2. *Über die Strahlung von Elektronengruppen;* *von G. A. Schott.*

§ 1. *Umformung der Lorentzschen Potentiale.* Wir gehen von den bekannten Lorentzschen Potentialen φ und $\mathfrak{a}$ aus, wo

$$(1)\qquad \varphi = \iiint [\varrho] \frac{dx'\,dy'\,dz'}{R}, \quad \mathfrak{a} = \iiint \left[\varrho \frac{\mathfrak{v}}{c}\right] \frac{dx'\,dy'\,dz'}{R}.$$

Hier ist (x, y, z) der Aufpunkt, $dx'\ dy'\ dz'$ ein im Punkte (x', y', z') gelegenes festes Volumelement,

$$R = +\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2},$$

und ϱ die Ladungsdichte, $\mathfrak{v}$ die Ladungsgeschwindigkeit im Punkte (x', y', z') zur Zeit $t - R/c$. Es sind also ϱ, $\mathfrak{v}$ implizite Funktionen von t, x, y, z; wir wollen nun die Ausdrücke (1) umformen, so daß t als explizite Variable erscheint.

Mittels des Fourierschen Lehrsatzes bekommen wir z. B.

$$(2)\qquad \varphi = \frac{1}{2\pi} \iiint \frac{dx'\,dy'\,dz'}{R} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varrho \cos v(t - R/c - \tau)\, d\tau\, dv,$$

wo v eine Hilfsvariable, und τ als Zeit aufzufassen sind. Hier ist ϱ als explizite Variable von x', y', z', τ für alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ gegeben, und ebenso $\mathfrak{v}$. Für $\mathfrak{a}$ gilt ein entsprechender Ausdruck.

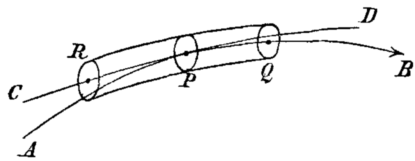
Die Ausdrücke (2) wollen wir jetzt auf bewegte Ladungselemente statt auf feste Volumelemente beziehen, da ja in erster Instanz die Koordinaten und Geschwindigkeiten eines jeden Ladungselementes gegeben sind.

Es sei $APQB$ die Bahn desjenigen Ladungselementes, welches sich zur Zeit τ im Punkte (x', y', z'), P befindet, Q, dessen Lage zur Zeit $\tau + d\tau$.

Wir nehmen nun um P herum ein Flächenelement σ und ziehen die seiner Begrenzung entsprechenden Bahnlinien, welche zusammen eine unendlich dünne Röhre aus dem Raume heraus-schneiden. Wir nehmen das Element PQ dieser Röhre zum Volumelement der Integrale (2), so daß

$$dx'dy'dz' = v\sigma d\tau.$$

Ferner sei $CRPD$ die Bahn des festen Punktes P relativ zur bewegten Gesamtladung, als substanzielles Gebilde be-



trachtet; die der Begrenzung von σ entsprechenden Relativbahnen schneiden aus ihr eine unendlich dünne Röhre heraus, welche die erste Röhre in P berührt. Die zur Zeit $\tau + d\tau$ im festen Volumelemente PQ enthaltenen Ladungen füllten zur Zeit τ das Volumelement RP der Gesamtladung aus, wobei offenbar $RP = PQ = v\,d\tau$ ist. Die Summe dieser Ladungen nehmen wir zum Ladungselemente de des neuen Integrales, so daß $de = \varrho v \sigma d\tau$. Also ist auch

$$de = \varrho\, dx'dy'dz'.$$

Dem Zeitelement $d\tau$, welches das Ladungselement de braucht, um die Strecke RP oder PQ ihrer Bahn zurückzulegen, entspricht genau demselben Zeitelement $d\tau$, welches der feste Punkt P braucht, um relativ zur bewegten Ladung die Strecke RP zurückzulegen, und die Integrationsgrenzen sind offenbar dieselben.

Wir bekommen also identisch

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2\pi}\int de \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos v\,(t - R/c - \tau)}{R}\, d\tau\, dv, \\ \mathfrak{a} &= \frac{1}{2\pi}\int de \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos v\,(t - R/c - \tau)}{R}\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}\right) d\tau\, dv. \end{aligned}\right.$$

Die Integrationen sind über alle Ladungselemente und für jedes für die ganze Zeit von $-\infty$ bis ∞ zu erstrecken; dabei sind die Koordinaten, sowie auch ϱ und $\mathfrak{v}$, als Funktionen von τ und irgendwelchen das Ladungselement $d\,e$ bestimmenden Parametern anzusehen.

In allen Fällen, wo das Feld eines Elektrons für gegen dessen Dimensionen große Entfernungen gesucht wird, kann die Integration in bezug auf $d\,e$ durch eine Summation in bezug auf die Ladungen e der Elektronen ersetzt werden, wobei R von irgend einem Punkte des Elektrons gemessen werden kann. Insbesondere gilt dieses für alle Strahlungsprobleme.

§ 2. Es sei nun ein System von Elektronen gegeben, welches sich in Bahnen von endlichen Dimensionen bewegt; wir fragen nach dem Felde für im Vergleiche dazu als unendlich anzusehenden Entfernungen.

Wir können setzen

$$R = r - \frac{x\,x' + y\,y' + z\,z'}{r} = r - p, \tag{4}$$

wo $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ die Entfernung des Aufpunktes vom irgendwie in der Nachbarschaft der Elektronen gedachten Anfangspunkt, und p die Projektion des Radiusvektors eines Elekrons auf $\mathfrak{r}$ bedeuten. Im Kosinus müssen wir das Glied p in (4) beibehalten, eben weil derselbe für unendliche Werte von r endlich bleibt; dagegen können wir in den Nennern von (3) $R = r$ setzen. So bekommen wir für ein jedes Elektron

$$\left\{\begin{aligned} \varphi &= \frac{e}{2\,\pi\,r}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos v\,(t - r/c + p/c - \tau)\,d\,\tau\,d\,v\,, \\ \mathfrak{a} &= \frac{e}{2\,\pi\,r}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos v\,(t - r/c + p/c - \tau)\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}\right)d\,\tau\,d\,v\,. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

§ 3. *Einfach periodische Bewegung eines Elektrons.* Es sei die Periode $= T$; wir setzen $T = 2\,\pi/\omega$, $\tau = \chi/\omega$ und $x' = f(\chi)$, $y' = g(\chi)$, $z' = h(\chi)$, wo f, g, h Funktionen mit der Periode $2\,\pi$ sind, so daß das Intervall von $\chi = 0$ bis $\chi = 2\,\pi$ einem Umlauf des Elektrons entspricht.

Wir teilen das Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\,\tau$ in unendlich viele Teilintegrale der Form

$$\int\limits_{j\,T}^{(j+1)\,T} d\,\tau = \frac{1}{\omega}\int\limits_{2\,\pi\,j}^{2\,\pi\,(j+1)} d\,\chi\,,$$

wo j eine ganze Zahl bedeutet; dabei können wir annehmen, daß j nacheinander alle Werte von $-N$ bis $+N$ annimmt, wo schließlich N unendlich groß zu nehmen ist. Im Teilintegrale ersetzen wir χ durch $\chi + 2\pi j$, was auf die Werte von p und $\mathfrak{v}$ offenbar ohne Einfluß ist, und bekommen so aus (5)

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
\varphi &= \frac{e}{2\pi r \omega}\int_0^{2\pi} d\chi \,.\, \operatorname*{Lim}_{N=\infty} \sum_{j=-N}^{j=N} \int_{-\infty}^{\infty} \cos v\Big(t - r/c - \frac{2\pi j}{\omega} \\
&\qquad\qquad + \frac{p}{c} - \frac{\chi}{\omega}\Big)\, d v \\
&= \frac{e}{2\pi r \omega}\int_0^{2\pi} d\chi \,.\, \operatorname*{Lim}_{N=\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin (2N+1)\frac{v\pi}{\omega}}{\sin \frac{v\pi}{\omega}} \cos v (t - r/c \\
&\qquad\qquad + p/c - \chi/\omega)\, d v \\
&= \frac{e}{\pi r} \sum_{j=0}^{j=\infty}{}' \int_0^{2\pi} \cos j \{\omega (t - r/c) + \omega p/c - \chi\}\, d\chi \\
\mathfrak{a} &= \frac{e}{\pi r} \sum_{j=0}^{j=\infty}{}' \int_0^{2\pi} \cos j \{\omega (t - r/c) + \omega p/c - \chi\} \frac{\mathfrak{v}}{c}\, d\chi\,.
\end{aligned}
\right.
$$

§ 4. *Elektronengruppe.* Es seien n Elektronen gegeben, welche dieselbe Bahn mit derselben Periode und gleichen Intervallen hintereinander beschreiben, so zwar, daß für das i^{te} Elektron

$$
(7)\quad x' = f\left(\chi + \frac{2\pi i}{n}\right),\quad y' = g\left(\chi + \frac{2\pi i}{n}\right),\quad z' = h\left(\chi + \frac{2\pi i}{n}\right).
$$

Solch ein System wollen wir eine Gruppe nennen; ihre hauptsächliche Eigenschaft ist die, daß durch Interferenz der von den verschiedenen Elektronen ausgesandten Wellen eine große Anzahl der harmonischen Glieder der Reihen (6) zerstört werden, und die Gesamtstrahlung der Gruppe dementsprechend klein wird.

