Berichtigung der Bewegungsgleichungen für Fernwirkung mit endlicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit Rücksicht auf das Relativitätsprinzip.

Von **Johann Lißner** in Wien.

Die in meiner Abhandlung: „Zur Lehre von der Fernwirkung, Induktion und Strahlung“ (XXIII. Jahrg., 1912, 1. und 2. Quartal dieser Zeitschrift) auf S. 36 aufgestellten Bewegungsgleichungen für Fernwirkung mit endlicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit bedürfen mit Rücksicht auf das von Einstein, Minkowski, Ph. Frank¹⁾ u. a. behandelte Relativitätsproblem einer Berichtigung. Im nachfolgenden löse ich zunächst dieses Problem auf energetischem Wege in der Weise, daß ich die Bewegungsgleichungen eines Systems von frei beweglichen, aufeinander Fernwirkung äußeren Punkten für ein beliebig gewähltes Koordinatensystem aufstelle, und hierauf nehme ich die erwähnte Berichtigung vor. Die wichtigsten Sätze, zu denen ich gelange, sind folgende:

Der Ausdruck für die kinetische Energie irgend eines Punktes des Systems ist im allgemeinen das Produkt der Masse des betrachteten Punktes und der Differenz zweier identischer Funktionen, wobei der Minuend die Differentialquotienten der Koordinaten des betrachteten Punktes und der Subtrahend die Differentialquotienten der Koordinaten des Schwerpunktes des ganzen Systems bezogen auf ein beliebiges Orthogonalkoordinatensystem zu Argumenten hat; die Parameter sind von der Masse unabhängig. Der Subtrahend verschwindet, wenn der Ursprung des Koordinatensystems in einen gegenüber dem Schwerpunkt des betrachteten Systems festliegenden Punkt verlegt wird. Weniger präzise, aber leichter faßlich läßt sich dieser Satz so aussprechen: Die einem Punkt des Systems durch die Fernwirkung der übrigen erteilte kinetische Energie ist gleich der kinetischen Energie dieses Punktes weniger der kinetischen Energie eines gleichen im Schwerpunkt des Systems gelegenen Punktes bezogen auf ein beliebig gewähltes Orthogonalkoordinatensystem.

Die oberwähnte Funktion ist im allgemeinen die Hälfte des ersten Differentialquotienten nach der Zeit einer Summe von Qua-

¹⁾ Vgl. z. B. Ph. Frank, Sitzungsber. d. kais. Ak. d. Wissensch., CXVIII, 1909; Ph. Frank und H. Rothe, *ibid.*, CXIX, 1910.

draten linearer Funktionen der Differentialquotienten der entsprechenden Orthogonalkoordinaten. Die allgemeinen Bewegungsgleichungen des betrachteten Systems weichen von jenen nach der klassischen Mechanik sehr wesentlich ab. Die ersteren gehen in letztere über, wenn die oberwähnte Funktion, wie es in der klassischen Mechanik geschieht, gleich dem halben Differentialquotienten des Quadrates der Geschwindigkeit oder Geschwindigkeitskomponenten gesetzt und der Ursprung des Koordinatensystems in einen Punkt verlegt wird, der gegenüber dem Schwerpunkt des Punktsystems festliegt oder sich gegenüber dem Schwerpunkt geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

Der obige Ausdruck für die kinetische Energie bleibt auch bei Annahme endlicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Fernwirkung unverändert; in den Ausdruck für die ponderomotorische Arbeit sind die Koordinaten der Punkte, bezogen auf ein Koordinatensystem, einzuführen, dessen Ursprung gegenüber dem Schwerpunkt des Punktsystems im betrachteten Augenblick festliegt, und zwar mit Werten, die sie zu verschiedenen Zeiten aufweisen, wie in meiner obzitierten Abhandlung dargelegt; die Koordinaten des Schwerpunktes des Punktsystems, bezogen auf das willkürlich gewählte Koordinatensystem sind dagegen bloß mit den Werten einzuführen, die sie im betrachteten Augenblick aufweisen.

