3. *Über Gestalt und Bildung von Wasserstrahlen, auf welche Töne einwirken; von Paul Cermak.*

(Hierzu Tafel I—III.)

Seit den Untersuchungen Savarts¹⁾ ist es bekannt, daß Wasserstrahlen eine ähnliche Empfindsamkeit gegen in ihrer Nähe erzeugte akustische Schwingungen aufweisen wie die empfindlichen Flammen. Während die empfindlichen Flammen im allgemeinen nur auf die ganz hohen, dem Gehör schon unangenehmen Töne ansprechen, liegt die Empfindsamkeit solcher Wasserstrahlen ungefähr in den Grenzen, zwischen denen die menschliche Stimme Töne zu bilden imstande ist, etwa zwischen 60—1300 Schwingungen. Tyndall mag der erste gewesen sein, der diese Erscheinung zu schönen Vorlesungsversuchen benutzte.²⁾ Er schloß mit einem Gummischlauch einen Steatitbrenner mit kreisförmiger Bohrung (etwa 1 qmm) an seine Wasserleitung und ließ den Strahl schief nach oben ausströmen. In einiger Entfernung von der Ausflußöffnung löst sich der Strahl in Tropfen auf, an Stelle des Strahles tritt ein immer breiter werdender Perlenregen. Tönt nun in der Nähe eine passend gewählte Stimmgabel, so schließen sich die zerstreuten Tropfen zusammen und bilden einen scheinbar ununterbrochenen flüssigen Bogen. Bei sorgfältig gewählter Tonlage konnte Tyndall die Einwirkung einer Stimmgabel, Orgelpfeife oder der menschlichen Stimme bis auf eine Entfernung von 19 m nachweisen. Gelegentlich traten auch statt des einen zwei nebeneinander laufende Strahlen auf. Wurden Schwebungen zweier Tonquellen erzeugt, so sammelte und verstreute der Strahl seine Tropfen im Zeitmaß der Schwebungen.

Beim gelegentlichen Aufbau dieser Vorlesungsversuche

1) F. Savart, Pogg. Ann. 90. p. 389. 1853.

2) J. Tyndall, Der Schall. Deutsche Ausgabe 2. Aufl. 1896.

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 9.

Fig. 10.

Fig. 11.

Fig. 12.

Fig. 13.

Fig. 14.

Fig. 15 a.

Fig. 15 b.

Fig. 15 c.

Fig. 15 d.

machte ich einige merkwürdige Beobachtungen, sobald ich zwei oder mehrere Tonquellen, die im Verhältnis einfacher konsonanter Intervalle standen, auf den Strahl einwirken ließ, und diese veranlaßten mich, den Gegenstand näher zu untersuchen. Dabei ergaben sich die nachstehend beschriebenen Erscheinungen und Beziehungen, die zum Teil auch schon von anderen, z. B. C. Baur¹⁾, Ph. E. Belas²⁾, von letzterem am gerade nach unten fallenden Strahle beobachtet worden sind. Um recht empfindliche Strahlen zu erhalten, ist es nötig, Wirbelbildung in der Nähe der Ausflußöffnung nach Möglichkeit zu vermeiden. Die besten Ergebnisse erhielt ich, wenn der von der Wasserleitung kommende Gasschlauch in ein Glasrohr etwa gleicher Weite (1,5 cm) übergang, das dann kegelförmig in eine Spitze ausgezogen war. Außerdem erwies es sich als zweckmäßig, zwischen Wasserleitungshahn und Ausflußrohr noch einen Windkessel einzuschalten, der erstens einmal die fortwährenden Schwankungen des Wasserdruckes ausglich und zweitens aus dem stark lufthaltigen Wasser störende Luftblasen abfing. Der hohe Druck, unter dem das Wasser ausfloß (etwa 7 Atmosphären, von denen freilich durch Hähne und Leitungen viel verloren ging), scheint erforderlich zum guten Gelingen der Versuche; denn wenn das Wasser nur aus einem in 6 m Höhe angebrachten Wasserbottich kam, gelang es, nur sehr schwach empfindliche Strahlen zu erhalten.

Wirkung einzelner Töne. Einfache Strahlen.

Fließt also z. B. ein Wasserstrahl unter 45° gegen die Horizontale schräg nach oben aus unter solchem Drucke, daß die Wurfparabel die Horizontale wieder in 1—1,5 m Entfernung schneidet, und ist die Ausflußöffnung etwa 1 qmm groß, so bleibt der Strahl etwa 20 cm zusammenhängend und löst sich von da in einen Tropfenregen auf, der wohl wegen des Zusammentreffens der einzelnen Tropfen und deren verschiedene Größe auf dem absteigenden Aste immer breiter wird. Projiziert man nun mit einer starken Lichtquelle den Teil des Strahles, wo er sich in Tropfen auflöst, auf einen nahe zum Strahl gebrachten Schirm, so erscheint der zusammenhängende Teil undurch-

1) C. Baur, Wied. Ann. 23. p. 150. 1884.

2) Ph. E. Belas, Proc. Dubl. Soc. (2) 10. p. 203. 360. 1905.

sichtig, wie ein Glasstab an seiner Stelle aussehen würde, der aufgelöste Teil durchlässig. Nun genügt jede mechanische Erschütterung, jeder Stoß, jedes Geräusch, der gesprochene Laut u. dgl. die Auflösestelle sofort zu verschieben. Die Verschiebung geschieht *immer nach der Seite der Ausflußöffnung* hin. Jedes Geräusch, gleichgültig, ob es durch die feste Auflage oder bloß durch die Luft auf die ausfließende Wassermenge übertragen wird, bewirkt ein früheres Auflösen des Strahles in einzelne Tropfen. Die Größe dieser Verschiebung wächst mit der Intensität der Erschütterung.

Die gefälligste Erscheinung, die man an solchem Strahle sehen kann, tritt nun wie schon erwähnt, dann ein, wenn statt der unregelmäßigen Erschütterungen eines Geräusches die regelmäßigen Vibrationen eines passend gewählten Tones auf den Strahl einwirken können. Auf den ersten Blick scheint nun gerade der umgekehrte Effekt einzutreten. Der Perlenregen verschwindet und der Strahl bleibt zusammenhängend auf seinem ganzen Wege. Hinter der Ausflußöffnung erscheint er vollkommen glatt, in etwa 10—15 cm Entfernung davon scheinen Einschnürungen und Ausbauchungen auf ihm zu entstehen, wie Knoten und Bäuche einer stehenden Welle. Im weiteren Verlaufe des Strahles werden diese wieder undeutlicher, jedenfalls aber erscheint er dem Auge als ein zusammenhängendes Ganze. Neben diesem Hauptstrahle treten noch oft dünnere Strahlen auf, die sich vom Hauptstrahle abzweigen und die einer anderen Parabel folgen, die oft so fein sind, daß sie nur bei ganz starker Beleuchtung wahrgenommen werden können. Projiziert man nun wieder, wie schon oben beschrieben wurde, den Teil des Strahles, wo er sich ohne Beeinflussung durch einen Ton aufzulösen pflegt, auf einen Schirm, so sieht man den ersten Teil des Strahles undurchsichtig; von der Stelle an, wo die Bäuche und Knoten erscheinen, wird er aber lichtdurchlässig. Auch verkürzt sich bei jedesmaligem Wiedereinsetzen des Tones der undurchsichtige Teil des Strahles: ein Zeichen also, daß der Strahl auch jetzt nur in seinem ersten Teile wirklich zusammenhängend ist, während der übrige Teil der Parabel nur dem Auge, das schnell aufeinander folgende Einzelwahrnehmungen nicht getrennt wahrnimmt, ununterbrochen erscheint. Ist die

Schwingungszahl des Tones keine sehr hohe, so genügt schon eine schnelle Augenbewegung, um den Eindruck einzelner Tropfen hervorzurufen; noch besser und bei jeder anwendbaren Tonhöhe zeigt das eine Betrachtung im rotierenden Spiegel.

Um nun die eigentlichen Vorgänge, die bei dieser Beeinflussung durch Töne statthaben mögen, genau feststellen zu können, benutzte ich eine Versuchsanordnung ähnlich der, die Belas¹⁾ bei der Untersuchung des senkrecht herabfallenden Strahles anwandte. Ein Induktorium von etwa 40 cm Schlagweite enthielt in einem Sekundärkreise einige große Leidener Flaschen und eine Zinkfunkenstrecke. Beim Öffnen des Primärstromes entlud sich die in den Flaschen aufgesammelte Elektrizitätsmenge durch die Funkenstrecke und gab so eine momentane, stark ultraviolette Beleuchtung. Zwischen Funkenstrecke und Wasserstrahl war eine große Linse in passender Entfernung so aufgestellt, daß die Mattscheibe eines photographischen Apparates im Moment des Funkenüberganges etwa in ihrer ganzen Ausdehnung und intensiv beleuchtet wurde. Das Objektiv war natürlich so eingestellt, daß der Wasserstrahl scharf abgebildet wurde.