In den dem i^{ten} Elektrone entsprechenden Integralen von (6) ersetzen wir χ durch $\chi + 2\pi i/n$, wobei dann für alle Elektronen dieselben Funktionen $f(\chi)$, $g(\chi)$ und $h(\chi)$ eingeführt werden. Die Grenzen ändern sich in $+ 2\pi i/n$ und

$2\pi + 2\pi i/n$ ab, können aber wegen der Periodizität wieder zu 0 und 2π gemacht werden. Summieren wir nun für alle Elektronen, d. h. für alle Werte von i von 0 bis $n-1$, so bekommen wir für die ganze Elektronengruppe aus (6)

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi &= \frac{n\,e}{\pi\,r}\sum_{s=0}^{s=\infty}{}'\int_0^{2\pi}\cos s\,n\{\omega(t-r/c)+\omega\,p/c-\chi\}\,d\chi\,, \\ \mathfrak{a} &= \frac{n\,e}{\pi\,r}\sum_{s=0}^{s=\infty}{}'\int_0^{2\pi}\cos s\,n\{\omega(t-r/c)+\omega\,p/c-\chi\}\frac{\mathfrak{v}}{c}\,d\chi\,. \end{aligned}\right.$$

§ 5. *Elektrische und magnetische Kräfte.* Mittels der Gleichungen

$$\mathfrak{d} = -\operatorname{grad}.\varphi - \frac{\dot{\mathfrak{a}}}{c}\,,$$
$$\mathfrak{h} = \operatorname{rot}.\mathfrak{a}$$

bekommen wir aus (7) sofort

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{d} &= \frac{n\,e\,\omega}{\pi\,c^2\,r}\sum_{s=1}^{s=\infty}s\,n\int_0^{2\pi}\sin s\,n\left\{\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right. \\ &\qquad\qquad \left.+\,\omega\,p/c-\chi\right\}(\mathfrak{v}-c\,\mathfrak{r}_1)\,d\chi\,, \\ \mathfrak{h} &= \frac{n\,e\,\omega}{\pi\,c^2\,r}\sum_{s=1}^{s=\infty}s\,n\int_0^{2\pi}\sin s\,n\left\{\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right. \\ &\qquad\qquad \left.+\,\omega\,p/c-\chi\right\}[\mathfrak{r}_1\,.\,\mathfrak{v}]\,d\chi\,, \end{aligned}\right.$$

wobei Größen höherer Ordnung als $1/r$ vernachlässigt worden sind.

Führen wir Polarkoordinaten (r, θ, ψ) ein, wobei θ Polardistanz und ψ Länge bedeuten, und bilden die radialen Komponenten $\mathfrak{d}_r$, $\mathfrak{h}_r$, so verschwindet $\mathfrak{h}_r$ offenbar; das Integral für $\mathfrak{d}$ dagegen besitzt den Faktor

$$\mathfrak{v}_r - c = c\,\frac{d}{d\chi}(\omega\,p/c-\chi)\,,$$

so daß der Integrand ein vollständiges Differenzial ist, und das Integral wegen der Periodizität identisch verschwindet. Das entfernte Feld ist also rein transversal. Ferner haben wir

$$
(9)\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{d}_\theta = \quad h_\psi &= \frac{n e \omega}{\pi c^2 r} \sum_{s=1}^{s=\infty} s n \int_0^{2\pi} \sin s n \left\{\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) + \omega p/c - \chi\right\} v_\theta \, d\chi, \\
\mathfrak{d}_\psi = - h_\theta &= \frac{n e \omega}{\pi c^2 r} \sum_{s=1}^{s=\infty} s n \int_0^{2\pi} \sin s n \left\{\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) + \omega p/c - \chi\right\} v_\psi \, d\chi.
\end{aligned}\right.
$$

Die elektrische und magnetische Kraft sind also einander gleich und stehen aufeinander senkrecht.

Das Feld ist gemäß (9) durch die Größen p, v_θ, v_ψ vollständig bestimmt.

Der Kürze halber setzen wir

$$
(10)\left\{\begin{aligned}
A_{sn} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos s n (\omega p/c - \chi) v_\theta \, d\chi, \\
B_{sn} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin s n (\omega p/c - \chi) v_\theta \, d\chi, \\
C_{sn} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos s n (\omega p/c - \chi) v_\psi \, d\chi, \\
D_{sn} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin s n (\omega p/c - \chi) v_\psi \, d\chi.
\end{aligned}\right.
$$

Es sind also die $A, \ldots$ gewissermaßen Normalfunktionen der betrachteten Elektronengruppe; wir können wegen (10) schreiben

$$
(11)\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{d}_\theta = \quad h_\psi &= \frac{2 n e \omega}{c^2 r} \sum_{s=1}^{s=\infty} s n \{A_{sn} \sin s n \omega (t - r/c) \\
&\qquad + B_{sn} \cos s n \omega (t - r/c)\}, \\
\mathfrak{d}_\varphi = - h_\theta &= \frac{2 n e \omega}{c^2 r} \sum_{s=1}^{s=\infty} s n \{C_{sn} \sin s n \omega (t - r/c) \\
&\qquad + D_{sn} \cos s n \omega (t - r/c)\},
\end{aligned}\right.
$$

wo also die Kräfte des Feldes in ihre harmonischen Komponenten zerlegt erscheinen.

§ 6. *Strahlung.* Der Poyntingsche Vektor $c/4\pi[\mathfrak{d}\,.\,\mathfrak{h}]$ ist offenbar radial nach außen gerichtet und gemäß (9) oder (11) gleich $c/4\pi(\mathfrak{d}_\theta^2 + \mathfrak{d}_\psi^2)$. Um die Strahlung zu finden, multiplizieren wir mit dt/T und integrieren über eine Periode, wobei alle Produkte verschiedener harmonischer Komponenten verschwinden; sodann multiplizieren wir mit dem Oberflächenelement $r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi$ und integrieren über die Einheitskugel; so bekommen wir aus (11) für die Gesamtstrahlung S der Elektronengruppe

$$(12)\quad S = \frac{n^2 e^2 \omega^2}{2\pi c^3} \sum_{s=1}^{s=\infty} s^2 n^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (A_{sn}^2 + B_{sn}^2 + C_{sn}^2 + D_{sn}^2) \sin\theta\, d\theta\, d\chi\,.$$

Die Gleichung (12) liefert den Beweis von der Verminderung der Strahlung durch die Gruppierung, wovon schon im § 5 die Rede war; denn aus ihr folgt, da die Strahlung eines einzelnen Elektrons durch (12) mit $s = 1$ gegeben wird, daß die n ersten Glieder derselben bei der Gruppe durch das n^2-fache ihres n^{ten} Gliedes ersetzt sind usw. Da nun die Größen $A \ldots$ im allgemeinen mit wachsender Ordnungszahl rasch abnehmen, so ist das n-fache der n ersten Glieder der Strahlung des einzelnen Elektrons vielmals größer als das n^2-fache ihres n^{ten} Gliedes, welches zugleich auch das Hauptglied der Strahlung der Elektronengruppe ist usw., und deswegen auch die Strahlung n einzelner Elektronen vielmals größer als diejenige der entsprechenden Elektronengruppe.

Die Bedingungen für diese Verminderung der Strahlung durch Interferenz sind in allgemeinster Weise durch die Gleichungen (7) gegeben.