Gegeben sei ein System von n frei beweglichen, ponderomotorische Fernwirkungen aufeinander äußernden Punkten, die von diesen Fernwirkungen herrührende, in der Zeit von t_1 bis t_2 im System geleistete ponderomotorische Arbeit ist dann, der übersichtlicheren Darstellung wegen, zunächst instantane Wirkung vorausgesetzt:

$$M = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{h=1}^{h=n-1} \sum_{k=h+1}^{k=n} \left[P_{h k x} \frac{d(x_h - x_k)}{dt} + P_{h k y} \frac{d(y_h - y_k)}{dt} + P_{h k z} \frac{d(z_h - z_k)}{dt} \right] dt,$$

worin x_h, y_h, z_h die Koordinaten des Punktes h , x_k, y_k, z_k die Koordinaten des Punktes k bezogen auf ein und dasselbe beliebig gewählte Orthogonalkoordinatensystem und $P_{h k x}, P_{h k y}, P_{h k z}$ die zu den Koordinatenachsen parallelen Komponenten der von den Punkten h, k aufeinander ausgeübten ponderomotorischen Kraft darstellen. Da diese Kraftkomponenten Funktionen von $x_h - x_k, y_h - y_k, z_h - z_k$ sind, so ist der Wert von M von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig, die von einem Punkt, z. B. dem Punkt 1 des Systems vermöge der Einwirkung der übrigen geleistete ponderomotorische Arbeit ergibt sich mit

$$M_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=2}^{k=n} \left[P_{1 k x} \frac{dx_1}{dt} + P_{1 k y} \frac{dy_1}{dt} + P_{1 k z} \frac{dz_1}{dt} \right] dt.$$

Sind die die ponderomotorische Wechselwirkung der Punkte des Systems hervorruhenden Erregungszustände unveränderlich und ist das System allen äußeren Einflüssen entzogen, so muß sich die durch diese Wechselwirkung geleistete ponderomotorische Arbeit zur Gänze als Änderung des Bewegungszustandes, als Änderung der kinetischen Energie der Punkte äußern, d. h. es muß:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{h=1}^{h=n} \left(\frac{dB_h}{dt} \right) dt = M,$$

worin dB_h die Änderung der kinetischen Energie des Punktes h im Zeitelement dt bezeichnet. Die kinetische Energie jedes Elements des Systems kann offenbar nur von den eigenen und Systemkonstanten und vom eigenen Bewegungszustand gegenüber dem gewählten Koordinatensystem abhängig sein, kann aber nicht von den individuellen Größen der übrigen Punkte abhängen. Ferner kann eine Verschiebung irgend eines der Punkte in der Richtung einer der Koordinatenachsen, also die zu dieser letzteren parallele Komponente der vom betrachteten Punkt geleisteten ponderomotorischen Arbeit, nur eine Änderung des Bewegungszustandes dieses Punktes in der Richtung derselben Koordinatenachse herbeiführen. Es muß also auch die kinetische Energie jedes Punktes des betrachteten Systems aus drei Komponenten nach den Koordinatenachsen bestehen, d. h.

$$dB_h = dB_{hx} + dB_{hy} + dB_{hz}$$

und weiterhin:

$$\left. \begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{h=1}^{h=n} \left(\frac{dB_{hx}}{dt} \right) \right] dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{h=1}^{h=n-1} \sum_{k=h+1}^{k=n} \left[P_{h k x} \frac{d(x_h - x_k)}{dt} \right] \right\} dt \\ \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{h=1}^{h=n} \left(\frac{dB_{hy}}{dt} \right) \right] dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{h=1}^{h=n-1} \sum_{k=h+1}^{k=n} \left[P_{h k y} \frac{d(y_h - y_k)}{dt} \right] \right\} dt \\ \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{h=1}^{h=n} \left(\frac{dB_{hz}}{dt} \right) \right] dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{h=1}^{h=n-1} \sum_{k=h+1}^{k=n} \left[P_{h k z} \frac{d(z_h - z_k)}{dt} \right] \right\} dt \end{aligned} \right\} (1)$$

und außerdem

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dB_{1x}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{k=2}^{k=n} P_{1 k x} \frac{dx_1}{dt} \right] dt \text{ etc.} \quad (1a)$$

Diese Relationen stellen bekannte Sätze der klassischen Mechanik in einer insofern verallgemeinerten Form dar, als über die Form der Funktion B keine Annahme gemacht ist.