Einfluß der Tonhöhe. Die Abbildungen 1—5 der beigegebenen Tafeln sind auf solche Weise gewonnen und sollen zunächst einmal zeigen, wie Töne verschiedener Höhe auf einen gegebenen Wasserstrahl einwirken. Der Strahl floß unter einem Winkel von 30° gegen die Horizontale schräg nach oben aus einer Öffnung von 0,78 qmm unter solchem Drucke, daß pro Minute 150 ccm Wasser ausflossen. (Auf den Einfluß, den Austrittswinkel, Austrittsöffnung und Ausflußmenge auf die Erscheinungen haben, soll später eingegangen werden.) Die Einstellung der Kamera war so gewählt, daß auf den Originalphotographien in etwa anderthalbfacher Größe abgebildet wurde. Die abgebildete Stelle befand sich auf dem absteigenden Aste der Parabel, kurz hinter deren Scheitel, in einem Abstand von etwa 60—70 cm von der Ausflußöffnung. Die 5 Bilder entsprechen den Tönen der Stimmgabeln 128, 256, 512, 768 und 896. Die Aufnahme geschah immer dann, wenn nach Anschlagen der Stimmgabel die Einwirkung des

1) Ph. E. Belas, l. c.

mit dem Anschlagen unvermeidlich verbundenen Geräusches verschwunden war und der Strahl dem Auge im schwach rot erleuchteten Zimmer möglichst ruhig erschien.

Die Bilder zeigen zunächst, daß der Strahl immer aus einzelnen Tropfen besteht. Weiterhin zeigt sich sofort, daß die Regelmäßigkeit der Tropfenbildung bei den Tönen 512 und 768 besonders gut, am allerbesten bei 512 ausgebildet ist. Es hat den Anschein, als wäre ein Resonanzgebiet vorhanden, dessen Maximum bei etwa 512 liegen würde. Dem bloßen Auge erscheint dann der Strahl vom Anfang bis zum Ende zusammenhängend, während bei wesentlich höheren oder tieferen Tönen nur ein geringerer Teil des schon in Tropfen aufgelösten Strahles zusammenhängend erscheint. Nun näheres zu den einzelnen Bildern: Bild 1 (Ton 128) zeigt die geringste Regelmäßigkeit; das Auge sieht aber auch in diesem Falle auf dem aufsteigenden Parabelaste deutlich Bäuche und Knoten. Auf dem Bilde sieht man Tropfen verschiedener Größe. Von den größten fehlt in der Mitte einer, was den Anschein der Unregelmäßigkeit noch verstärkt, jedenfalls die Wirkung einer zufällig mitgekommenen Luftblase, die oft die Erscheinungen stören.

Auch Bild 2 (Ton 256) zeigt Tropfen verschiedener Größe. Betrachten wir zunächst einmal nur die allergrößten, so ist der Typus, in dem sie aufeinander folgen, etwa: $\circ \circ \circ \circ$. Der Abstand der Mittelpunkte der ersten oder zweiten Tropfen jedes Paares beträgt auf den Originalen 18 mm. Soweit liegen also hier die Tropfen auseinander, die nach je $\frac{1}{256}$ Sekunden vom Strahle abgetrennt werden. Aber in dieser Zeit wird immer *ein Paar* der großen Tropfen abgetrennt. Scheinbar wäre es also dem Strahle lieber, wenn die einzelnen Erschütterungen, die die Tonschwingungen veranlassen, in der Hälfte der Zeit aufeinander folgen würden.

Bild 3 zeigt den Einfluß jenes Tones, der nur die halbe Schwingungsdauer hat. Der Typus der Tropfenfolge ist jetzt: $\circ \circ \circ \circ \circ$. Die Tropfen haben gleiche Abstände, und zwar auf dem Originalen 9 mm. Dem Tone doppelter Schwingungszahl entspricht also der halbe Abstand der zu jeder Erschütterung zugehörenden Tropfen. Weiter sieht man an diesen regelmäßig gestalteten Tropfen, daß sie bald kreisförmig, bald

elliptisch erscheinen, eine Tatsache, die nach Lenards Untersuchungen über fallende Tropfen leicht zu erklären ist und auf die ich hier nicht mehr eingehen möchte; außerdem gewahrt man noch, daß die Tropfen in rotierender Bewegung sind. Der Grund wird sich weiter unten zeigen bei der Betrachtung jener Bilder, die darstellen, wie die Tropfen aus dem Strahle herauskommen.

Bild 4 (Ton 768) zeigt auch noch eine sehr regelmäßige Tropfenfolge. Ihr Typus ist: $\circ \circ \circ \circ \circ \circ$. Es entstehen jedesmal gleichzeitig zwei nahe beieinander gelegene Tropfen, die jedenfalls in der Richtung des optischen Strahlenganges hintereinander liegen. Sie sind nur etwa halb so groß wie die großen Tropfen der bisher betrachteten Bilder. Der Abstand je zweier zusammengehöriger Tropfen beträgt jetzt im Original $6 \text{ mm} = \frac{2}{3} \times 9 \text{ mm}$; die Tonhöhe 768 ist aber $\frac{3}{2} \times 512$. *Der Abstand ist also immer umgekehrt proportional der Tonhöhe.* Auch hier wiederum ist die Rotation der Tropfen deutlich sichtbar. Auf den Ton 768 spricht also der Strahl noch gut an und wenn ich vorläufig den, wie sich später zeigen wird, wohl nicht ganz exakten Begriff „Resonanzgebiet“ beibehalten darf, so ist dieses Gebiet jedenfalls kein sehr enges.

Die Erscheinung beim Tone 896 gibt nun Bild 5. Der flüchtige Blick lehrt schon, daß der Strahl nicht mehr so gut darauf anspricht. Genauere Betrachtung zeigt, daß jetzt jedesmal 4 Tröpfchen gleichzeitig entstehen (von denen sich freilich im Bilde manchmal zwei vollkommen überdecken). Sie stehen in der Originalaufnahme in einem durchschnittlichen Abstände von etwas mehr als 10 mm. Der Tonhöhe 896 würde aber, wie leicht zu errechnen ist, der Abstand 5 mm entsprechen. Statt also wie beim vorherbetrachteten Tone zwei Tropfen im richtigen Abstände bei jeder auf ihn treffenden Erschütterung abzuspalten, spaltet sich der Strahl jetzt lieber bei jeder zweiten Erschütterung in 4 Tropfen im doppelten Abstände. Zu dem Abstände 10 mm gehört ein Ton 450 und dieser entspricht viel besser dem Resonanzgebiete des Strahles als 896. Noch bei 768 Schwingungen in der Sekunde erscheint der Strahl dem bloßen Auge glatt und zusammenhängend vom Anfang bis zum Ende, 896 Schwingungen vermögen aber nicht mehr die Tropfenbildung so regelmäßig zu gestalten und das

Augen sieht die zweite Hälfte des absteigenden Parabelastes in Tropfen zerstäubt.

Tropfenbildung. Über die Entstehung der Tropfen am senkrecht herabfallenden Strahle hat Lenard in der schon erwähnten Arbeit ausführliche Untersuchungen angestellt und gezeigt, wie sie um eine Gleichgewichtslage schwingen und wie fast immer außer dem eigentlichen größeren Tropfen noch ein ganz kleiner entsteht. Die Tropfenbildung eines vom Tone beeinflussten schräg nach aufwärts ausströmenden Strahles zeigen die Bilder 6 und 7 der beigegebenen Tafeln. Sie sind gewonnen bei einer Ausflußmenge von 140 ccm/min und entsprechen Strahlteilen kurz vor dem Scheitel der Parabel und einem Austrittswinkel von nur ca. 15° . (Wegen der geänderten Ausflußmenge und anderer Einstellung des Apparats sind auch die Tropfenabstände geändert; dem Tone 512 [Bild 6] entsprachen jetzt auf den Originalen Abstände von 10 mm; dem Tone 384 [Bild 6] also $\frac{3}{4} \times 512$ die Abstände $\frac{4}{3} \times 10 = 13$ mm.) Man sieht zunächst am noch zusammenhängenden Teile des Strahles in ganz regelmäßigen Abständen, die gleich den Abständen der späteren Tropfen sind, Verdickungen auftreten, die immer ausgesprochener werden, je näher sie der Auflösungsstelle kommen. Schließlich verläßt der *große* Tropfen den Strahl in elliptischer Gestalt, wobei die große Achse senkrecht zur Strahlbahn steht. Im Momente der Ablösung (Bild 6!) mag wohl die Ablösungsstelle des Tropfens nie ganz symmetrisch zur Strahlachse liegen, weshalb seine Gestalt eine etwas unregelmäßige Form annimmt.

Die dabei entstehenden Oberflächenkräfte erteilen dem Tropfen eine Rotationsbewegung, die ihm bei seiner weiteren Bewegung immer erhalten bleibt, ähnlich wie eine einmal in Rotation gebrachte in gleichmäßig bewegter Luft befindliche Scheibe auch weiter rotiert. Die linearen Gebilde des noch zusammenhängenden Strahles zwischen den Verdickungen ergeben die *kleinen* Tropfen, die fast immer genau den gleichen Abstand haben wie die großen. Ihr Abstand wird im weiteren Durchlaufen der Parabel freilich bald ein anderer, da sie meist den Strahl verlassen und dann wegen ihrer im Verhältnis zum Volumen besonders großen Oberfläche viel größere Luftreibung erleiden. Sie geraten dann meist an irgendeiner Stelle des

Strahles mit den großen Tropfen in Kollision und werden von ihnen aus der Wurfparabel vollends herausgeworfen. Es kommt vor, daß sie die Wurfparabel unter einem Winkel von mehr als 50° verlassen (auch nach oben!) und dann ihre eigene Parabel durchlaufen. Daß sie gelegentlich auch einmal im Hauptstrahle verbleiben und dann sehr schön Abstand halten, zeigt Bild 8.