§ 7. *Rotierender Kreisring.* Als einfachstes Beispiel wollen wir diesen Fall eingehend behandeln; wir betrachten also ein System von n Elektronen, die sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit in einem Kreise vom Radius ϱ bewegen. Sind sie gleichmäßig verteilt, so bilden sie eine Gruppe, und dementsprechend setzen wir

$$x' = f(\chi) = \varrho \cos\chi\,, \quad y' = g(\chi) = \varrho \sin\chi\,,$$
$$z' = h(\chi) = 0\,.$$

Daraus folgt

$$p = (x' \cos\psi + y' \sin\psi)\sin\theta + z'\cos\theta = \varrho \sin\theta \cos(\chi - \psi),$$
$$v_\theta = (\dot{x}' \cos\psi + \dot{y}' \sin\psi)\cos\theta - \dot{z}' \sin\theta = -\omega\varrho\cos\theta\sin(\chi-\psi),$$
$$v_\psi = -\dot{x}'\sin\psi + \dot{y}'\cos\psi = \omega\varrho\cos(\chi - \psi).$$

Wir setzen

$$\chi = u + \psi - \frac{\pi}{2}, \quad \omega\varrho/c = \beta;$$

dann folgt aus (18), in der üblichen Bezeichnung der Besselschen Funktionen,

$$A_{sn} = \quad c\cot\theta\, J_{sn}(s\,n\,\beta\sin\theta)\cos s\,n\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right),$$
$$B_{sn} = -\,c\cot\theta\, J_{sn}(s\,n\,\beta\sin\theta)\sin s\,n\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right),$$
$$C_{sn} = -\,c\,\beta\, J'_{sn}(s\,n\,\beta\sin\theta)\sin s\,n\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right),$$
$$D_{sn} = -\,c\,\beta\, J'_{sn}(s\,n\,\beta\sin\theta)\cos s\,n\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right),$$

und daraus mittels (11)

$$(13)\left\{\begin{aligned} \mathfrak{d}_\theta = \quad h_\psi &= \frac{2e\beta}{r\varrho} n^2 \cot\theta \sum_{s=1}^{s=\infty} s\, J_{sn}(s\,n\,\beta\sin\theta) \\ &\qquad \sin s\,n\left[\omega(t - r/c) + \frac{\pi}{2} - \psi\right], \\ \mathfrak{d}_\psi = -\,h_\theta &= -\frac{2e\beta^2}{r\varrho} n^2 \sum_{s=1}^{s=\infty} s\, J'_{sn}(s\,n\,\beta\sin\theta) \\ &\qquad \cos s\,n\left[\omega(t - r/c) + \frac{\pi}{2} - \psi\right] \end{aligned}\right.$$

in Übereinstimmung mit den anderwärts von mir angegebenen Ausdrücken.[1]) Ferner gibt die Gleichung (12)

$$(14)\left\{\begin{aligned} S = \frac{2ce^2\beta^2}{\varrho^2} n^4 \sum_{s=1}^{s=\infty} s^2 \int_0^{\pi/2} &[\cot^2\theta\,.\,\{J_{sn}(s\,n\,\beta\sin\theta)\}^2 \\ &+ \beta^2\{J'_{sn}(s\,n\,\beta\sin\theta)\}^2]\sin\theta\,d\theta. \end{aligned}\right.$$

§ 8. Dieser Ausdruck kann mittels des Neumannschen Additionstheorems vereinfacht werden; es ist

$$\{J_{sn}(x)\}^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi J_0(2x\sin\varphi)\cos 2\,s\,n\,\varphi\,d\varphi,$$

1) G. A. Schott, Phil. Mag. [6] **13.** p. 194.

woraus folgt

$$\{J'_{sn}(x)\}^2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi J_0(2\,x\sin\varphi)\left(\cos 2\,\varphi - \frac{s^2 n^2}{x^2}\right)\cos 2\,s\,n\,\varphi\,d\varphi.$$

Setzen wir $x = s\,n\,\beta\sin\theta$, so ist daher

$$\cot^2\theta\,.\{J_{sn}(s\,n\,\beta\sin\theta)\}^2 + \beta^2\{J'_{sn}(s\,n\,\beta\sin\theta)\}^2$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi J_0(2\,s\,n\,\beta\sin\theta\sin\varphi)(\beta^2\cos 2\,\varphi - 1)\cos 2\,s n\,\varphi\,d\varphi.$$

Dieses benutzen wir in Gleichung (14), kehren die Reihenfolge der Integrationen um, und beachten, daß

$$\int\limits_0^{\pi/2} J_0(2\,s\,n\,\beta\sin\theta\sin\varphi)\sin\theta\,d\theta = \frac{\sin(2\,s\,n\,\beta\sin\varphi)}{2\,s\,n\,\beta\sin\varphi}$$

$$= \frac{1}{\beta}\int\limits_0^\beta \cos(2\,s\,n\,x\sin\varphi)\,dx.$$

Mittels der Definitionsgleichung

$$J_m(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos(z\sin\varphi)\cos m\,\varphi\,d\varphi$$

bekommen wir dann

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} S = \frac{2\,c\,e^2\beta}{\varrho^2}\,n^2\sum_{s=1}^{s=\infty}\Big[&s\,n\,\beta^2 J'_{2sn}(2\,s\,n\,\beta)\\ &- s^2 n^2(1-\beta^2)\int\limits_0^\beta J_{2sn}(2\,s n\,x)\,dx\Big]\end{aligned}\right.$$

in Übereinstimmung mit dem früher angegebenen Werte (l. c. p. 194).

Dem Ursprunge nach ist jedes Glied der Summe positiv, also die Summe selbst jedenfalls kleiner als der Wert, den sie für $n = 1$ annimmt; in diesem Spezialfall kann man sie aber berechnen. Man hat nämlich

$$\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{J_{2s}(2\,s\,x)}{(2\,s)^2} = \frac{x^2}{8}\,^{1)},$$

1) N. Nielsen, Zylinderfunktionen p. 303, (5).

woraus mittels der Besselschen Differentialgleichung nacheinander folgen

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} J_{2s}(2sx) = \frac{x^2}{2(1-x^2)}, \quad \sum_{s=1}^{s=\infty} 2s J'_{2s}(2sx) = \frac{x}{(1-x^2)^2},$$

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} (2s)^2 J_{2s}(2sx) = \frac{2x^2(1+x^2)}{(1-x^2)^4}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in (15) ein, wobei $n = 1$, so bekommt man für das einzelne Elektron

$$S = \frac{2ce^2\beta^4}{3\varrho^2(1-\beta^2)^2},$$

was mit der bekannten Liénardschen Formel übereinstimmt, und zugleich als Bestätigung der Formel (15) und Beweis ihrer Konvergenz dienen mag.

§ 9. *Mehrfach periodische Bewegung — Störungen einer Elektronengruppe.* Es sind die Koordinaten bestimmt durch Ausdrücke der Form $x' = \Sigma f(\chi)$ usw., wo die Funktionen f usw. periodisch sind, aber inkommensurabele Perioden besitzen. Der allgemeine Fall ist zu kompliziert, als daß es sich lohnen würde ihn eingehend zu behandeln; wir beschränken uns deswegen auf Bewegungen dieser Art, wo die einer Periode entsprechenden Amplituden so stark überwiegen, daß die übrigen nur bis zur ersten Potenz berücksichtigt zu werden brauchen. Mit anderen Worten, wir betrachten eine durch die vorwiegenden Amplituden gekennzeichnete Hauptbewegung, welche kleinen Störungen ausgesetzt ist.

Wir gehen auf die Gleichungen (5) zurück und setzen darin $p + \delta p$ statt p, und $\mathfrak{v} + \delta\mathfrak{v}$ statt $\mathfrak{v}$, wo sich p und $\mathfrak{v}$ auf die Hauptbewegung, δp und $\delta\mathfrak{v}$ aber auf die Störungen beziehen sollen. Dabei nehmen wir der Einfachheit halber Bewegungen an, die seit so langer, praktisch unendlicher Zeit bestanden haben, daß der Einfluß der Anfangsbedingungen vernachlässigt werden kann, und vernachlässigen dabei auch die Dämpfung. Wollte man letztere berücksichtigen, so müßte man die Art der Erregung in Betracht ziehen, weil ja die Integration nach der Zeit τ in (5) sich bis ins negative Unendliche erstreckt und die Integrale sonst nicht konvergieren würden. Da wir nur die ersten Potenzen der Störungen beibehalten werden, so können wir uns auf je ein einziges Glied von δp und $\delta \mathfrak{v}$ beschränken.

§ 10. *Kinematik der Störungen.* (x', y', z') seien die Koordinaten des i^{ten} Elektrons in der ungestörten Hauptbewegung; sie werden durch Gleichungen der Form (7) definiert, wodurch natürlich auch das durch die Bahntangente, Hauptnormale und Binormale gebildete Triëder für jedes Elektron zu jeder Zeit vollständig bestimmt ist. Es seien (α, β, γ), (l, m, n) und (λ, μ, ν) die Direktionskosinus seiner drei Achsen; dieselben sind also ganz bestimmte Funktionen von $\chi + 2\pi i/n$.

In der gestörten Bewegung ist das Elektron eine kleine Strecke weit aus der Lage, die derselben Zeit in der Hauptbewegung entsprechen würde, verschoben; die Komponenten der Verschiebung in Richtung der Triëderachsen seien (ξ, η, ζ), so daß also (ξ, η, ζ) die Störung vollständig bestimmen.