In den Gleichungen (1) ist der Wert der rechten Seiten, wie schon bemerkt, von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig, daher muß es auch der der linken Seiten sein. Läßt sich nun für ein gegebenes Orthogonalkoordinatensystem $\frac{dB_{hx}}{dt}$ ausdrücken durch $\varphi_h\left(\frac{dx_h}{dt}, \frac{d^2x_h}{dt^2}, \frac{d^3x_h}{dt^3}, \dots\right)$, worin φ_h eine erst zu bestimmende Funktion der Differentialquotienten von x_h nach der Zeit ist (von x_h, y_h, z_h , d. i. der Lage des Punktes gegenüber dem Koordinatensystem kann die kinetische Energie desselben offenbar nicht abhängig sein), so wird:

$$\frac{dB_{hy}}{dt} = \varphi_h\left(\frac{dy_h}{dt}, \frac{d^2y_h}{dt^2}, \dots\right); \quad \frac{dB_{hz}}{dt} = \varphi_h\left(\frac{dz_h}{dt}, \frac{d^2z_h}{dt^2}, \dots\right).$$

Geht man auf ein anderes Orthogonalkoordinatensystem über, dessen Achsen zu jenen des ersten parallel sind, dessen Ursprung aber gegenüber dem ersten die Koordinaten $-a, -b, -c$ hat, welche beliebige Funktionen der Zeit sein können, so reicht der einfache Ersatz von x_h, y_h, z_h durch $x_h + a$ bzw. $y_h + b, z_h + c$ auf den linken Seiten der Gleichung (1) nicht aus, um diesen Gleichungen zu genügen, die doch für jedes beliebige Koordinatensystem bestehen müssen. Es können vielmehr nebst den Differentialquotienten von $x_h + a, y_h + b, z_h + c$ auch noch die Differentialquotienten von a, b, c in φ_h eintreten und außerdem noch eine Funktion ψ_h dieser letzteren Differentialquotienten sich an die Funktion φ_h angliedern derart, daß für das neue Koordinatensystem

$$\begin{aligned} \frac{dB_{hx+a}}{dt} &= \Phi_h\left[\frac{d(x_h+a)}{dt}, \frac{d^2(x_h+a)}{dt^2}, \dots, \frac{da}{dt}, \frac{d^2a}{dt^2}, \dots\right] + \\ &+ \psi\left(\frac{da}{dt}, \frac{d^2a}{dt^2}, \dots\right) = \Phi_{ha} + \psi_{ha}. \end{aligned}$$

Analoge Gleichungen erhält man für $\frac{dB_{hy+b}}{dt}$ und $\frac{dB_{hz+c}}{dt}$. Damit die linke Seite der Gleichung (1) einen vom gewählten Koordinatensystem unabhängigen Wert habe, muß:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\left(\frac{da}{dt}\right)} \sum_{h=1}^{h=n} (\Phi_{ha} + \psi_{ha}) &= \frac{\partial}{\partial\left(\frac{d^2a}{dt^2}\right)} \sum_{h=1}^{h=n} (\Phi_{ha} + \psi_{ha}) = \dots \\ &= \frac{\partial}{\partial\left(\frac{db}{dt}\right)} \sum_{h=1}^{h=n} (\Phi_{hb} + \psi_{hb}) = \dots = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Dazu ist zu allererst notwendig, daß die einzelnen Summanden der Gleichung (2) von allen Differentialquotienten der a, b, c unabhängig sind. Wäre dem nicht so, so müßte man Gleichung (2) nach ihnen auflösen können, und diese Differentialquotienten müßten, um der Gleichung (2) zu genügen, bestimmte Werte haben, während sie doch willkürliche Funktionen der Zeit sind.