Beziehungen zwischen Ausflußöffnung, Ausflußmenge und Lage des Resonanzgebietes. Zur Feststellung dieser Beziehungen konnten verschieden große Ausflußmengen und verschiedene Düsen verwendet werden. Die erste der folgenden Tabellen zeigt, wie bei gleichbleibender Ausflußmenge Wasserstrahlen aus Düsen verschiedener Weite auf die Töne 128 bis 1024 ansprechen. In der ersten Kolumne befinden sich die fortlaufenden Nummern der Düsen. In der zweiten die Flächeninhalte der Ausflußöffnungen, in den Kolumnen 3—10 ist angegeben, wie der Strahl von der betreffenden Schwingungszahl beeinflusst wird. Und zwar bedeutet (+) nur geringe Einwirkung, d. h. kurz hinter der Auflösungsstelle des Strahles sind einige wenige Knoten und Bäuche vom Auge zu erkennen, aber schon nach kurzer Strecke löst sich der Strahl in unregelmäßige Tropfenfolgen auf. + zeigt an, daß die Einwirkung größer ist, etwa auf die Hälfte des Strahles sich erstreckt (also bei einem unter 45° nach oben fließenden Strahle gerade noch über den Scheitel der Parabel hinaus). ++ zeigt an, daß der Strahl dem Auge vollkommen zusammenhängend erscheint; —, daß keine Einwirkung des Tones erkennbar ist.

Tabelle 1.

Ausflußmenge 200 cem in der Minute.

Düse	$r^2 \pi$ in qmm	128	256	384	512	640	768	896	1024
1	0,701		(+)	+	+	+	++	++	+
2	0,785			+	+	+	++	++	+
3	0,826		(+)	+	+	++	++	+	—
4	0,946	(+)	+	+	++	++	+	—	—
5	0,955	(+)	+	+	++	++	+	—	—
6	1,030	+	+	+	++	++	+	—	—
7	1,980	++	+	—	—	—	—	—	—
8	2,011	++	+	—	—	—	—	—	—
9	6,245	—	—	—	—	—	—	—	—

Zunächst sei bemerkt, daß die Töne erzeugt wurden von Stimmgabeln mit Resonanzkästen, unter die in bekannter Weise Gummischlauchstücke geklebt waren. Man darf diese Vorsicht nicht außer acht lassen, da sich sonst insbesondere bei den tieferen Tönen falsche Beobachtungen einschleichen können. Steht die Stimmgabel direkt auf dem Tische und regt diesen zu Resonanz an, so bilden sich außer dem Grundtone, wie Rayleigh¹⁾ nachgewiesen hat, leicht die sonst im Stimmgabelklang nicht vorhandenen ersten Obertöne aus und diese würden, falls sie ins Resonanzgebiet des Strahles fallen, die ganze Erscheinung stören. Man merkt dieses Einschleichen von Obertönen sofort daran, daß dann geteilte, doppelte und dreifache Strahlen auftreten, indem mit dem Grundton gleichzeitig die Oktav oder Duodezim erklingt.

Weiter ist zu erwähnen, daß sich alle die (vom Glasbläser hergestellten) Düsen bei der mikrometrischen Ausmessung als recht gut kreisförmig erwiesen mit einziger Ausnahme der Düse 7, die elliptischen Querschnitt hatte. Vergleich mit der Düse 8 zeigt, daß diese Tatsache ohne erkennbaren Einfluß auf die Empfindlichkeit geblieben ist.

Die Tabelle zeigt also, daß bei engen Düsen die größte Empfindlichkeit bei den höheren Tönen liegt; mit Zunahme des Strahlquerschnittes geht das Resonanzgebiet zu immer tieferen Tönen über. Natürlich nimmt wegen der konstanten Ausflußgeschwindigkeit gleichzeitig auch die Wurfweite des Strahles ab. Bei dem Strahl aus der Düse 1 (der Austrittswinkel betrug immer 45°) war sie gleich 230 cm, bei einem aus Düse 6 nur noch 67 cm, bei dem aus Düse 9 nur noch ca. 3—4 cm. Die entsprechenden aus der Ausflußmenge nach der Formel $W = (c^2/g) \sin 2\varepsilon$ (wobei c die Anfangsgeschwindigkeit, g die Erdbeschleunigung, ε der Austrittswinkel) berechneten Werte sind 229, 67,3 und 2,8 cm. — Zeigt der Strahl für irgendeinen Ton die größte Empfindlichkeit, so braucht die Tonquelle, wie bekannt ist, durchaus nicht auf die gleiche Unterlage gestellt zu werden, auf der die Düse befestigt ist. Es genügt dann das Erklingen in mehr oder weniger großer Entfernung, die bis über 10 m betragen kann

1) Lord Rayleigh, Scientific papers 1. p. 319. 1899.

und die Übertragung durch die Luft reicht vollkommen aus zur sofortigen Anregung des Strahles. Es herrscht in der oben angeführten Literatur allgemein die Anschauung, daß ein Mitschwingen der Düse unbedingt erforderlich sei; mir scheint das nicht nötig zu sein. So ergibt sich z. B. ein starkes Ansprechen auch dann, wenn der Strahl durch den Resonanzkasten seines günstigsten Stimmgabeltones hindurchfliegt.

Tabelle 2.

Düse	r^2 in qmm	128	256	384	512	640	768	896	1024	Ausfluß- menge in ccm/min	Austritts- winkel
3	0,826	(+)	(+)	+	+	++	++	+	-	205	45
3	0,826	-	-	-	-	-	-	+	+	350	45
6	1,030	++	++	+	-	-	-	-	-	125	45
6	1,030	+	++	++	+	-	-	-	-	150	45
6	1,030	+	+	+	++	++	+	-	-	200	45
7	1,980	+	-	-	-	-	-	-	-	166	30
7	1,980	+	+	+++	+	-	-	-	-	360	30
7	1,980	+	+	++	+	-	-	-	-	360	60
9	6,245	-	-	-	-	-	-	-	-	210	30
9	6,245	+	-	-	-	-	-	-	-	812	30
9	6,245	-	-	-	-	-	-	-	-	1620	30

Tab. 2 zeigt nun an vier verschiedenen Düsen, wie bei gleichbleibender Ausflußöffnung die Zunahme der Ausflußgeschwindigkeit das Resonanzgebiet des Strahles nach immer höheren Tönen verschiebt. Bei Düse 3, der kleinsten hier verwendeten, entspricht einer Zunahme der Ausflußmenge um 71 Proz. eine Erhöhung der günstigsten Schwingungszahl um etwa 4×128 Schwingungen. Bei Düse 6 verursacht die Zunahme um 20 Proz. Erhöhung um 128, die um 60 Proz. Erhöhung um 3×128 Schwingungen. Bei Düse 7, die noch weiter ist, bewirkt die Ausflußmengen Zunahme von 117 Proz. erst eine Erhöhung um 3×128 Schwingungen. Je feiner also der Strahl, um so leichter wird durch eine Änderung in der Ausflußmenge das Resonanzgebiet des Strahles verschoben, und zwar entspricht der größeren Stromstärke die Resonanz bei höheren Tönen. Bei Düse 9 ließ sich die Beobachtung

nicht mehr exakt durchführen. Zwar zeigen die ersten beiden Werte auch hier wieder das gleiche Gesetz und es bedarf der schon recht beträchtlichen Ausflußmenge von 812 ccm/min, um überhaupt eine Einwirkung auf den Strahl zu bekommen; wird aber die Ausflußmenge nochmals auf den doppelten Wert erhöht, so ist keine Beeinflussung mehr wahrzunehmen, weil ein so breiter Strahl von der dann resultierenden Wurfweite schon so viele nicht zu behebende Unruhe aufweist, daß die Wirkung der Töne nicht mehr mit Sicherheit nachzuweisen ist. Die letzte Kolumne der Tabelle enthält noch die bei den Versuchen benutzten Austrittswinkel der Strahlen, und die Ergebnisse mit Düse 7 zeigen, daß der Strahl unter 30° die gleiche Empfindlichkeit aufweist, wie der unter 60° . Ich habe mich auch sonst noch oft überzeugt, daß der Austrittswinkel von nur geringem Einfluß ist. Immerhin wird er bei ganz großen Winkeldifferenzen merkbar. Wenn z. B. für einen horizontal ausfließenden Strahl Düse und Ausflußmenge gerade so gewählt sind, daß er für den Ton 896 Beeinflussung merken läßt, so ist die Wirkung beim gleichen, senkrecht nach oben fließenden Strahl nicht mehr wahrnehmbar, offenbar weil die verzögernde Erdbeschleunigung dann allzusehr ins Gewicht fällt. — Jedenfalls zeigen die Zahlen gerade dieser Tabelle, daß durchaus nicht das Mitschwingen der Düse die Hauptsache für das Zustandekommen der Wirkung ist, sondern daß, um deutlichste Einwirkungen zu erzielen, die Schwingungsdauer des Tones so gewählt sein muß, daß der Strahl leicht in diesem Zeitintervall oder in einem Vielfachen davon einen oder mehrere Tropfen abspalten kann. Der Ort am Strahl, wo sich diese Schwingungen dem Strahl zuerst mitteilen, wird, je nachdem die Übertragung durch die Luft oder hauptsächlich durch die feste Auflage stattfindet, ein verschiedener sein. Meistens wird die Übertragung freilich durch die Klemme, mit der die Düse festgehalten ist, erfolgen. Läßt man aus einem ziemlich weiten, nur wenig gegen die Horizontale geneigten Rohre ganz langsam Wasser abtropfen, so kann man sehen, daß nicht nur die abfallenden Tropfen Schwingungen um eine Gleichgewichtslage ausführen, sondern daß auch der zurückbleibende Flüssigkeitsfaden Schwingungen ausführt. Besonders deutlich ist das zu erkennen, wenn man einige Millimeter vor dem Ende des