Ein Punkt, der die Hauptbewegung der Gruppe mitmacht, ist allgemein durch eine Größe σ bestimmt, wobei seine Koordinaten durch $x' = f(\chi + \sigma)$ usw. gegeben sind; so ist z. B. $\sigma = 2\pi i/n$ für das i^{te} Elektron der Gruppe. Die Störung (ξ, η, ζ) läßt sich mittels des Fourierschen Lehrsatzes für diesen Punkt in eine Summe periodischer Funktionen zerlegen, wobei ein jedes Glied von der Form $\xi = A \cos q\tau$ usw. ist. Es ändert sich im allgemeinen A von Punkt zu Punkt, ist also eine Funktion von σ, und zwar notwendigerweise periodisch mit der Periode 2π. Daraus folgt für die Gesamtheit der Punkte der Elektronengruppe mittels des Fourierschen Lehrsatzes als allgemeinster Ausdruck für ξ eine Summe der Form

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\xi = \sum \{A \cos(q\tau - k\sigma) + A_1 \sin(q\tau - k\sigma)\},\\
&\text{und ebenso}\\
&\eta = \sum \{B \cos(q\tau - k\sigma) + B_1 \sin(q\tau - k\sigma)\},\\
&\zeta = \sum \{C \cos(q\tau - k\sigma) + C_1 \sin(q\tau - k\sigma)\},\\
&\delta p = \sum \{P \cos(q\tau - k\sigma) + P_1 \sin(q\tau - k\sigma)\},\\
&\delta \mathfrak{v} = \sum \{V \cos(q\tau - k\sigma) + V_1 \sin(q\tau - k\sigma)\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Hierin ist q eine inkommensurabele Zahl, k dagegen ganzzahlig, und zwar ohne Beschränkung der Allgemeinheit als zwischen $\pm n/2$ liegend zu betrachten. A, A_1, B, B_1, C und C_1 sind Konstanten, P, P_1, V und V_1 aber Funktionen von $\omega\tau+\sigma$ mit der Periode 2π; wir haben nämlich

$\delta x' = \alpha\xi + l\eta + \lambda\zeta,\quad \delta y' = \beta\xi + m\eta + \mu\zeta,\quad dz' = \gamma\xi + n\eta + \nu\zeta,$

daher auch

$$P = \frac{x}{r}(\alpha A + l B + \lambda C) + \frac{y}{r}(\beta A + m B + \mu C) + \frac{z}{r}(\gamma A + n B + \nu C) \text{ usw.}$$

Für einen bestimmten Punkt bzw. Elektron der Gruppe, also für ein gegebenes σ, sind $\xi, \ldots$ periodische Funktionen mit der Schwingungszahl q, wobei aber man sich hüten muß, q mit der Schwingungszahl der durch die Störung verursachten ausgesandten Wellen zu verwechseln, welche nur aus den zu bestimmenden Ausdrücken für die Feldintensitäten gefolgert werden kann.

Für eine bestimmte Schwingungsphase ist $q\tau - k\sigma$ gegeben; also ist $q\omega/k$ die Geschwindigkeit der Phase relativ zur bewegten Elektronengruppe, und die Ausdrücke (16) entsprechen Wellen, die mit eben dieser Geschwindigkeit in der Gruppe fortschreiten.

Schließlich bestimmt die Zahl k den Typus der Störung; es gibt nämlich bei derselben $2k$ Schwingungsknoten und ebensoviel Bäuche, alle mit dem gleichen Abstand $2\pi/k$.

§ 11. *Potentiale der Störung.* Um das Feld der Störung zu finden, setzten wir die durch (16) gegebenen Ausdrücke für δp und $\delta\mathfrak{v}$ in die Gleichungen (5) ein; so bekommen wir für die Störungspotentiale

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\varphi &= \frac{e}{2\pi r}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos v(t - r/c + p/c - \tau)\,\delta p\,.\,d\tau\,dv,\\ \delta\mathfrak{a} &= \frac{e}{2\pi r}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos v(t - r/c + p/c - \tau)\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}\right)\cdot\delta p\,d\tau\,dv\\ &\quad + \frac{e}{2\pi r}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos v(t - r/c + p/c - \tau)\left(\frac{\delta\mathfrak{v}}{c}\right)d\tau\,dv. \end{aligned}\right.$$

Wir verfahren jetzt gerade wie in dem § 4, teilen nämlich das Integrationsintervall für τ, oder das entsprechende für $\chi = \tau/\omega$, in Teilintegrale von $\chi = 2\pi j$ bis $\chi = 2\pi(j+1)$, und setzen $2\pi j + \chi$ statt χ, wodurch die Funktionen p, $\mathfrak{v}$, P, $\mathfrak{V}$ usw. nicht verändert werden, und summieren schließlich über sämtliche Teilintegrale; so bekommen wir z. B.

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{\omega}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos v(t-r/c+p/c-\chi/\omega)\cos\left(\frac{q}{\omega}\chi - k\,\sigma\right)P\,d\chi\,dv\\
&= \frac{1}{\omega}\lim_{N=\infty}\sum_{j=-N}^{j=N}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{2\pi}\cos v(t-r/c+p/c-\chi/\omega+2\pi j/\omega)\\
&\qquad\qquad\cos\left(\frac{q}{\omega}\chi - k\,\sigma - 2\pi q j\right)P\,d\chi\,dv\\
&= \frac{1}{\omega}\int\limits_{0}^{2\pi}P\,d\chi\lim_{N=\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2N+1)\dfrac{\pi(v-q)}{\omega}}{\sin\dfrac{\pi(v-q)}{\omega}}\\
&\qquad\qquad\cos\left\{v(t-r/c+p/c-\chi/\omega)+\frac{q}{\omega}\chi - k\,\sigma\right\}dv\\
&= \sum_{j=-\infty}^{j=\infty}\int\limits_{0}^{2\pi}\cos\{(q+j\,\omega)(t-r/c+p/c)-j\,\chi - k\,\sigma\}P\,d\chi.
\end{aligned}\right.$$

Nun verfahren wir wie im § 5, um den Beitrag aller Elektronen der Gruppe zu dem betrachteten Gliede zu finden; in (18) sind p und P für das betrachtete, nullte, Elektron Funktionen von χ, und σ ist gleich Null, dagegen sind p und P für das i^{te} Elektron dieselben Funktionen von $\chi + 2\pi i/n$, während σ gleich $2\pi i/n$ ist. Um nun für jedes Elektron dieselben Funktionen p und P einzuführen, müssen wir für das i^{te} Elektron überall im Integrale χ durch $\chi - 2\pi i/n$ ersetzen, also auch im Kosinus, so daß dessen Argument jetzt zu

$$(q+j\,\omega)(t-r/c+p/c)-j\,\chi+(j-k)\frac{2\pi i}{n}$$

wird. Dabei ändern sich die Grenzen des Integrals in $2\pi i/n$ und $2\pi + 2\pi i/n$ ab, dürfen aber wegen der Periodizität aller Funktionen von χ in 0 und 2π umgeändert werden. Summieren wir jetzt alle Ausdrücke (18) für alle Elektronen der

Gruppe, indem wir nacheinander i gleich 0,1, . . . $n-1$ setzen, so bekommen wir die Summe

$$\sum_{j=-\infty}^{j=\infty} \sum_{i=0}^{i=n-1} \int_0^{2\pi} \cos \left\{(q+j\,\omega)(t-r/c+p/c)-j\,\chi+(j-k)\frac{2\,\pi\,i}{n}\right\} P\,d\chi$$

$$= n \sum_{s=-\infty}^{s=\infty} \int_0^{2\pi} \cos\left[\{q+(k+s\,n)\,\omega\}(t-r/c+p/c)-(k+s\,n)\,\chi\right] P\,d\chi\,.$$

Setzen wir noch der Kürze halber

$$m = k + s\,n, \quad l = \frac{q}{\omega} + k + s\,n\,, \tag{19}$$

so bekommen wir aus (16) und (17)

$$\left\{\begin{aligned} \delta\varphi &= \frac{n\,e}{2\,\pi\,r} \sum_{s=-\infty}^{s=\infty} \frac{l\,\omega}{c} \int_0^{2\pi} \Big[-P \sin\{l\,\omega\,(t-r/c+p/c)-m\,\chi\} \\ &\qquad + P_1 \cos\{l\,\omega\,(t-r/c+p/c)-m\,\chi\}\Big]\,d\chi, \\ \delta\mathfrak{a} &= \frac{n\,e}{2\,\pi\,c\,r} \sum_{s=-\infty}^{s=\infty} \int_0^{2\pi} \left[\left(\boldsymbol{V}_1 - \frac{l\omega}{c} P\,\mathfrak{v}\right) \sin\{l\omega\,(t-r/c+p/c)-m\,\chi\} \right. \\ &\qquad \left. + \left(\boldsymbol{V} + \frac{l\omega}{c} P_1\mathfrak{v}\right) \cos\{l\omega\,(t-r/c+p/c)-m\,\chi\}\right] d \end{aligned}\right. \tag{20}$$