Daraus ergibt sich zunächst:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{ha} + \psi_{ha} &= X_{1h} \frac{da}{dt} + X_{2h} \frac{d^2a}{dt^2} + \dots + X_h \\ \Phi_{hb} + \psi_{hb} &= Y_{1h} \frac{db}{dt} + Y_{2h} \frac{d^2b}{dt^2} + \dots + Y_h \\ \Phi_{hc} + \psi_{hc} &= Z_{1h} \frac{dc}{dt} + Z_{2h} \frac{d^2c}{dt^2} + \dots + Z_h \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Weiters folgt aus dem Vorstehenden, daß:

$$\frac{\partial^2 (\Phi_{ha} + \psi_{ha})}{\partial \left(\frac{da}{dt} \right)^2} = \frac{\partial^2 (\Phi_{ha} + \psi_{ha})}{\partial \left(\frac{da}{dt} \right) \partial \left(\frac{d^2a}{dt^2} \right)} = \frac{\partial^2 (\Phi_{ha} + \psi_{ha})}{\partial \left(\frac{d^2a}{dt^2} \right)^2} = \dots = 0 \quad (4)$$

Nun kommt in ψ_{ha} keiner der Differentialquotienten von x_h vor; es müssen daher, damit Gleichung (4) bestehen kann, durch die doppelten Differentiationen von Φ_{ha} alle Differentialquotienten von $x_h + a$ daraus verschwinden, was nur dann möglich ist, wenn:

$$\Phi_{ha} = \sum_{f=1}^{f=p} \sum_{g=f}^{g=p} \left[A_{fg} \frac{d^f(x_h + a)}{dt^f} \cdot \frac{d^g(x_h + a)}{dt^g} \right] + \Phi_{1a}, {}^1)$$

worin die A von a und x_h unabhängige Konstante sind und Φ_{1a} eine Funktion der Differentialquotienten von a allein ist. Hieraus und aus Gleichung (3) ergibt sich sofort:

$$\begin{aligned} \psi_{ha} &= - \sum_{f=1}^{f=p} \sum_{g=f}^{g=p} \left(A_{fg} \frac{d^f a}{dt^f} \cdot \frac{d^g a}{dt^g} \right) - \Phi_{1a} + A_1 \frac{da}{dt} + A_2 \frac{d^2a}{dt^2} + \dots \\ \Phi_{ha} + \psi_{ha} &= \sum_{f=1}^{f=g} \sum_{g=f}^{g=p} \left\{ A_{fg} \left[\frac{d^f(x_h + a)}{dt^f} \cdot \frac{d^g(x_h + a)}{dt^g} - \frac{d^f a}{dt^f} \frac{d^g a}{dt^g} \right] \right\} + \\ &\quad + A_1 \frac{da}{dt} + A_2 \frac{d^2a}{dt^2} + \dots, \end{aligned} \quad (5)$$

¹⁾ Lineare Funktionen entfallen natürlich.

worin $A_1, A_2 \dots$ Konstante sind, die später ermittelt, vorläufig aber 0 gesetzt werden sollen. Führt man dann den durch Gleichung (5) gegebenen Ausdruck für $\Phi_{ha} + \psi_{ha}$ in Gleichung (2) ein, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \left(\frac{dx}{dt} \right)} \sum_{h=1}^{h=n} (\Phi_{ha} + \psi_{ha}) &= \sum_{h=1}^{h=n} \left[\mathfrak{U}_{1h} \frac{dx_h}{dt} + \mathfrak{U}_{2h} \frac{d^2 x_h}{dt^2} + \mathfrak{U}_{3h} \frac{d^3 x_h}{dt^3} + \dots \right] \\ \frac{\partial}{\partial \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right)} \sum_{h=1}^{h=n} (\Phi_{ha} + \psi_{ha}) &= \sum_{h=1}^{h=n} \left[\mathfrak{U}'_{1h} \frac{dx_h}{dt} + \mathfrak{U}_{2h} \frac{d^2 x_h}{dt^2} + \mathfrak{U}'_{3h} \frac{d^3 x_h}{dt^3} + \dots \right] \end{aligned} \right\} (6)$$

worin sich die konstanten Koeffizienten $\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2 \mathfrak{U}'_1 \mathfrak{U}'_2$ etc. aus den A_{fg} der Gleichung (5) ohne weiteres ermitteln ließen.