Rohres ein nicht zu schweres, schwarzes Körnchen anbringt, das dann an den Schwingungsbewegungen teilnimmt. Man sieht dabei auch, daß diese Schwingungen nicht sehr regelmäßig sind. Trifft also auf die oben betrachteten Wasserstrahlen eine Schwingung von solcher Periode, daß sie der eigenen Schwingungsdauer des zerfallenden Strahles ungefähr entspricht, so wird die Tropfenabspaltung besonders regelmäßig erfolgen, die abgespaltenen Tropfen werden sich nicht mehr gegenseitig stören, sondern einer hinter dem anderen in gleicher Bahn sich bewegen, so daß das Auge einen scheinbar zusammenhängenden Strahl erblickt.

Betont werden möge noch einmal, daß der Abstand, den die einzelnen Tropfen auf den mit Momentaufnahme gewonnenen Bildern zeigen und der Abstand der Bäuche, den das Auge am scheinbar zusammenhängenden Strahl sieht, ganz verschiedene Größe haben. Der Abstand dieser Bäuche wird *nur* durch die Schwingung und die Rotation der abfallenden Tropfen bedingt. Da die Tropfen den Strahl immer als Ellipsoide, deren große Achse senkrecht auf der Strahlrichtung steht, verlassen, dann schwingen und rotieren und nach ganz bestimmten durchlaufenen Strecken wieder senkrecht zur Strahlrichtung stehen, so sieht das Auge den scheinbar zusammenhängenden Strahl in gleichen Abständen dünner und dicker. Man sieht z. B. an den Bildern 4 und 5, daß jeder fünfte Tropfen bzw. jedes fünfte Tropfenpaar immer wieder die gleiche Lage einnimmt.

Intensität des Tones. Schwebungen. Die Intensität der wirkenden Schwingungen macht sich beim einzelnen Ton zunächst nur durch die mehr oder weniger große Verschiebung der Auflösungsstelle des Strahles gegen die Ausflußöffnung hin bemerkbar. Das bedingt auch, daß beim allmählichen Ausklingen des Tones die Knoten und Bäuche des scheinbar zusammenhängenden Strahles immer weiter von der Ausflußöffnung abrücken. Der Einfluß der Intensität gibt aber Anlaß zu schönen Erscheinungen, wenn man zwei gleiche Stimmgabeln, von denen die eine etwas verstimmt ist, auf den Strahl einwirken läßt. Dann bleibt im Falle größter Resonanz die zusammenhängende Erscheinung des Strahles vollkommen bewahrt, nur die Auflösungsstelle und die hinter ihr folgenden Knoten und Bäuche

wandern im Tempo der Schwebungen von der Ausflußöffnung fort und wieder zurück. Die Parabel scheint sich in diesem Zeitmaß in sich selbst hin- und herzubewegen. Ist die Resonanz nicht so gut, so daß nicht der ganze Strahl, sondern nur ein Teil desselben zusammenhängend erscheint, so tritt im Tempo der Schwebungen auch der Perlenregen wieder mehr oder weniger deutlich auf. Mit Zunahme der Schwebungszahl werden diese Bewegungen auch immer schneller, bis schließlich der Strahl nicht mehr zu folgen imstande ist und unbeeinflußt erscheint. Das tritt für die Gabeln 512 bei etwa 20 Schwebungen ein. Natürlich zeigt eine Momentaufnahme in diesem Falle keinerlei besondere Erscheinung, wie das an Fig. 9 zu sehen ist, bei der die Töne 512 und 510 auf einen Strahl von 135 ccm/min wirkten. (Wegen der geringeren Ausflußmenge als bei Bild 3 treten auch schon Doppeltropfen auf.)

Gleichzeitige Wirkung mehrerer Töne. Mehrfache Strahlen.

Läßt man aus einer Düse von 2 qmm Weite in einer Minute etwa 170 ccm Wasser ausfließen, so vermag, wie in Tab. 2 gezeigt worden ist, nur die Stimmgabel von 128 Schwingungen den Strahl zu beruhigen, alle höheren einzelnen Töne sind vollkommen unwirksam. Schlägt man aber nun die beiden Gabeln mit den Schwingungszahlen 896 und 1024 gleichzeitig an, so wird der Strahl sofort wieder ruhig und erscheint vollkommen zusammenhängend. Den gleichen Effekt erhält man, wenn man 896 mit 768, oder 768 mit 640, oder 640 mit 512 usw. kombiniert; immer tritt vollkommene Beruhigung ein. Alle diese Kombinationen ergeben aber als Differenzton den Ton von 128 Schwingungen; der Strahl spricht also auch auf den Differenzton an, wenn dieser in sein Resonanzgebiet hineinfällt. Er teilt sich dabei *nicht*, er bleibt ein einfacher Strahl. Damit ist nicht nur ein objektiver Beweis für den Differenzton gegeben (den man beim Anschlagen der Stimmgabeln ja auch hört), sondern diese Tatsache erleichtert das Verständnis der im folgenden beschriebenen Erscheinungen beim gleichzeitigen Einwirken mehrerer Töne auf den Strahl.

Schon Tyndall fand, daß unter „günstigen Umständen“ statt eines Strahles zwei oder mehrere gleichzeitig auftreten können. Es ist aus den Angaben an der betreffenden Stelle

seines Buches nicht deutlich zu ersehen, ob er diese Wirkung nur erhielt, wenn mehrere reine Töne gleichzeitig auf den Strahl einwirkten oder ob er sie scheinbar mit einem Tone erzeugte, der ja auf irgend eine Weise, etwa durch Resonanzerscheinungen in der Tischplatte, einen der ersten Obertöne, der noch auf den Strahl wirken konnte, gleichzeitig mit erregte. Belas hat am angeführten Orte die Wirkung mehrerer Töne auf einen senkrecht herabfallenden Strahl untersucht. Dabei bilden sich aber nicht mehrere Strahlen, sondern nur die Tropfenfolge wird eine andere, wie das seine Momentaufnahmen und die beigegebenen Erklärungen deutlich machen.

Die beim schräg nach aufwärts austretenden Wasserstrahle sich dem bloßen Auge darbietenden Erscheinungen sind nun folgende. Hat man etwa einen Strahl, der aus der Düse von 0,78 qmm in jeder Minute 150 ccm Wasser austreten läßt, so kann dieser, wie die Bilder 1—5 gezeigt haben, von Tönen innerhalb der Schwingungen 128—900 beeinflußt werden. Läßt man nun die Töne von 256 und 512 Schwingungen gleichzeitig erklingen, so sieht man, daß sich statt eines Strahles *zwei* vollkommen glatte Strahlen ausbilden. Man sieht *zwei* Wurfparabeln, die je nach dem Austrittswinkel des Strahles ineinander verlaufen oder sich auch gelegentlich einmal kreuzen können. Wenn z. B. die Neigung etwa 45° beträgt, so kann der Abstand der beiden Parabeln am Scheitel bis über 1 cm betragen; bei größerem Winkel auch noch mehr. Diese beiden Strahlen bleiben aber nicht konstant nebeneinander bestehen, sondern sie klappen wieder zusammen, um nach einer gewissen Zeit wieder auseinanderzugehen, und dieses Spiel wiederholt sich. Natürlich trennen sie sich immer weniger voneinander, bis die Intensitätsverminderung der erregenden Schwingungen der Erscheinung ein Ende setzt. Bei aufmerksamem Hinhorchen hört man im gleichen Tempo, in dem die beiden Strahlen zusammen- und wieder auseinandergehen, Schwebungen des Tones 256 auftreten. Man kann die Zeit dieser Schwebungen verkürzen, wenn man die eine der Gabeln verstimmt; dann werden sie schneller und deutlicher und der Strahl klappt in kürzeren Zeiträumen zusammen. Die Differenz der Schwingungen des Grundtones und der Oktave ist gleich der Schwingungszahl des Grundtones; *es kann sich also*

nur um Schwebungen des Grundtones mit dem Differenztone handeln. Man kann natürlich auch durch entsprechendes Verstimmen die Zeit der Schwebungen zu verlangsamen suchen; es ist mir aber niemals gelungen, die beiden Töne so rein zu stimmen, daß nicht (wenn auch gelegentlich in sehr langen Intervallen, die oft größer wurden als die Dauer des Stimmgabeltones) der Strahl sich doch wieder geteilt hätte. Vielleicht läßt sich das mit dauernd erregten Stimmgabeln doch erreichen. Wie und warum eine Trennung der Strahlen entsteht, kann ich mit meinen bisherigen Untersuchungen noch nicht genügend feststellen. Eine möglicherweise zutreffende Erklärungsform kann erst im weiteren Verlauf der Darstellung angedeutet werden.