§ 12. *Die Feldintensitäten der Störung.* Aus (20) lassen sich, gerade wie im § 5, die Feldintensitäten ableiten; dabei brauchen wir nicht wieder auf alle Details einzugehen. Wir finden, bis zur Ordnung $1/r$,

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{d} &= \frac{n\,e\,\omega}{2\,\pi\,c^2\,r} \sum_{s=-\infty}^{s=\infty} l \int_0^{2\pi} \left[\left\{l\,\omega\,P\left(\frac{\mathfrak{v}}{c} - \mathfrak{r}_1\right) - \boldsymbol{V}_1\right\} \right. \\ &\qquad \cos\{l\,\omega\,(t-r/c+p/c)-m\,\chi\} \\ &\quad \left. + \left\{l\,\omega\,P_1\left(\frac{\mathfrak{v}}{c} - \mathfrak{r}_1\right) + \boldsymbol{V}\right\} \sin\{l\,\omega\,(t-r/c+p/c)-m\,\chi\}\right] d\chi\,, \\ \mathfrak{h} &= \frac{n\,e\,\omega}{2\,\pi\,c^2\,r} \sum_{s=-\infty}^{s=\infty} l \int_0^{2\pi} \left[\left\{l\,\omega\,P\left[\mathfrak{r}_1 \cdot \frac{\mathfrak{v}}{c}\right] - [\mathfrak{r}_1 \cdot \boldsymbol{V}_1]\right. \right. \\ &\qquad \cos\{l\,\omega\,(t-r/c+p/c-m\,\chi\} \\ &\quad \left. + \left\{l\,\omega P_1\left[\mathfrak{r}_1 \cdot \frac{\mathfrak{v}}{c}\right] + [\mathfrak{r}_1 \cdot \boldsymbol{V}]\right\} \sin\left\{l\omega(t-r/c+p/c)-m\chi\right\}\right] d\chi\,. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Daraus lassen sich, wie früher, folgende Schlüsse ziehen:

1. Die elektrischen und magnetischen Kräfte sind senkrecht zum Radiusvektor.

2. Sie sind auch senkrecht zueinander und einander gleich.

3. Der Poyntingsche Vektor ist radial nach außen gerichtet.

Der Beweis von 1, was die elektrische Kraft anbelangt, läßt sich leicht führen, wenn man die Definitionsgleichungen (16) berücksichtigt, und bedenkt, daß

$$\frac{d\,p}{d\,\tau} = (\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{v})\,, \quad \frac{d\,\delta\,p}{d\,\tau} = (\mathfrak{r}_1\,\delta\,\mathfrak{v})\,.$$

Wir führen nun folgende Normalfunktionen ein:

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} \delta A_m &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Big[\Big(l\,\omega\,P\frac{v_\theta}{c} - V_{1\theta}\Big)\sin\Big(m\chi - l\frac{\omega\,p}{c}\Big) \\ &\qquad + \Big(l\,\omega\,P_1\frac{v_\theta}{c} + V_\theta\Big)\cos\Big(m\chi - l\frac{\omega\,p}{c}\Big)\Big]\,d\chi\,, \\ \delta B_m &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Big[\Big(l\,\omega\,P\frac{v_\theta}{c} - V_{1\theta}\Big)\cos\Big(m\chi - l\frac{\omega\,p}{c}\Big) \\ &\qquad - \Big(l\,\omega\,P_1\frac{v_\theta}{c} + V_\theta\Big)\sin\Big(m\chi - l\frac{\omega\,p}{c}\Big)\Big]\,d\chi\,, \\ \delta C_m,\ \delta D_m &= \text{dieselben Funktionen mit } v_\psi,\ V_\psi,\ V_{1\psi} \\ &\qquad \text{statt } v_\theta,\ V_\theta,\ V_{1\theta}, \end{aligned}\right.$$

wo v_θ und v_ψ die Komponenten von $\mathfrak{v}$ in den Richtungen θ und ψ bedeuten, und ebenso für V_θ, V_ψ, $V_{1\theta}$ und $V_{1\psi}$, und $l = m + q/\omega$. Dann bekommen wir

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{d}_\theta = \quad h_\psi &= \frac{n\,e\,\omega}{c^2\,r}\sum_{s=-\infty}^{s=\infty} l\{\delta A_m \sin l\,\omega\,(t - r/c) \\ &\qquad + \delta B_m \cos l\,\omega\,(t - r/c)\}\,, \\ \mathfrak{d}_\psi = - h_\theta &= \frac{n\,e\,\omega}{c^2\,r}\sum_{s=-\infty}^{s=\infty} l\{\delta C_m \sin l\,\omega\,(t - r/c) \\ &\qquad + \delta D_m \cos l\,\omega\,(t - r/c)\}\,, \\ &(m = k + s\,n)\,. \end{aligned}\right.$$

§ 13. *Strahlung der Störung.* Wir bekommen aus (23), genau wie im § 6

$$S = \frac{n^2 e^2 \omega^2}{8 \pi c^3} \sum_{s=-\infty}^{s=\infty} l^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \{(\delta A_m)^2 + (\delta B_m)^2 + (\delta C_m)^2 + (\delta D_m)^2\} \sin\theta \, d\theta \, d\psi . \tag{24}$$

Aus (23) und (24) ziehen wir folgende Schlüsse:

Die Störung der relativen Schwingungszahl q, welche mit der Umlaufszahl ω der Hauptbewegung inkommensurabel ist, verursacht Wellen mit den Schwingungszahlen $l\omega = q + (k + sn)\omega$; dieselben lassen sich in zwei Reihen zusammenfassen, je nachdem l positiv oder negativ ist. Die Strahlung besteht gemäß (24) aus einer entsprechenden Anzahl von Gliedern, von denen das $s = 0$, $m = k$, $l = q/\omega + k$ entsprechende vorherrscht, während die übrigen mit wachsendem s immer kleiner werden. Ist k groß, d. h. mit n vergleichbar, so ist die Strahlung klein, von derselben Ordnung wie diejenige der Hauptbewegung, also in einem permanenten Systeme ganz zu vernachlässigen; ist k dagegen klein, gleich 0, $\pm 1, \ldots$, so ist die Strahlung relativ groß. Im allgemeinen können also nur Störungen letzter Art, also kleinen Werten von k entsprechend, starke Wellen verursachen; die Energie dieser Strahlungen kann offenbar nicht dem Eigenvorrat des Systems entstammen, sondern muß ihm von außen zugeführt werden.

Wir wollen wieder unsere Gleichungen am Beispiele des rotierenden Kreisringes erläutern.

§ 14. *Störungen des rotierenden Kreisringes.* Mit den Bezeichnungen des § 7 setzen wir für das 0^te^ Elektron

$$\delta x' = -\xi \sin\chi - \eta \cos\chi , \quad \delta y' = \xi \cos\chi - \eta \sin\chi , \quad \delta z' = \zeta ,$$

woraus folgt, da $\chi = \omega \tau$,

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}' &= -(\dot{\xi} - \omega \eta) \sin\chi - (\dot{\eta} + \omega \xi) \cos\chi , \\ \delta \dot{y}' &= (\dot{\xi} - \omega \eta) \cos\chi - (\dot{\eta} + \omega \xi) \sin\chi , \quad \delta \dot{z}' = \dot{\zeta} , \end{aligned}$$

also auch

$$\begin{aligned} \delta p &= -\{\xi \sin(\chi - \psi) + \eta \cos(\chi - \psi) \sin\theta + \zeta \cos\theta , \\ \delta v_\theta &= -\{(\dot{\xi} - \omega \eta) \sin(\chi - \psi) + (\dot{\eta} + \omega \xi) \cos(\chi - \psi)\} \cos\theta - \dot{\zeta} \sin\theta , \\ \delta v_\psi &= (\dot{\xi} - \omega \eta) \cos(\chi - \psi) - (\dot{\eta} + \omega \xi) \sin(\chi - \psi) . \end{aligned}$$

Beachten wir nun die Gleichungen (16), in denen $\sigma = 0$ ist, und die Werte

$$p = \varrho \sin\theta \cos(\chi - \psi), \quad v_\theta = -\omega \varrho \cos\theta \sin(\chi - \psi),$$
$$v_\psi = \omega \varrho \cos(\chi - \psi), \quad \beta = \omega \varrho / c,$$

so bekommen wir

$$\begin{aligned} l\omega P \frac{v_\theta}{c} - V_{1\theta} = {} & \beta \sin\theta \cos\theta\, l\omega \{A \sin^2(\chi - \psi) \\ & + B \sin(\chi - \psi)\cos(\chi - \psi)\} \\ & - \beta \cos^2\theta\, l\omega\, C \sin(\chi - \psi) - \cos\theta \{(qA + \omega B_1)\sin(\chi - \psi) \\ & + (qB - \omega A_1)\cos(\chi - \psi)\} - qC\sin\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l\omega P \frac{v_\psi}{c} - V_{1\psi} = {} & -\beta \sin\theta\, l\omega \{A \sin(\chi - \psi)\cos(\chi - \psi) \\ & + B\cos^2(\chi - \psi)\} \\ & + \beta\cos\theta\, l\omega\, C\cos(\chi - \psi) + (qA + \omega B_1)\cos(\chi - \psi) \\ & - (qB - \omega A_1)\sin(\chi - \psi), \end{aligned}$$

während wir die Werte von

$$l\omega P_1 \frac{v_\theta}{c} + V_\theta \quad \text{und} \quad l\omega P_1 \frac{v_\psi}{c} + V_\psi$$

aus den angegebenen dadurch erhalten, daß wir A, B, C, A_1, B_1 der Reihe nach durch $A_1, B_1, C_1, -A, -B$ ersetzen.