Damit die Gleichungen (6) gleichzeitig bestehen können, muß ein aus einer derselben ermittelter Wert irgend eines der Differentialquotienten von x_h (oder einer linearen Funktion solcher Differentialquotienten), die übrigen Gleichungen (6) identisch erfüllen. Dazu ist angesichts des Umstandes, daß die rechten Seiten der Gleichungen (6) lineare Funktionen der Differentialquotienten von x_h darstellen, im allgemeinen notwendig und ausreichend, daß die rechte Seite jeder der Gleichungen (6) eine Summe von Produkten von Konstanten und einer linearen Funktion von Differentialquotienten von x_h und den Differentialquotienten der Funktion nach der Zeit darstellt, d. h. die Form hat:

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^{h=n} \mathfrak{M}_h \left[\mathfrak{B}_1 \left(\frac{dx_h}{dt} + \alpha_1 \frac{d^2 x_h}{dt^2} + \dots \right) + \right. \\ \left. + \mathfrak{B}_2 \frac{d}{dt} \left(\frac{dx_h}{dt} + \alpha_1 \frac{d^2 x_h}{dt^2} + \dots \right) + \dots \right], \end{aligned} \quad (6a)$$

worin $\mathfrak{M}_h$ eine Konstante des Punktes h und $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ ebenso wie α_1 etc. Konstante sind, die für alle Punkte des Systems denselben Wert haben. Dann reduzieren sich die Gleichungen (6) auf eine einzige, nämlich:

$$\sum_{h=1}^{h=n} \mathfrak{M}_h \left(\frac{dx_h}{dt} + \alpha_1 \frac{d^2 x_h}{dt^2} + \dots \right) = 0,$$

aus der folgt, weil sie gelten muß, welche Funktion von t jedes x_h auch immer ist:

$$\sum_{h=1}^{h=n} \mathfrak{M}_h \frac{dx_h}{dt} = \sum_{h=1}^{h=n} \mathfrak{M}_h \frac{d^2 x_h}{dt^2} = \dots = 0. \quad (7)$$

Diese Gleichung (und die ihr analogen für y_h und z_h) gilt aber nur für den Fall, daß $A_1, A_2 \dots$ der Gleichung (5) 0 gesetzt werden, sie sagt demnach aus, da unter den $\mathfrak{M}$ offenbar nur die Massen der Punkte des betrachteten Systems zu verstehen sind, daß in dem Falle, wo $A_1 = A_2 \dots = 0$ der Ursprung des Koordinatensystems, auf das die x_h, y_h, z_h bezogen sind, gegenüber dem Schwerpunkt des Systems eine unverrückbare Lage hat. Gleichung (5) gilt aber für jedwedes Koordinatensystem der x_h, y_h, z_h . Denkt man sich nun, man wäre in Gleichung (5) von einem Koordinatensystem ausgegangen, bezogen auf welches der Schwerpunkt des betrachteten Systems die Koordinaten a_1, b_1, c_1 hat, während die Koordinaten der Punkte des Systems bezogen auf ein Koordinatensystem, das seinen Ursprung im Schwerpunkt des Systems hat, x_h, y_h, z_h sind, so hätte man einfach in Gleichung (5) x_h durch $x_h + a_1$ zu ersetzen und erhielte dann mit Rücksicht auf Gleichung (6a):

$$\Phi_{ha} + \psi_{ha} = \sum_{f=1}^{f=p} \sum_{g=f}^{g=p} \mathfrak{M}_h \left\{ A_{fg} \left[\frac{d^f(x_h + a_1 + a)}{dt^f} \cdot \frac{d^g(x_h + a_1 + a)}{dt^g} - \frac{d^f a}{dt^f} \frac{d^g a}{dt^g} \right] \right\} + A_1 \frac{da}{dt} + A_2 \frac{d^2 a}{dt^2} + \dots \quad (8)$$

Zum gleichen Koordinatensystem und daher zur selben Gleichung müßte man aber auch kommen, wenn man direkt von einem Koordinatensystem ausgeht, das im Schwerpunkt des betrachteten Systems seinen Ursprung hat. Man hätte dann einfach in Gleichung (5) $A_1 = A_2 \dots = 0$ zu setzen und a durch $a + a_1$ zu ersetzen; das gäbe:

$$\Phi_{ha} + \psi_{ha} = \sum_{f=1}^{f=p} \sum_{g=f}^{g=p} \mathfrak{M}_h \left\{ A_{fg} \left[\frac{d^f(x_h + a_1 + a)}{dt^f} \frac{d^g(x_h + a_1 + a)}{dt^g} - \frac{d^f(a_1 + a)}{dt^f} \frac{d^g(a_1 + a)}{dt^g} \right] \right\} \quad (8a)$$