Läßt man nun auf den gleichen Strahl die beiden Schwingungszahlen 512 und 768 einwirken, deren Intervall ein *Quinte* ist, so ergibt sich ganz die gleiche Erscheinung. Wiederum treten zwei ineinander verlaufende Parabeln auf, die zusammen- und auseinanderklappen, es ist genau das gleiche Bild wie vorher. Man hört jetzt deutlich den Differenzton 256 und hört in ihm wieder Abschwächungen und Verstärkungen. Um zu verstehen, daß jetzt Schwebungen des Differenztones auftreten können, muß man sich klar machen, daß als sogenannter Differenzton zweiter Ordnung wiederum ein Ton der Schwingungszahl 256 auftritt. Denn die beiden Gabeln 512 und 768 geben als ersten Differenzton 256 und dieser gibt mit dem Gabeltone 512 als zweiten Differenzton wiederum die Schwingungsdifferenz 256. Wenn also kleine Verstimmungen der beiden Gabeln vorhanden sind (und das wird immer der Fall sein), so sind die Schwebungen leicht erklärlich. Auch hier kann man durch künstliche Verstimmung das Schwebungstempo ändern. Übrigens kann man den Differenzton als den Urheber der Erscheinungen am Strahle direkt vernehmlich machen, wie das schon Belas getan hat. Jeder Wasserstrahl, der von einem Tone beeinflusst worden ist, erregt eine Membran, auf die man seine Tropfen fallen läßt zur Schwingungszahl des ihn beeinflussenden Tones. (Am besten geeignet fand ich hierzu dünne Metallbleche von $\frac{1}{10}$ — $\frac{2}{10}$ mm Dicke). Läßt man nun bei Einwirkung der Gabeln 512 und 768 die Tropfen des Strahles auf ein solches Metallblech fallen, so hört man deutlich den Ton von 256 Schwingungen.

Es sei hier noch betont, daß die Membran nicht nur dort ertönt, wo der Strahl schon in Tropfen zerfallen ist, sondern freilich mit geringerer Intensität, auch im noch zusammenhängenden Teile des Strahles. Dabei wird die Intensität um so geringer, je weiter man sich von der Auflösungsstelle des Strahles gegen die Düse hin entfernt; der Ton aber bleibt in seiner Höhe überall derselbe. (Der Versuch kann auch zum Nachweise des Dopplereffektes benutzt werden, wenn man das Blech im Strahle rasch in oder gegen die Richtung der Tropfen bewegt.)

Untersucht man nun weiter an dem gleichen Strahle die Töne mit den Schwingungszahlen 384 und 512, die miteinander eine *Quarte* als Intervall bilden, so kann man wiederum beobachten, daß innerhalb gewisser Zeiträume diesmal drei Strahlen auftreten, die sich ziemlich weit voneinander entfernen und falls die Gabeln recht genau die obigen Schwingungszahlen aufweisen, auch längere Zeit getrennt sichtbar bleiben. Eine in diesen Strahl gehaltene Metallmembran singt deutlich den Ton 128. Dies ist der hörbare Differenzton der beiden Gabeln und auch an ihm sind Schwebungen hörbar. Geht man bis zur dritten Ordnung der Differenztöne, so ergibt sich die Schwingungszahl 128 zweimal: als $512 - 384$ und als $(3 \cdot 384 - 2 \cdot 512)$; aber auch der Ton 256 kommt schon zweimal als Differenzton zweiter Ordnung vor und liegt auch im Resonanzgebiete des Strahles.

In ähnlicher Weise sieht man auch beim Einwirken einer großen Terz eine Teilung des Strahles in 4—5 einzelne Äste, doch folgt der Wechsel der Erscheinungen hierbei schon so rasch, daß das Auge nur mit Mühe noch das Regelmäßige des Vorganges erfassen kann; auch ergeben sich dann durch Zusammenwirken der Differenztöne der verschiedenen Ordnungen schon so viele Möglichkeiten für Schwebungen, daß der Wechsel der Einzelzustände sehr unregelmäßig wird.

Aus all dem Bisherigen läßt sich aber als Tatsache herausheben, daß zwei verschiedene Töne bei gleichzeitigem Erklängen immer dann eine Wirkung auf den Strahl ausüben, wenn ihr Differenzton in das Resonanzgebiet des Strahles fällt. Liegen die (primären) Töne selbst nicht im Resonanzgebiete, so spricht der Strahl nur auf den Differenzton

an und teilt sich nicht; liegen sie selbst im Resonanzgebiete, so teilt sich der Strahl in zwei oder mehrere Äste und die ins Resonanzgebiet fallenden Differenzttöne verschiedener Ordnungen geben untereinander und mit den Gabeltönen zu Schwebungen Anlaß, in deren Tempo die einzelnen Strahlen zusammen- und wieder auseinandergehen.

Die dissonanten Intervalle geben, wie sich schon aus den vorher beschriebenen Erscheinungen folgern läßt, so unregelmäßige Erscheinungen, daß der Strahl dem völlig unbeeinflussten gleicht. Deutlich lassen sich alle diese Erscheinungen am Strahle sehen, wenn man als Tonquellen zwei Sternsche Variatoren benutzt, die man vom reinen Einklange bis zur Oktave verstimmt, nur ist die Regelmäßigkeit eine geringere, weil die Anblasegeräusche ziemlich störend wirken.

Wie sehen nun die Tropfenfolgen des Strahles bei der gleichzeitigen Einwirkung mehrerer Töne aus? Das sollen die Bilder 10 bis 14 zeigen. Die Bilder 10—13 sind am gleichen Strahle und mit der gleichen Anordnung aufgenommen worden, wie die Bilder 1—5. Auch hier wurde die momentane Aufnahme dann gemacht, wenn der Strahl dem bloßen Auge das charakteristische Aussehen zu haben schien.

Bild 10 zeigt den Strahl unter der Einwirkung der um eine *Oktave* auseinanderliegenden Schwingungszahlen 256 u. 512. Die Aufnahme ist erfolgt in einem Augenblicke, wo die beiden Strahlen vollkommen zusammengeklappt sind. Es werden vom Strahle in regelmäßigen Intervallen je zwei kurz aufeinanderfolgende Tropfen abgespaltet. Der Abstand entsprechender Tropfen ist (auf den Originalplatten) 18 mm; das entspricht genau dem Differenztone 256 (vgl. Bild 2). Der Typus und der Abstand des Differenztones sind vollkommen gewahrt.

Bild 11 zeigt die *Quinte* der Schwingungszahlen 512, 768. Es ist ein Moment getroffen, in dem die Strahlen etwas auseinandergeklappt sind. Wiederum entspricht der Typus und der Abstand der Tropfen genau dem Differenzton der beiden Gabeltöne 256.

Bild 12 zeigt nochmals eine *Oktave*, und zwar die der Töne von 384 und 768 Schwingungen. Nur die eine Hälfte des Bildes ist gut ganz gelungen, auf der andern mag wohl wieder eine Luftblase oder irgend eine Erschütterung zu Störungen

Veranlassung gegeben haben. Außer den großen Tropfenpaaren zeigt das Bild zufällig noch kleine Tropfenpaare im selben Abstände. Der Abstand zueinandergehöriger Tropfen beträgt 12 mm. Bild 4 ergab für den Ton 767 6 mm; 2×6 mm entsprechen also $768/2 = 384$ Schwingungen, also wiederum dem Differenztone.

Bild 13 zeigt eine sehr gelungene Aufnahme der *Quart* mit den Schwingungszahlen 384 und 512. (Vor dieser Aufnahme mußte aus äußeren Gründen die Einstellung etwas verändert werden, so daß dem Tone 512 nur noch ein Abstand von 8 mm entsprach.) Der Strahl hat zur Zeit der Aufnahme kurz hintereinander immer zwei Viererpaare und diese acht Tropfen in solchen Abständen abgespaltet, daß zwischen einander entsprechenden Tropfen ein Abstand von 4×8 mm sichtbar geworden ist, was einer Schwingungszahl von $512/4 = 128$ entspricht, und die beiden Gabeln haben als Differenzton tatsächlich den Ton von 128 Schwingungen. Dem bloßen Auge würde der Strahl in dem Augenblicke dreifach erscheinen, weil die unteren Tropfen der ersten und die oberen Tropfen der zweiten Vierergruppen ungefähr in derselben Parabel liegen. Gerade dieses Bild zeigt vortrefflich, zu welcher komplizierten und doch gesetzmäßigen Abspaltungsweisen das gleichzeitige Ertönen zweier Tonquellen des Resonanzgebietes den Strahl veranlassen kann.