Wir setzen nun in den Integralen (22) wie früher $\chi + \psi - \pi/2$ statt χ, also auch $\sin\chi$, $-\cos\chi$ statt $\cos(\chi - \psi)$, $\sin(\chi - \psi)$; dadurch bekommen wir auch

$$\delta A_m = c\cos m\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) + s\sin m\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\delta B_m = c\cos m\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) - s\sin m\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\delta A_m)^2 + (\delta B_m)^2 = c^2 + s^2,$$

wo wir für den Moment

$$\begin{aligned} c = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big[& \left(l\omega P \frac{v_\theta}{c} - V_{1\theta}\right)\sin(m\chi - l\beta\sin\theta\sin\chi) \\ & + \left(l\omega P_1 \frac{v_\theta}{c} + V_\theta\right)\cos(m\chi - l\beta\sin\theta\sin\chi)\Big]\, d\chi, \end{aligned}$$

$$s = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Big[\Big(l\,\omega P\frac{v_\theta}{c} - V_{1\theta}\Big)\cos(m\chi - l\beta\sin\theta\sin\chi)$$
$$- \Big(l\,\omega P_1\frac{v_\theta}{c} + V_\theta\Big)\sin(m\chi - l\beta\sin\theta\sin\chi)\Big]\,d\chi$$

gesetzt haben; ähnliche Ausdrücke gelten auch für δC_m und δD_m, nur daß überall v_ψ, V_ψ, $V_{1\psi}$ anstatt von v_θ, V_θ, $V_{1\theta}$ stehen.

Beachten wir nun, daß wegen der Grenzen von χ alle ungeraden Funktionen von χ herausfallen, und ferner daß vermöge der Definitionsgleichung der Besselschen Funktion

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos(m\chi - z\sin\chi)\,d\chi = J_m(z),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos(m\chi - z\sin\chi)\cos\chi\,d\chi = \frac{m}{z}J_m(z),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sin(m\chi - z\sin\chi)\sin\chi\,d\chi = J_m'(z),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos(m\chi - z\sin\chi)\cos^2\chi\,d\chi = -\tfrac{1}{2}J_m'(z) + \frac{m^2}{z^2}J_m(z),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sin(m\chi - z\sin\chi)\sin^2\chi\,d\chi = \tfrac{1}{2}J_m'(z) + \Big(1 - \frac{m^2}{z^2}\Big)J_m(z),$$

so bekommen wir, mit $z = l\beta\sin\theta$, $l = m + q/\omega$

$$c = \omega\Big\{A_1\cot\theta\,\frac{m}{\beta}J_m(l\beta\sin\theta) - B\cos\theta\,l\,J_m'(l\beta\sin\theta)$$
$$+ C_1\Big(\frac{m}{\sin\theta} - l\sin\theta\Big)J_m(l\beta\sin\theta)\Big\},$$
$$s = \omega\Big\{A\cot\theta\,\frac{m}{\beta}J_m(l\beta\sin\theta) + B_1\cos\theta\,l\,J_m'(l\beta\sin\theta)$$
$$+ C\Big(\frac{m}{\sin\theta} - l\sin\theta\Big)J_m(l\beta\sin\theta)\Big\}.$$

Setzen wir die daraus folgenden Ausdrücke für δA_m und δB_m in (23) ein und beachten, daß $\beta = \omega\varrho/c$, so bekommen wir

$$(25)\begin{cases} \mathfrak{d}_\theta = h_\psi = \dfrac{n\,e\cot\theta}{r\,\varrho^2}\displaystyle\sum_{s=-\infty}^{s=\infty} m\,l\,\beta\,J_m(l\,\beta\sin\theta)(A\cos\Theta + A_1\sin\Theta) \\ \qquad + \dfrac{n\,e\cos\theta}{r\,\varrho^2}\displaystyle\sum_{s=-\infty}^{s=\infty} l^2\beta^2 J_m'(l\,\beta\sin\theta)(-B\sin\Theta + B_1\cos\Theta) \\ \qquad + \dfrac{n\,e}{r\,\varrho^2}\displaystyle\sum_{s=-\infty}^{s=\infty}\left(\dfrac{m\,\beta}{\sin\theta} - l\,\beta\sin\theta\right) l\,\beta\,J_m(l\,\beta\sin\theta) \\ \qquad\qquad (C\cos\Theta + C_1\sin\Theta), \end{cases}$$

wo

$$\Theta = (q + m\,\omega)(t - r/c) - m\,\psi + m\,\frac{\pi}{2}\,.$$

Ebenso ist

$$(26)\begin{cases} \mathfrak{d}_\psi = -\,h_\theta = \dfrac{n\,e}{r\,\varrho^2}\displaystyle\sum_{s=-\infty}^{s=\infty} l^2\beta^2 J_m'(l\,\beta\sin\theta)(A\sin\Theta - A_1\cos\Theta) \\ \qquad + \dfrac{n\,e}{r\,\varrho^2}\displaystyle\sum_{s=-\infty}^{s=\infty}\left(\dfrac{m}{\sin\theta} - l\,\beta^2\sin\theta\right) l\,\beta\,J_m(l\,\beta\sin\theta) \\ \qquad\qquad (B\cos\Theta + B_1\sin\Theta) \\ \qquad + \dfrac{n\,e\,\beta\cos\theta}{r\,\varrho^2}\displaystyle\sum_{s=-\infty}^{s=\infty} l^2\beta^2 J_m'(l\,\beta\sin\theta)(C\sin\Theta - C_1\cos\Theta)\,. \end{cases}$$

Die Formeln (25) und (26) stimmen mit den früher gegebenen bis auf eine etwas verschiedene Bezeichnung überein (l. c., p. 197 — übrigens ist daselbst im Faktor von B im Ausdrucke für Π fälschlich $m\,\beta/\sin\theta - l\,\beta^2\sin\theta$ statt $m/\sin\theta - l\,\beta^2\sin\theta$ angegeben).

Für die Strahlung bekommen wir aus (24) bis (26)

$$(27)\begin{cases} S = \dfrac{c\,e^2 n^2}{2\,\varrho^4}\displaystyle\sum_{s=-\infty}^{s=\infty} l^2\beta^2\int_0^{\pi/2}\Big\{(A^2 + A_1^2)\left[m^2\cot^2\theta\,\{J_m(l\,\beta\sin\theta)\}^2 \right. \\ \qquad\qquad \left. + \, l^2\beta^2\{J_m'(l\,\beta\sin\theta)\}^2\right] \\ \quad + (B^2 + B_1^2)\left[\left(\dfrac{m}{\sin\theta} - l\,\beta^2\sin\theta\right)^2\{J_m(l\,\beta\sin\theta)\}^2 \right. \\ \qquad\qquad \left. + \, l^2\beta^2\cos^2\theta\,\{J_m'(l\,\beta\sin\theta)\}^2\right] \\ \quad + (C^2 + C_1^2)\left[\left(\dfrac{m\,\beta}{\sin\theta} - l\,\beta\sin\theta\right)^2\{J_m(l\,\beta\sin\theta)\}^2 \right. \\ \qquad\qquad + \, l^2\beta^4\cos^2\theta\,\{J_m'(l\,\beta\sin\theta)\}^2 \\ \quad + 2\,(A\,B_1 - A_1\,B)\left(\dfrac{m\cos^2\theta}{\sin\theta} + \dfrac{m}{\sin\theta} - l\,\beta^2\sin\theta\right) l\,\beta \\ \qquad\qquad \left. J_m(l\,\beta\sin\theta)\,J_m'(l\,\beta\sin\theta)\right]\sin\theta\,d\theta\Big\}\,. \end{cases}$$

Die Faktoren der Glieder $A\,C + A_1\,C_1$ und $B\,C + B_1\,C_1$ enthalten unter dem Integrale $\int\limits_0^\pi d\,\theta$ eine Funktion von $\sin\theta$ allein, multipliziert mit $\cos\theta$, und verschwinden daher identisch; es strahlen daher die Störungen in und senkrecht zur Bahnebene ganz unabhängig voneinander aus.