Die Subtraktion der Gleichung (8a) von (8) ergibt sofort:

$$\begin{aligned} & A_1 \frac{da}{dt} + A_2 \frac{d^2 a}{dt^2} + \dots = \\ & = - \sum_{f=1}^{f=p} \sum_{g=f}^{g=p} \mathfrak{M}_h \left\{ A_{fg} \left[\frac{d^f a_1}{dt^f} \frac{d^g a_1}{dt^g} + \frac{d^f a_1}{dt^f} \frac{d^g a}{dt^g} + \frac{d^f a}{dt^f} \frac{d^g a_1}{dt^g} \right] \right\}. \quad (9) \end{aligned}$$

Der Einfachheit halber sei im folgenden immer von einem Koordinatensystem ausgegangen, das im Schwerpunkt des Punktsystems seinen Ursprung hat, wo dann $A_1 = A_2 = \dots = 0$ ist.

Zu einer etwas näheren Bestimmung der rechten Seite der Gleichung (5) führt die Bemerkung, daß die in einem gegebenen Zeitraume eingetretene Änderung der kinetischen Energie bloß vom Bewegungszustand des betrachteten Punktes zu Anfang und zu Ende dieser Zeit abhängt, wie sich sehr einfach nachweisen läßt. Daraus ergibt sich nämlich sofort, daß $\Phi_{ha} + \psi_{ha}$ ein vollständiges Differential nach der Zeit sein muß und somit angesichts des Baues dieser Funktion und „par symmetrie“ wohl:

$$\begin{aligned} \Phi_{ha} + \psi_{ha} = \frac{\mathfrak{M}_1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \left[\frac{d(x_h + a)}{dt} + \alpha_1 \frac{d^2(x_h + a)}{dt^2} + \dots \right]^2 - \right. \\ \left[\frac{da}{dt} + \alpha_1 \frac{d^2 a}{dt^2} + \dots \right]^2 + \\ + \left[\beta_1 \frac{d(x_h + a)}{dt} + \gamma_1 \frac{d^2(x_h + a)}{dt^2} + \dots \right]^2 - \\ \left[\beta_1 \frac{da}{dt} + \gamma_1 \frac{d^2 a}{dt^2} + \dots \right]^2 + \\ \left. + \dots \dots \dots \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

worin die $\alpha, \beta, \gamma \dots$ für alle Punkte des Systems denselben Wert haben. Nach der gegenwärtig als unter normalen Bewegungsverhältnissen für allgemein gültig angenommenen Formel für die kinetische Energie, reduziert sich Gleichung (10) auf

$$\Phi_{ha} + \psi_{ha} = \frac{\mathfrak{M}_h}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \left[\frac{d(x_h + a)}{dt} \right]^2 - \left(\frac{da}{dt} \right)^2 \right\}. \quad (10a)$$

Setzt man nun noch $x_h + a = \xi_h$, $y_h + b = \eta_h$, $z_h + c = \zeta_h$, so erhält man unter Benützung der Gleichung (7)

$$\frac{da}{dt} = \frac{\sum_{h=1}^{h=n} \mathfrak{M}_h \frac{d\xi_h}{dt}}{\sum_{h=1} \mathfrak{M}_h} \text{ etc.} \quad (11)$$

Aus den Gleichungen (1a) ergeben sich nach Differentiation nach t und Einführung der vorstehend ermittelten Formeln für $\Phi_{ha} + \psi_{ha}$ bzw. $\frac{dB_{hx}}{dt}$ sofort die allgemeinen Bewegungsgleichungen für ein beliebig gewähltes Koordinatensystem in folgender Form:

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathfrak{M}_1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \left[\frac{d\xi_1}{dt} + \alpha_1 \frac{d^2\xi_1}{dt^2} + \dots \right]^2 - \left[\frac{da}{dt} + \alpha_1 \frac{d^2a}{dt^2} + \dots \right]^2 + \right. \\
& \quad \left. + \left[\beta_1 \frac{d\xi_1}{dt} + \gamma_1 \frac{d^2\xi_1}{dt^2} + \dots \right]^2 - \left[\beta_1 \frac{da}{dt} + \gamma_1 \frac{d^2a}{dt^2} + \dots \right]^2 + \dots \right\} = \\
& \quad = \sum_{k=2}^{k=n} \left[P_{1kx} \frac{d\xi_1}{dt} \right] \quad (12)
\end{aligned}$$