Bild 14 zeigt schließlich an einem fast horizontal auslaufenden Strahle von 140 ccm/min die Bildung der Tropfen auf dem noch zusammenhängenden Teile des Strahles für die Gabeln 384 und 512 (allerdings bei einem ganz anderen Phasenzustand der Schwebungen wie das vorhergehende Bild). Man sieht, wie in dem Augenblick immer gerade zwei große schnell aufeinander folgende Tropfen in größeren Abständen gebildet wurden, und wie dazwischen aus dem bei der Abschnürung zunächst noch horizontal bleibenden Stück noch ein zweites Tropfenpaar gebildet wird. Die Bedingungen des Strahles sind die gleichen wie in Fig. 7. Dort entsprach dem Ton 512 der Abstand von fast 10 mm. Hier liegen die einander immer wieder entsprechenden Tropfen in Abständen von 39–40 mm. Das beweist wiederum das Dasein des Differenztones der Schwingungszahl $128 = 512/4$.

Alle diese Bilder zeigten aber die Wirkung zweier verschiedener Töne immer nur in einem ganz bestimmten Moment und es ließ sich daraus noch kein Anhalt dafür gewinnen, wie die Vorgänge während einer ganzen Schwebungsperiode des Differenztones sich abspielen und verlaufen mögen. Sicherlich wäre das geeignetste Mittel, darüber Aufschluß zu erhalten, die kinematographische Aufnahme gewesen. Da mir ein Kinetograph nicht zur Verfügung stand, suchte ich durch möglichst schnell aufeinanderfolgende Momentaufnahmen den Vorgang während der einzelnen Schwebungen festzustellen. Mit einem Kodak-Filmapparate gelang es nach einiger Übung, in jeder Sekunde eine Aufnahme zu machen, und da die Dauer der Schwebungen des Differenztones leicht auf Intervalle von 4—7 Sekunden und noch mehr gebracht werden konnte, so war es schon möglich, mittels dieser Aufnahmen einen besseren Einblick in den Verlauf der Vorgänge zu erhalten. Freilich kann dabei auch ein Nachteil der Methode stärker hervortreten; denn jeder zur Aufnahme nötige Funke ist mit einem starken Knall verbunden und die rasch aufeinanderfolgenden Geräusche konnten dem Strahle ein unruhigeres Gepräge geben. Immerhin hat sich die Methode im ganzen bewährt.

**Die Vorgänge während einer ganzen Schwebungsperiode
des Differenztones.**

An den so gewonnenen Aufnahmen zeigten sich zunächst einmal alle die bisher gefundenen Gesetzmäßigkeiten über einzelne Strahlen bestätigt. Auch lehrten alle Aufnahmen, daß dem Differenzton beim Zustandekommen der verschiedenen Tropfenbilder eine besondere Rolle zukommt. Ich machte zwei Serien von Aufnahmen: die einen an einem Strahl, der sein Resonanzmaximum bei etwa 500 Schwingungen hatte und auf den ganzen (Einzel-) Tonbereich von 256 bis 768 Schwingungen ansprach; die anderen an einem Strahl, der die beste Wirkung schon bei 256 Schwingungen zeigte.

Der erste Strahl, dem also die Gabel 512 am günstigsten lag, zeigte folgendes. Wenn ich die einzelnen Ergebnisse, um nicht allzuvielen Bildern beifügen zu müssen, immer in einem Schema andeuten darf, so ist leicht einzusehen, daß die einzelnen Gabeltöne von den Schwingungszahlen 256—768 durch

Für die *Quinte* 512, 768 ergaben 5 aufeinanderfolgende Aufnahmen die Bilder:

1.	a	b	a	b	a	b	a	b
2.	a	b	a	b	a	b	a	b
3.	a	b	a	b	a	b	a	b
4.	a	a	a	a	a	a	a	a
5.	a	b	a	b	a	b	a	b

Also auch hier erhielt ich für die am besten im Resonanzgebiet liegende Oktave und *Quinte* genau das gleiche Bild; wiederum Zweiergruppen im Abstand des Differenztones 256. (Die Bilder 10 und 11 der beigegebenen Tafeln, die an einem Strahl von ganz analogen Resonanzverhältnissen aufgenommen sind, entsprächen also hier der ersten Aufnahme für die Oktave und der dritten für die *Quinte*.)

Etwas komplizierter werden die Tropfenbilder schon für diese reinsten Konsonanzen, wenn die benutzten Gabeltöne etwas weiter abstehen vom Resonanzmaximum des Strahles. Dann erscheint dem Auge neben der einfachen Zweiteilung des Strahles schon eine Dreiteilung, die mit der Zweiteilung und dem glatten Strahl im Tempo der Schwebungen des zugehörigen Differenztones abwechselt. So ergaben vier Aufnahmen bei Einwirkung der *Quinte* 256, 348 die Bilder:

1.	a	d	b	c	a	d	b	c	a	d	b	c
2.	a	d	b	c	a	d	b	c	a	d	b	c
3.	a	d	b	c	a	d	b	c	a	d	b	c
4.	a		b	c	a		b	c	a		b	c

Es werden also Vierergruppen abgespaltet. Der Tropfenabstand aa, das ist der Gruppenabstand, entspricht dem Differenzton 128. Bei Aufnahme 1 entspricht ad dem Summationston 640, ab dem Tone 384, ac dem Tone 256. Die gleichen Verhältnisse liegen bei Aufnahme 3 vor. Beide würden dem Auge als dreifacher Strahl erscheinen. Bild 4 zeigt nur drei Tropfen, aber die mit b bezeichneten sind von solcher Größe, daß man schließen muß, sie seien durch Zusammenziehung zweier Tropfen entstanden. Aufnahme 2 zeigt die

größte Unregelmäßigkeit, nur der Abstand aa ist wohl ausgebildet, die sonst im Schema gewählten Abstände ad, db, bc sind von labiler Größe. Jedenfalls zeigt sich also, daß die Erscheinungen unregelmäßiger werden, wenn keiner der beiden Gabeltöne dem engeren Resonanzgebiet angehört.

Von den übrigen konsonanten Intervallen sei nur noch dargestellt, welche Tropfenbilder erscheinen, wenn die *Quarte* 384, 512 auf den Strahl wirkt. Da liegt wiederum der eine der Töne im engsten Resonanzgebiet des Strahles, aber die Tropfenfolge wird wohl deshalb eine kompliziertere, weil die Konsonanz einer *Quarte* schon keine so reine mehr ist wie die einer *Quinte* oder einer *Oktave*.

Während also den beiden Stimmgabeltönen die Abstände
 Ton 384: a a a a a a a a
 Ton 512: a a a a a a a a a a
 zukämen, zeigen sich beim Zusammenklange folgende Tropfenbilder:

1.	a	b	c	a	b	c	a	b	c
2.	a	b	c	a	b	c	a	b	c
3.	a		b	a		b	a		b
			c			c			c
4.	a	b	c	a	b	c	a	b	c
5.	abcd		efgh	abcd		efgh	abcd		efgh
6.	a	b	c	a	b	c	a	b	c
7.	a		c	a		c	a		c
			b			b			b
8.	a	b	c	a	b	c	a	b	c
9.	a		b _c _d	a		b _c _d	a		b _c _d
10.	a	b _c	d	a	b _c	d	a	b _c	d

Die zehn aufeinanderfolgenden Aufnahmen, die in schnellen aber nicht ganz regelmäßigen Abständen erfolgten, sind jedenfalls nicht während einer einzigen Schwebungszeit gewonnen worden, aber sie dürften doch in ziemlich vollständiger Weise zeigen, was für verschiedene Tropfengestaltungen möglich sind. In allen Aufnahmen bleibt der Gruppenabstand, der dem Differenzton 128 entspricht, erhalten. Der Abstand der Tropfen in den einzelnen Gruppen ist in fortwährendem Wechsel. Bei

Aufnahme 1 stehen zufällig die Tropfen so, als wäre nur der Ton 384 vorhanden. Schon in Aufnahme 2 haben sich die Abstände in den Gruppen verschoben: ab entspricht, 384 bc 512 Schwingungen. Aufnahme 3 zeigt Abstände die dem Tone 256 zugehören, dem Differenztone zweiter Ordnung also, der entsteht als Ergebnis von $(2 \cdot 384) - 512$ und von $(2 \cdot 512) - 384$. Es liegen dabei die mit b und c bezeichneten Tropfen übereinander. — Auch beim Tropfenbild 4 spielt der Ton 256 eine wesentliche Rolle. Die Entfernung ab entspricht hier dem Tone $768 = 256 + 384$. — Das merkwürdigste Aussehen zeigt die Aufnahme 5; in der Periode des Differenztons 128 hat der Strahl jedesmal acht kleine Tropfen in je zwei Vierergruppen abgespaltet. Vergleicht man dieses Aussehen mit dem auf der beigegebenen Tafel in Fig. 5 wiedergegebenen Bilde, so sieht man sofort, daß es genau dem Tone 896, also dem *Summationston* der beiden Stimmgabeltöne entspricht; nur daß sich der Abstand der Vierergruppen dem Zeitintervalle des Differenztones 128 angepaßt hat. Vergleicht man es andererseits mit dem auf derselben Tafel in Fig. 13 wiedergegebenen Bilde der Quarte, so sieht man auch dort dasselbe charakteristische Aussehen; zumal, wenn man bedenkt, daß diese erstere Aufnahme an einem Stücke des Strahles gemacht worden war, das von der Auflösungsstelle weiter ablag, wo also die Divergenz der einzelnen Tropfen eine viel größere sein mußte. — Die Aufnahmen 6, 7, 8 entsprechen wieder vollkommen den Aufnahmen 2, 3, 4; nur die Divergenz der Tropfen hat sich etwas geändert. — Die Aufnahmen 9 und 10 zeigen schließlich noch Momente, in denen der Strahl im Tempo des Tones 128 Vierergruppen abspaltet, und zwar folgen bei 9 auf einen einzelnen Tropfen immer drei schräg übereinanderliegende im Abstände des Tones 256; bei 10 entspricht wieder der Abstand ad 256, ac 384 und ab 640 Schwingungen $= 2 \cdot 512$ bis 384).