§ 15. Die Auswertung des Integrals (27) vollzieht sich genau wie im § 8; dazu brauchen wir folgende Gleichungen:

$$\text{(a)} \qquad \{J_m(l\,\beta\sin\theta)\}^2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi J_0(2\,l\,\beta\sin\theta\sin\varphi)\cos 2\,m\,\varphi\,d\,\varphi\,,$$

$$\text{(b)} \quad \left\{ \begin{aligned} \{J_m'(l\,\beta\sin\theta)\}^2 &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi J_0(2\,l\,\beta\sin\theta\sin\varphi) \\ &\qquad \left(1 - \frac{m^2}{l^2\,\beta^2\sin^2\theta} - 2\sin^2\varphi\right)\cos 2\,m\,\varphi\,d\,\varphi\,, \end{aligned} \right.$$

$$\text{(c)} \qquad J_m(l\,\beta\sin\theta)\,J_m'(l\,\beta\sin\theta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi J_0'(2\,l\,\beta\sin\theta\sin\varphi) \sin\varphi\cos 2\,m\,\varphi\,d\,\varphi\,,$$

$$\text{(d)} \quad \left\{ \begin{aligned} \int\limits_0^{\pi/2} J_0(2\,l\,\beta\sin\theta\sin\varphi)\sin\theta\,d\,\theta &= \frac{\sin(2\,l\,\beta\sin\varphi)}{2\,l\,\beta\sin\varphi} \\ &= \frac{1}{\beta}\int\limits_0^\beta \cos(2\,l\,x\sin\varphi)\,d\,x\,, \end{aligned} \right.$$

$$\text{(e)} \quad \left\{ \begin{aligned} \int\limits_0^{\pi/2} J_0(2\,l\beta\sin\theta\sin\varphi)\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta &= \frac{\sin(2\,l\beta\sin\varphi)}{(2\,l\,\beta\sin\varphi)^3} - \frac{\cos(2\,l\beta\sin\varphi)}{(2\,l\,\beta\sin\varphi)^2} \\ &= \frac{1}{2\,\beta^3}\int\limits_0^\beta \cos(2\,l\,x\sin\varphi)(\beta^2 - x^2)\,d\,x\,. \end{aligned} \right.$$

$$\text{(f)} \quad \left\{ \begin{aligned} \int\limits_0^{\pi/2} J_0'(2\,l\,\beta\sin\theta\sin\varphi)\,d\,\theta &= \frac{\cos(2\,l\,\beta\sin\varphi)}{2\,l\,\beta\sin\varphi} - \frac{1}{2\,l\,\beta\sin\varphi} \\ &= -\frac{1}{\beta}\int\limits_0^\beta \sin(2\,l\,x\sin\varphi)\,d\,x\,, \end{aligned} \right.$$

$$\text{(g)}\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{\pi/2} J_0'(2\,l\,\beta\sin\theta\sin\varphi)\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2\,l\,\beta\sin\varphi} - \frac{\sin(2\,l\,\beta\sin\varphi)}{(2\,l\,\beta\sin\varphi)^2} \\ &\qquad = -\frac{1}{\beta^2}\int_0^{\beta}\sin(2\,l\,x\sin\varphi)(\beta - x)\,d\,x\,. \end{aligned}\right.$$

Weiter haben wir

$$\text{(h)}\quad \frac{1}{\pi\,\beta}\int_0^{\pi}\int_0^{\beta}\cos(2\,l\,x\sin\varphi)\cos 2\,m\,\varphi\,d\,x\,d\,\varphi = \frac{1}{\beta}\int_0^{\beta} J_{2\,m}(2\,l\,x)\,d\,x$$

und wegen der Differentialgleichung der Besselschen Funktion

$$\text{(i)}\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi\beta^3}\int_0^{\pi}\int_0^{\beta}\cos(2\,l\,x\sin\varphi)\cos 2\,m\,\varphi\,.\,x^2\,d\,x\,d\,\varphi = \frac{1}{2\,\beta^3}\int_0^{\beta} J_{2\,m}(2\,l\,x)\,x^2\,d\,x \\ &\qquad = -\frac{1}{4\,l\,\beta}J_{2\,m}'(2\,l\,\beta) + \frac{1}{8\,l^2\,\beta^2}J_{2\,m}(2\,l\,\beta) \\ &\qquad\qquad + \frac{4\,m^2 - 1}{8\,l^2\,\beta^3}\int_0^{\beta} J_{2\,m}(2\,l\,x)\,d\,x\,. \end{aligned}\right.$$

$$\text{(k)}\quad -\frac{1}{\pi\,\beta}\int_0^{\pi}\int_0^{\beta}\sin(2\,l\,x\sin\varphi)\sin\varphi\cos 2\,m\,\varphi\,d\,x\,d\,\varphi = \frac{1}{2\,l\,\beta}J_{2\,m}(2\,l\,\beta),$$

$$\text{(l)}\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\pi\,\beta^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\beta}\sin(2\,l\,x\sin\varphi)\sin\varphi\cos 2\,m\,\varphi\,.\,x\,d\,x\,d\,\varphi \\ &\qquad = -\frac{1}{2\,l\,\beta}J_{2\,m}(2\,l\,\beta) + \frac{1}{2\,l\,\beta^2}\int_0^{\beta} J_{2\,m}(2\,l\,x)\,d\,x\,. \end{aligned}\right.$$

Wir bekommen erstens mittels (a), (b), (d) und (h)

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi/2}\left[m^2\cot^2\theta\,\{J_m(l\,\beta\sin\theta)\}^2 + l^2\,\beta^2\,\{J_m'(l\,\beta\sin\theta)\}^2\right]\sin\theta\,d\,\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/2} J_0(2\,l\,\beta\sin\theta\sin\varphi)\,\{l^2\,\beta^2 - m^2 - 2\,l^2\,\beta^2\sin^2\varphi\} \\ &\qquad\qquad \cos 2\,m\,\varphi\sin\theta\,d\,\theta\,d\,\varphi \\ &= l\,\beta\,J_{2\,m}'(2\,l\,\beta) - \frac{m^2 - l^2\,\beta^2}{\beta}\int_0^{\beta} J_{2\,m}(2\,l\,x)\,d\,x\,. \end{aligned}$$

Zweitens mittels (a), (b), (d), (e), (h) und (i)

$$\int_0^{\pi/2}\left[\left(\frac{m}{\sin\theta}-l\beta^2\sin\theta\right)^2\{J_m(l\beta\sin\theta)\}^2 + l^2\beta^2\cos^2\theta\{J_m'(l\beta\sin\theta)\}^2\right]\sin\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi} J_0(2l\beta\sin\theta\sin\varphi)\{(m-l\beta^2)^2 + l^2\beta^2\cos^2\theta(1-\beta^2-2\sin^2\varphi)\}\cos 2m\varphi\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$=\frac{1-\beta^2}{4}l\beta J_{2m}'(2l\beta)+\frac{3+\beta^2}{8}J_{2m}(2l\beta) + \left\{\frac{1+\beta^2}{2}(m^2+l^2\beta^2)-2ml\beta^2-\frac{3+\beta^2}{8}\right\}\frac{1}{\beta}\int_0^{\beta}J_{2m}(2lx)\,dx.$$

Drittens mittels (c), (f), (g), (k) und (l)

$$l\beta\int_0^{\pi/2}\left[\frac{m\cos^2\theta}{\sin\theta}+\frac{m}{\sin\theta}-l\beta^2\sin\theta\right]J_m(l\beta\sin\theta)J_m'(l\beta\sin\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$=\frac{l\beta}{\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi}J_0'(2l\beta\sin\theta\sin\varphi)\{m-l\beta^2+(m+l\beta^2)\cos^2\theta\}\sin\varphi\cos 2m\varphi\,d\varphi\,d\theta$$

$$=\frac{m-l\beta^2}{2}J_{2m}(2l\beta)+\frac{m+l\beta^2}{2\beta}\int_0^{\beta}J_{2m}(2lx)\,dx.$$