und analoge Gleichungen für die η_1 und ζ_1 , aus denen das der kürzeren Schreibung wegen beibehaltene a bzw. b und c mit Hilfe der Gleichung (11) zu eliminieren ist. Macht man bezüglich $\Phi_{ha} + \psi_{ha}$ die der Gleichung (10a) zu Grunde liegende Annahme, so reduzieren sich die Gleichungen (12) auf:

$$\frac{\mathfrak{M}_1}{2} \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{d\xi_1}{dt} \right)^2 - \left(\frac{\sum_{h=1}^{h=n} \left(\mathfrak{M}_h \frac{d\xi_h}{dt} \right)}{\sum_{h=1}^{h=n} \mathfrak{M}_h} \right)^2 \right] = \sum_{k=2}^{k=n} \left(P_{1kx} \frac{d\xi_1}{dt} \right) \quad (12a)$$

und analoge Gleichungen für η und ζ .

Verlegt man den Ursprung des Koordinatensystems in den Schwerpunkt des Systems von n Punkten, so verschwindet das zweite Glied der linken Seite der Gleichung (12a) und man erhält:

$$\mathfrak{M}_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = \sum_{k=2}^{k=n} P_{1kx}; \quad \mathfrak{M}_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} = \sum_{k=2}^{k=n} P_{1ky}; \quad \mathfrak{M}_1 \frac{d^2z_1}{dt^2} = \sum_{k=2}^{k=n} P_{1kz}; \quad (12b)$$

die Fundamentalgleichungen der klassischen Mechanik. Dieselben Gleichungen erhält man auch für den Fall, daß $\frac{da}{dt}$; $\frac{db}{dt}$ und $\frac{dc}{dt}$ konstant sind, weil dann das zweite Glied der linken Seite der Gleichung (12a) gleichfalls verschwindet und $\frac{d^2\xi_1}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2}$ wird.

Das sagt nur den bekannten Satz aus, daß die Fundamentalgleichungen der klassischen Mechanik unverändert bleiben, wenn man an Stelle des ihnen zu Grunde liegenden, ruhenden Koordinatensystems ein gegenüber letzterem sich gleichmäßig in einer Geraden bewegendes einführt und den bekannten Satz der klassischen Mechanik, daß der Schwerpunkt des hier betrachteten Systems sich gegenüber dem angenommenen Koordinatensystem gleichmäßig in einer Geraden bewegt. Die Gültigkeit dieser Sätze und der Bestand der Gleichung (12b) ist aber an die beiden Bedingungen gebunden, daß der Ursprung des Ausgangskordinatensystems der x, y, z gegenüber dem Schwerpunkt des Systems von n Punkten festliegt

oder sich gegenüber diesem Schwerpunkt gleichmäßig und geradlinig bewegt, und daß $\Phi_{ha} + \psi_{ha}$ die durch Gleichung (10a) gegebene Form hat. In allen übrigen Fällen hat man die Gleichung (12) zu benutzen, die allerdings wesentlich komplizierter sind.

Die vorstehenden Ableitungen wurden unter der Voraussetzung der instantanen Wirkung durchgeführt. Nimmt man Fernwirkung mit endlicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit an, so ändert sich an der linken Seite der Gleichungen (12), (12a), (12b) offenbar nichts, denn die kinetische Energie eines Punktes bezogen auf ein gegebenes Koordinatensystem ist in irgend einem Augenblick nur durch den Bewegungszustand dieses Punktes und des Schwerpunktes des Systems in ebendemselben Augenblick gegenüber dem gewählten Koordinatensystem bestimmt. Auf der rechten Seite dieser Gleichungen sind die P durch die in meiner eingangs genannten Abhandlung angegebenen Werte zu ersetzen, in die die Geschwindigkeiten darstellenden Faktoren derselben dagegen a, b, c mit den Werten einzuführen, die sie im betrachteten Augenblick haben, weil diese Größen nur Koordinaten des Schwerpunktes des Systems in diesem Augenblick bezogen auf ein gegebenes Koordinatensystem darstellen. Das erhellt übrigens auch daraus, daß der Wert der gesamten im System geleisteten ponderomotorischen Arbeit unabhängig sein muß von der Wahl des Koordinatensystems. Ersetzt man (für instantane Wirkung) P_{1kx} durch $p_x(\xi_1 - \xi_k)$, wobei ξ_1, ξ_k die Koordinaten der Punkte 1 und k symbolisch darstellen, und bezeichnet man die Werte der verschiedenen Größen zur Zeit t bzw. $t - \tau_{1k}$ dadurch, daß man diese Größen als Funktionen von t bzw. $t - \tau_{1k}$ schreibt, wobei τ_{1k} die Zeit bezeichnet, die die Fernwirkung braucht, um vom Punkt 1 zum Punkt k zu gelangen und umgekehrt, so erhält man für Gleichung (12) bei endlicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wirkung:

