da questo valore di $\frac{c'}{c''}$ desumendosi :

$$c' - c'' = 0,069$$

la suddetta formola somministra visibilmente :

$$J = 424^{\text{km}}, 985.$$

Siffatta via è stata già tenuta da molti altri per calcolare J : ma le cifre trovate da essi sono tutte inferiori alla precedente. De Saint Robert e Combes per es. sono divenuti rispettivamente ai numeri 422,8, 422,98: Clausius nel 1850, avendo assunto:

$$c' = 0,267 \quad \text{e} \quad \frac{c'}{c''} = 1,421$$

dedusse dai suoi calcoli $J = 370^{\text{km}}$: nel 1864 tornò sopra la questione, sostituì al precedente valore di c' quello dovuto al Regnault, e preso il rapporto $\frac{c'}{c''} = 1,41$ ne venne a desumere $J = 424$.

Ora è noto che Joule, da un numero assai grande di esperienze, sul calore generato dall'attrito dell'acqua, del mercurio ec. ha dedotto per l'equivalente meccanico del calore il valore medio di 425 kilogrammetri, che è ritenuto comunemente per il più probabile. La cifra determinata ultimamente dal Clausius è già molto vicina a questo valore di J ; ma la nostra si accosta ancora di più ad essa, poichè ne differisce soltanto di $0^{\text{km}}, 015$.

Tale concordanza quasi assoluta, fra i risultati di due processi così differenti di natura, mentre è una prova luminosa

dell'esattezza, di cui sono dotati i processi medesimi, vale a porre sempre più in sodo che il valore più probabile dell'equivalente meccanico del calore è di 425 kilogrammetri.

OSSERVAZIONI SPETTROSCOPICHE DI MACCHIE SOLARI FATTE A
FIRENZE; LETTERA DEL PROF. G. B. DONATI A P. TACCHINI.

Firenze, il 28 Aprile 1872.

Avrei desiderato inviarle prima d'ora qualche nota da pubblicare fra le *Memorie degli Spettroscopisti italiani*: ma come posso fare io a mandarle regolarmente qualche cosa che sia degna di nota?

Da tre anni a questa parte io non ho più Osservatorio; giacchè il vecchio è stato completamente smontato, e il nuovo, che si sta costruendo fuori di città, è tuttora nelle mani dei muratori, e non è da vero condotto per anche a tal punto da potervi collocare istrumenti.

In questo necessario periodo di transizione (che però non avevo previsto sì lungo) io feci in principio montare in un locale provvisorio il gran rifrattore di Amici, con la speranza che avrei potuto farvi qualche osservazione; ma però dovei ben presto farlo smontare affine di portare la pesante sua base sul luogo destinatole nel nuovo Osservatorio, prima che le costruzioni che si andavano facendo ne rendessero più difficile la collocazione.

Ora poi, per non rimanere affatto senza alcun istrumento, ho fatto montare (sempre provvisoriamente) un piccolo cannocchiale in prossimità del luogo ove va sorgendo il nuovo Osservatorio, e con esso vado facendo ogni tanto qualche piccolo studio ed esperimento, e non già delle regolari osservazioni. Le quali mi è impossibile di intraprendere, perchè essendo quel cannocchiale più di quattro chilometri distante dal luogo dove