Untersucht man die Tropfenbilder beim Zusammenklange von Gabeln, die weniger konsonant sind, so erhält man immer komplizierte Anordnungen, bis schließlich bei vollkommen dissonanten Intervallen der Strahl ganz und gar das Aussehen eines Unbeeinflussten bekommt, bei dem nur infolge der auftretenden Erschütterungen die Auflösungsstelle mehr gegen

die Ausflußöffnung hin verschoben erscheint. So lassen wir z. B. bei der Terz mit den Schwingungszahlen 512, 640 aus den Abständen nicht nur die Differenz- und Summationstöne 128, 256, 384, 1152 . . . erschließen, sondern auch noch viele andere höherer Ordnung. Je mehr aber an solchen sekundären Tönen auftreten, desto mehr stören sie sich auch wohl bei der Tropfenausbildung, bis schließlich bei Dissonanzen die Tropfen sich nicht mehr ohne Willkür durch ein Schema darstellen lassen.

Die zweite Reihe von Aufnahmen, die ich wie schon erwähnt, am absteigenden Aste eines Strahles machte, dessen Empfindlichkeitsmaximum bei 256 Schwingungen lag, lehrten wenig Neues. Nur zeigten sie ganz besonders deutlich, daß immer dann, wenn man auf den Strahl Töne einwirken läßt, die sich nicht mehr gut in sein Resonanzgebiet einfügen, die Erscheinungen weit verworrener werden. Und dafür möchte ich noch ein Beispiel im Bilde vorführen als Gegensatz zu den einfachen Erscheinungen im Resonanzgebiete, wie sie in den Figg. 10, 11, 13, 14 der Taf. II u. III für Töne des Resonanzgebietes dargestellt sind. Die Figg. 15a—d auf Taf. III zeigen die Tropfenformen bei Einwirkung der Oktave 256, 512 während der Zeit einer Schwebung, die der Differenzton erster Ordnung mit dem Grenztone 256 erzeugt. Dabei liegt der Gabelton 512 schon ganz außerhalb des Resonanzgebietes. 15a zeigt Dreiergruppen im Abstände des Tones 256; 15b zeigt die Strahlen im Momente größter Divergenz und die Tropfen in Abständen, die dem Tone 512 zukommen; 15c und d aber zeigen wie darauf ein Zeitintervall folgt, in dem sich die Tropfenfolge so darstellt, als wäre der Strahl von akustischen Wellen vollkommen unbeeinflußt.

Schließlich möge an dieser Stelle noch folgendes hervorgehoben werden: Hält man in den von zwei Tönen gleichzeitig beeinflussen Strahl wiederum ein dünnes Blech, so ertönt laut hörbar der die Gruppenabstände bestimmende Differenzton. Nun nimmt die Theorie an, daß Differenz- und Summationstöne erst entstehen, wenn die Elongationen der einzelnen Schwingungsbewegungen eine gewisse Grenze überschreiten, wenn das Gesetz der Superposition kleinster Bewegungen nicht mehr anwendbar sei, und auch unser Ohr ver-

mag im allgemeinen den Kombinationston nur zu hören, wenn die ihn erzeugenden Einzeltöne eine beträchtliche Intensität aufweisen. Der Wasserstrahl aber „vernimmt“ den Differenzton *immer*, solange beide Gabeltöne erklingen, und die auf die Metallmembran fallenden Tropfen lassen ihn noch ertönen und machen ihn dem Ohre noch hörbar, wenn die Gabeltöne selbst kaum mehr vernehmbar sind.

Die Tropfengeschwindigkeit auf den einzelnen Strahlen. Betrachtet man eines der Bilder 10 oder 11 auf Taf. II, so fällt noch eine Erscheinung auf. Die Abstände der dem Differenztone entsprechenden Gruppen bleiben über die ganze Ausdehnung des Bildes hin gewahrt, die Abstände der Tropfen in den einzelnen Gruppen aber ist veränderlich, sie nimmt zu. Der Betrag ist nicht groß aber deutlich merkbar. Man könnte auch sagen, der Abstand der Tropfen auf dem unteren Strahle (Bild 11!) sei etwas größer als der auf dem oberen, mit anderen Worten die Tropfen auf dem unteren Strahle besitzen eine größere Geschwindigkeit als die oberen. Daß tatsächlich diese beiden Geschwindigkeiten verschieden sind, ergeben auch direkte Ausmessungen der beiden auftretenden Wurfparabeln.

Man kann in einer durch die Auflösungsstelle des Strahles gelegten Horizontalen die Wurfweite messen und in einer darauf senkrechtstehenden durch den Parabelscheitel gehenden Richtung die Wurfhöhe. Freilich kann die Meßgenauigkeit keine große sei; denn die benutzten Gabeltöne verlieren rasch an Intensität, es rückt die Auflösungsstelle von der Ausflußöffnung ab und man muß da auf eine mittlere Lage des Auflösungspunktes einstellen; außerdem ist gerade die Wurfweite oft schwer zu bestimmen, weil dort der Strahl nicht mehr so ganz zusammenhängend erscheint. Schwerer wird die Messung noch, wenn nicht nur ein, sondern zwei Töne gleichzeitig wirken (nur ganz einfache Intervalle Oktave, Quinte können überhaupt in Frage kommen), weil dann sich auch die Divergenz der Strahlen fortwährend ändert und man so keine große Gewähr hat, zwei wirklich zusammengehörige Werte bei den Ablesungen zu treffen. Immerhin zeigten Kontrollrechnungen über Erwarten gute Übereinstimmung und so ist jedenfalls die Größenordnung der bestimmten Geschwindigkeitsdifferenzen richtig. Die Ausmessung der Wurfhöhe geschah mit einem Katheto-

meter, die der Weite mit einem guten Maßstabe. Zwei Beispiele mögen die Ergebnisse zeigen.

Bei einer Ausflußmenge von 132 ccm/min ergaben sich bei

256 Schwingungen	die Wurfweite 46,0	die Wurfhöhe 8,06
384 „	„ „ 46,5	„ „ 8,14.

Nun ist die Wurfweite $W = \frac{c^2 \sin 2\varepsilon}{g}$, die Wurfhöhe $H = \frac{c^2 \sin^2 \varepsilon}{2g}$, wobei c die Geschwindigkeit der Tropfen bei ihrer Abspaltung, g die Erdbeschleunigung, ε der Neigungswinkel ist. Division beider Beziehungen ergibt $W/H = 4 \times \cotg \varepsilon$. So ergab sich für beide Strahlen (bei Einzelwirkung der Töne!) der Winkel annähernd 35° . Setzt man diesen Wert in die erste der Gleichungen ein, so folgt für c der Wert 216,5 cm/sec. (Dieser Wert läßt sich kontrollieren. Die Ausflußmenge betrug 132 ccm/min oder 2200 ccm/sec. Da nun die Ausflußöffnung der verwendeten Düse 4 rund 1 qmm, so ergibt sich hieraus eine Geschwindigkeit von 220 cm/sec). Wirkten nun die beiden Gabeltöne gleichzeitig auf den Strahl ein, so waren die gemessenen Steighöhen 7,81 und 8,57 cm. Daraus folgen zwei verschiedene Anfangsgeschwindigkeiten: $c_1 = 215,9$ und $c_2 = 226,1$ cm/sec.

Bei einer Ausflußmenge von 166 ccm/min erhielt ich bei

512 Schwingungen	$W = 83$	$H = 16,14$ cm
768 „	$W = 82$	$H = 16,34.$

Aus beiden folgt wiederum $\varepsilon = 38^\circ$ und $c = 288,3$ cm/sec.

Bei gleichzeitiger Einwirkung beider Töne waren die gemessenen Steighöhen 16,10 und 16,58 cm, woraus folgt $c_1 = 288,7$ und $c_2 = 293$ cm/sec.