$$\mathfrak{M}_1 \frac{d}{dt} \left\{ \left[\frac{d[x_1(t) + a(t)]}{dt} + \alpha_1 \frac{d^2[x_1(t) + a(t)]}{dt^2} + \dots \right]^2 - \left[\frac{da(t)}{dt} + \alpha_1 \frac{d^2a(t)}{dt^2} + \dots \right]^2 + \left[\beta_1 \frac{d[x_1(t) + a(t)]}{dt} + \gamma_1 \frac{d^2[x_1(t) + a(t)]}{dt^2} + \dots \right]^2 - \left[\beta_1 \frac{da(t)}{dt} + \gamma_1 \frac{d^2a(t)}{dt^2} + \dots \right]^2 + \dots \right\} = \sum_{k=2}^{k=n} \left\{ p_x [\xi_1(t) - \xi_k(t - \tau_{1k})] \frac{d[x_1(t) + a(t)]}{dt} + p_x [\xi_1(t - \tau_{1k}) - \xi_k(t)] \frac{d[x_1(t - \tau_{1k}) + a(t)]}{dt} \right\} \quad (13)$$

Gleichung (12 a) geht über in

$$\left. \begin{aligned} & \mathfrak{M}_1 \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{d[x_1(t) + a(t)]}{dt} \right)^2 - \left(\frac{da(t)}{dt} \right)^2 \right] = \\ & = \sum_{k=2}^{k=n} \left\{ p_x [\xi_1(t) - \xi_k(t - \tau_{1k})] \frac{d[x_1(t) + a(t)]}{dt} + \right. \\ & \quad \left. + p_x [\xi_1(t - \tau_{1k}) - \xi_k(t)] \frac{d[x_1(t - \tau_{1k}) + a(t)]}{dt} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (13a)$$

Diese haben an die Stelle der auf S. 36¹⁾ meiner obgenannten Abhandlung gegebenen zu treten.

Aus dem Vorstehenden ergeben sich die eingangs hingestellten wichtigsten Sätze; weitere Folgerungen ergeben sich von selbst aus der obigen Lösung des Relativitätsproblems.

Ich möchte hier noch darauf aufmerksam machen, daß die Gleichungen (12) und (13) auch dann gültig bleiben, wenn die $\mathfrak{M}$ sich ändern, wofern nur zwischen dieser Änderung und der relativen Bewegung der Punkte kein energetischer Zusammenhang besteht, d. h. daß zur Änderung der $\mathfrak{M}$ kein Energieaufwand erforderlich ist, der, ähnlich wie bei der Induktion, in der im System geleisteten ponderomotorischen Arbeit seine Kompensation findet. In diesem letzteren Falle ist die Aufgabe nach der in der obigen Abhandlung angegebenen Methode zu behandeln; es treten zu den Gleichungen

(12) oder (13) noch weitere, welche die $\frac{dm}{dt}$ etc. enthalten. In jedem Falle erhält man die zur Bestimmung der Koordinaten (und der $\mathfrak{M}$) der sämtlichen Punkte erforderliche Anzahl von simultanen Differentialgleichungen.

¹⁾ Dort haben sich zwei offensichtliche Fehler eingeschlichen; die linke Seite soll richtig lauten $\frac{d}{dt} \left(\frac{d\xi_h(t)}{dt} \right)^2$ und auf der rechten haben $\frac{d\xi_h(t - \tau_{hk})}{d(t - \tau_{hk})}$ und $\frac{d\xi_k(t)}{dt}$ zu entfallen.