(Bei dieser Ausflußmenge würde aus der oben in Parenthese angefügten Überlegung für die einfachen Strahlen eine Geschwindigkeit von 277 cm/sec folgen.) Man kann sich weiter überlegen, daß bei Einwirkung der Quinte 512, 768 entsprechend dem Differenztone 256 Zweiergruppen in jeder Sekunde abgespaltet werden müssen. Da in der Sekunde 2,766 ccm ausfließen, so würde jeder einzelne Tropfen 5,4 cmm Volumen besitzen, seine Masse wäre also 0,0054 g, falls man von der Bildung der ganz kleinen Zwischentröpfchen absieht. Die Energie, die nötig ist, um die oben berechnete Geschwin-

digkeitsänderung hervorzubringen wird sein $\frac{0,0054 (293^3 - 288,7^3)}{2} = 6,7 \text{ Erg.}$ Im ersten der angeführten Beispiele, wo Zweiergruppen entsprechend dem Differenzton 128 abgespaltet werden, erhält man $\frac{0,0082 (226,1^3 - 215,9^3)}{2} = 18,5 \text{ Erg.}$ Die tiefere Stimmgabel weist auch eine größere Intensität auf.

Man darf nun aber nicht den Schluß ziehen, daß die Verschiedenheit der Geschwindigkeiten auf den einzelnen Strahlen ausreichend wäre zur Erklärung der ganzen oben dargestellten Erscheinungen, die während der Schwebungszeiten der Differenztöne statthaben. Denn die hier errechneten Geschwindigkeiten sind ja nur aus je einem Momentanbilde gewonnen und sie können nicht erklären, wie der Strahl auf die Differenz- und Summationstöne ansprechen kann, wie je nach deren Stärke die jeder Gruppe zukommende Tropfenzahl variieren kann usw.; sie können nur einen Anhalt geben für das Auftreten mehrerer Strahlen. Sie sind nur eine sekundäre Wirkung der auftretenden Differenztöne, da die Wasserstrahlen im Tempo der Intensitätsschwankungen dieser Töne zusammen- und auseinanderklappen und sich im gleichen Tempo also auch die Geschwindigkeiten ändern müssen.

Über die Wasserfallelektrizität bei den beeinflussten Strahlen. Es ist von Lenard ¹⁾ gezeigt worden, daß Wasserstrahlen, die auf einen benetzbaren Körper auftreffen, in der umgebenden Luft negative Elektrizität erzeugen, einem mit einem Elektrometer verbundenen Gefäß positive Ladung zuführen. Eine bestimmte Wassermenge erzeugt beim Herabfallen um so mehr Wirkung, je größer die Anzahl der Tropfen ist, in die sie zerfällt. Ich untersuchte nun, ob sich bei akustisch beeinflussten Wasserstrahlen besondere Eigentümlichkeiten dieser Wasserfallelektrizität ergäben, mittels eines auf passende Empfindlichkeit gebrachten Quadrantelektrometers an einem fast senkrecht herabfallenden Wasserstrahle. Da dies nicht der Fall war, will ich von Zahlenmaterial absehen und nur kurz die folgenden Befunde angeben.

1) Ein zusammenfassendes Referat aller diesbezüglichen Arbeiten ist von A. Becker im Jahrbuch für Radioaktivität und Elektronik 9. p. 52—111. 1912 gegeben worden.

Läßt man den unbeeinflußten Strahl auf ein mit dem Elektrometer verbundenes Drahtnetz auffallen, so läßt sich dieses auf einen gewissen Maximalbetrag auf. Ertönt nun eine den Strahl beeinflussende Gabel, so wächst der Ausschlag des Elektrometers momentan an, da ja der Strahl viel weniger zerstäubt wird und die Tropfenfolge eine ganz regelmäßige wird. Dieser Anstieg ist abhängig von der Intensität der Tonquelle, er geht bei ihrem Verklingen auf den ursprünglichen Wert zurück. Der Anstieg ist, solange sich die anregenden Töne im engen Resonanzgebiet des Strahles befinden, mit der Tonhöhe proportional, da mit ihr die Tropfenzahl zunimmt. Töne, die unter oder über dem Resonanzgebiete des Strahles liegen, ergeben kleinere Anstiege des Ausschlages als solche im Resonanzgebiete. Beim Zusammenwirken zweier Töne im Intervall der Oktave oder Quinte entsteht kein anderer Ausschlag als bei den einzelnen Tönen, wohl deshalb, weil die Tropfenzahl im wesentlichen die gleiche bleibt und die Tropfen nur in Gruppen zusammengezogen werden. Auch beim Intervall der Quarte sind keine Besonderheiten nachweisbar; den einzelnen Phasen der Erscheinung vermag die Nadel des Elektrometers wegen ihrer großen Schwingungsdauer nicht zu folgen. Bei dissonanten Intervallen der einwirkenden Tonquellen ist ein regelmäßiges Anwachsen des ursprünglichen Ausschlages nicht mehr zu beobachten.

Fließt ein Wasserstrahl aus irgendeiner Öffnung aus, so wird seine Gestalt durch von außen wirkende Erschütterungen beeinflusst. Schon Buff¹⁾ hat gezeigt, daß die sich ergebende Form eines Strahles zu verdanken sei den Schwingungen der Flüssigkeitssäule um die Kreisform ihres Querschnitts, die sich der allgemein fortschreitenden Bewegung überlagern. Insofern diese Schwingungen als isochron betrachtet werden können, sei die Entfernung zweier korrespondierender Punkte der Strahlenfigur, die sog. Wellenlänge, direkt proportional der Strahlgeschwindigkeit. Diese Geschwindigkeit ändert sich natürlich bei direkt nach oben oder nach unten ausfließenden Strahlen. Bei Strahlen aber, die horizontal oder mit nicht zu großen Winkeln gegen die Horizontale ausfließen, wie ich

1) H. Buff, Liebigs Ann. 78. 1851; Pogg. Ann. 100. 1857.

sie bei meinen Messungen benutzte, wird sich keine besondere Geschwindigkeitsänderung ergeben. Daher konnte ich auch keine merkliche Änderung des Tropfenabstandes feststellen zwischen jenen Stellen des Strahles, wo er noch zusammenhielt, und den Stellen in der Nähe des Parabelscheitels, wo ich die einzelnen Tropfenbilder photographierte. — Wenn eine vollkommen kreisförmige Ausflußöffnung vorhanden ist und kein Hindernis irgendwelcher Art den Strahl in seiner Ausbildung behindert, so ist nichts vorhanden, was den Strahl unsymmetrisch machen kann; aber auch in diesem Fall wird der Verlauf des Strahles durch die Kapillarkräfte modifiziert. Er behält seine zylindrische Form nicht bei, sondern löst sich in mehr oder weniger regelmäßiger Form in Einzelmassen auf. Schon Plateau¹⁾ hat auf experimentellem und theoretischem Wege gezeigt, daß in Hinsicht auf die Oberflächenspannung der Zylinder eine Form unstabilen Gleichgewichts ist, sobald seine Länge seinen Umfang überschreitet. Es wird also irgendeine immer vorhandene Erschütterung im Reservoir des Wassers, welche Entstehungsursache sie auch haben möge, den Zerfall des Strahles herbeiführen. Ausgehend von den ersten Versuchen Savarts hatte Plateau als das Verhältnis der Wellenlänge jener regelmäßigen Erschütterung, die die regelmäßigste Zerstörung des zylindrischen Strahlteiles bedinge, zum Durchmesser des Strahles die Zahl 4,38 angegeben. In seiner theoretischen Darstellung des Gegenstandes ergibt sich als höchste Frequenz, die noch den Strahl beeinflussen kann, $n = v/2\pi r$. Statt des ersten Wertes 4,38 leitete Lord Rayleigh²⁾ auf theoretischem Wege die Zahl 4,508 ab und er konnte zeigen, daß die regelmäßigste Abspaltung erfolge für eine Frequenz $N = (3,142/4,508)n$.

Es müßte also n die Schwingungszahl des höchsten Tones sein, auf den der Strahl noch anspricht, N die Schwingungszahl, bei der seine Empfindlichkeit ein Maximum ist. Die oben angeführte Tab. 1 zeigt, daß für relativ weite Düsen die Übereinstimmung eine gute ist. So wäre für Düse 6 bei einer

1) Plateau, *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux forces moléculaires*, Paris 1873.

2) Lord Rayleigh, *Proc. of London math. Soc.* 10. p. 4—13. 1879.

Geschwindigkeit von 257 cm/sec $n = 715$ und $N = 498$. Bei engeren Düsen, wo also bei gleicher Ausflußmenge größere Geschwindigkeiten auftreten, ist die Übereinstimmung geringer. So wäre für Düse 2 bei einer Strahlgeschwindigkeit von 424 cm/sec $n = 1700$ und $N = 1185$. Daß die zu erwartende Übereinstimmung bei großen Geschwindigkeiten eine geringere sein dürfte, hat Rayleigh gelegentlich selbst ausgesprochen. Daß aber auch bei kleineren Geschwindigkeiten nicht zu viel von der Erfüllung dieser Beziehungen erwartet werden darf, das lehrt ja Bild 5 auf Taf. I, wo ein Ton, der höher ist als dem eigentlichen Resonanzgebiet des Strahles entspricht, auch noch Beeinflussung zeigt und er sich gewissermaßen so hilft, daß er im Tempo der noch im Resonanzgebiet liegenden tieferen Oktave Gruppen kleinerer Tropfen vom Strahle abspaltet.

Gießen, Physikalisches Institut der Universität Gießen.

(Eingegangen 27. April 1914.)