Schließlich mittels (a), (b), (d), (e), (h) und (i)

$$\int_0^{\pi/2}\left[\left(\frac{m\beta}{\sin\theta}-l\beta\sin\theta\right)^2\{J_m(l\beta\sin\theta)\}^2 + l^2\beta^4\cos^2\theta\{J_m'(l\beta\sin\theta)\}^2\right]\sin\theta\,d\theta$$

$$=\frac{\beta^2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi}J_0(2l\beta\sin\theta\sin\varphi)\{(m-l)^2 + l^2\cos^2\theta.(\beta^2-1-2\beta^2\sin^2\varphi)\}\cos 2m\varphi\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$=-\frac{1-\beta^2}{4}l\beta J_{2m}'(2l\beta)+\frac{1+3\beta^2}{8}J_{2m}(2l\beta) + \left\{\frac{1+\beta^2}{2}(m^2+l^2\beta^2)-2ml\beta^2-\frac{1+3\beta^2}{8}\right\}\frac{1}{\beta}\int_0^{\beta}J_{2m}(2lx)\,dx.$$

Alles zusammengenommen bekommen wir also aus (27)

$$
(28)\left\{\begin{aligned}
S = \frac{c\,e^2 n^2}{2\,\varrho^4}\Big\{&(A^2+A_1^2)\sum_{s=-\infty}^{s=\infty} l\beta\Big[l^2\beta^2 J'_{2m}(2\,l\beta)-(m^2-l^2\beta^2)\,l\int_0^\beta J_{2m}(2\,l\,x)\,dx\Big]\\
&+(B^2+B_1^2)\sum_{s=-\infty}^{s=\infty} l\beta\Big[\frac{1-\beta^2}{4}\,l^2\beta^2 J'_{2m}(2\,l\beta)+\frac{3+\beta^2}{8}\,l\beta J_{2m}(2\,l\beta)\\
&\qquad+\Big\{\frac{1+\beta^2}{2}(m^2+l^2\beta^2)-2\,m\,l\,\beta^2-\frac{3+\beta^2}{8}\Big\}\,l\int_0^\beta J_{2m}(2\,l\,x)\,dx\Big]\\
&+2(A B_1 - A_1 B)\sum_{s=-\infty}^{s=\infty} l\beta\Big[\frac{m-l\beta^2}{2}\,l\beta J_{2m}(2\,l\beta)+\frac{m+l\beta^2}{2}\,l\int_0^\beta J_{2m}(2\,l\,x)\,dx\Big]\\
&+(C^2+C_1^2)\sum_{s=-\infty}^{s=\infty} l\beta\Big[-\frac{1-\beta^2}{4}\,l^2\beta^2 J'_{2m}(2\,l\beta)+\frac{1+3\beta^2}{8}\,l\beta J_{2m}(2\,l\beta)\\
&\qquad+\Big\{\frac{1+\beta^2}{2}(m^2+l^2\beta^2)-2\,m\,l\,\beta^2-\frac{1+3\beta^2}{8}\Big\}\,l\int_0^\beta J_{2m}(2\,l\,x)\,dx\Big]\Big\}\,.
\end{aligned}\right.
$$

in Übereinstimmung mit dem schon früher angegebenen Resultat (l. c. p. 198).

§ 16. *Erklärung der Spektrallinien.* Offenbar entspricht jedem Gliede von (28) je ein Glied von (25) und (26) mit denselben Werten von m und l; die Schwingungsperiode der zu m und l gehörigen Welle ist nach (25) und (26) gleich $2\pi/l\omega$, wobei

$$l = \frac{q}{\omega} + m = \frac{q}{\omega} + k + s\,n.$$

Soll nun diese Welle einer Spektrallinie der Wellenlänge λ entsprechen, so ist $\lambda = 2\pi c/l\omega$, also wegen $\beta = \omega\,\varrho/c$, $l\beta = 2\pi\varrho/\lambda$. Nehmen wir an, daß ϱ von der Dimension des Radius eines Atoms (10^{-8} cm) ist, so ist $l\beta$ sehr klein.

Nun haben wir für kleine Werte von $l\beta$ annähernd

$$J_{2m}(2\,l\beta) = \frac{(l\beta)^{2m}}{2\,m!},$$

woraus folgt:

1. Für einen gegebenen Schwingungstypus, d. h. gegebenes k, ist das Glied $s = 0$ in (28) stark überwiegend, indem die nächsten Glieder, $s = \pm 1$, relativ dazu von den Ordnungen

$$\left(\frac{2\pi\varrho}{\lambda}\right)^{2n}, \quad \left(\frac{2\pi\varrho}{\lambda}\right)^{2n-2k}$$

sind. Dabei ist zu beachten, daß für negative m der absolute Wert genommen werden muß.

2. Vergleichen wir die Hauptglieder ($s = 0$) verschiedener Schwingungstypen miteinander, so sind deren relative Ordnungen

$$\text{für } k = 0 \ \left(\frac{2\pi\varrho}{\lambda}\right)^2, \quad \text{für } k > 0 \ \left(\frac{2\pi\varrho}{\lambda}\right)^{2k}.$$

Ich habe nun an anderen Orten gezeigt, daß die von E. Wiedemann und auch von W. Wien gemessenen Intensitäten gewisser starker Spektrallinien der Größenordnung nach mit der berechneten Intensität für $k = 0$, $k = \pm 1$ übereinstimmen, wenn wir $\varrho = 10^{-8}$ setzen, also $2\pi\varrho/\lambda$ von der Ordnung $^1/_{1000}$ annehmen. Daraus folgt, daß die den Werten $k = \pm 2$, $\pm 3, \ldots$ entsprechenden Schwingungstypen unmöglich beobachtbare Linien ergeben, sollen nicht die Amplituden jedes mit dem Zusammenhang des Elektronensystems verträgliche Maß übersteigen. Durch die Störungen einer Elektronengruppe können wir daher höchstens einen kleinen Teil eines Spektrums erklären; außerdem ist es aber sehr fraglich, ob überhaupt Linien desselben im beobachtbaren Teile des Spektrums liegen können.

Was nun die Erklärung einer einzigen Spektrumserie anbetrifft, so liegen die Verhältnisse nicht besser; denn die qualitative sowie quantitative Gleichheit des Zeemaneffektes entsprechender Komponenten der Linien derselben Serie verbietet uns anzunehmen, daß die verschiedenen Werten von k entsprechenden Schwingungstypen, und noch weniger die Schwingungen verschiedener Elektrongruppen, zusammengenommen eine Serie erzeugen können; denn die entsprechenden Schwingungsgleichungen sind ganz und gar voneinander verschieden, und ergeben auch keine solch einfache Beziehung zwischen den Schwingungszahlen, wie von der Beobachtung gefordert wird.

Daraus müssen wir schließen, daß Spektrumserien überhaupt nicht aus der Hauptbewegung einer einfach periodischen Gruppe, oder deren Störungen erklärt werden können.

§ 17. *Spektrumserien.* Dem obigen zufolge machen wir folgende Annahme:

Eine Spektrumserie kann überhaupt nur mittels derselben Bewegung einer einzigen Elektronengruppe erklärt werden.

Denn sonst bleibt der beobachtete Zeemaneffekt unerklärbar. Daraus folgt:

Diese Bewegung ist mindestens zweifach periodisch, mit inkommensurabeln Perioden, und Amplituden gleicher Größenordnung.

Sonst müßte sie unter den oben betrachteten Fällen zu finden sein.

Die entsprechenden Potentiale sind durch (5) gegeben, woraus für die Feldintensitäten folgt

$$(29)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{d} &= \frac{e}{2\pi c^2 r} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin v(t - r/c + p/c - \tau)(\mathfrak{v} - c\,\mathfrak{r}_1)\, v\, d\tau\, dv, \\ \mathfrak{h} &= \frac{e}{2\pi c^2 r} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin v(t - r/c + p/c - \tau)[\mathfrak{r}_1 \,.\, \mathfrak{v}]\,.\, v\, d\tau\, dv. \end{aligned} \right.$$

Da nun p und $\mathfrak{v}$ mindestens zwei inkommensurabele Perioden besitzen, so zerfallen im allgemeinen $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{h}$ nicht in Summen harmonischer Komponenten; wir müssen die Verhältnisse so wählen, daß sie in Summen von Komponenten zerfallen, deren Schwingungszahlen etwa durch die Rydbergsche Formel bestimmt werden, und deren Amplituden dem langsamen Abfalle der Intensitäten der Serienlinien entsprechen. Es sei also, z. B. für eine Hauptserie,

$$(30)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{d}_\theta = \mathfrak{h}_\psi = \sum_{m=1}^{m=\infty} C_m \cos \left\{A - \frac{N}{(m+\mu)^2}\right\}\left(t - \frac{r}{c}\right) & \\ + D_m \sin \left\{A - \frac{N}{(m+\mu)^2}\right\}\left(t - \frac{r}{c}\right) & \\ = \cos A\left(t - \frac{r}{c}\right) \sum_{m=1}^{m=\infty} \Bigg[C_m \cos \frac{N(t - r/c)}{(m+\mu)^2} & \\ - D_m \sin \frac{N(t - r/c)}{(m+\mu)^2}\Bigg] & \\ + \sin A\left(t - \frac{r}{c}\right) \sum_{m=1}^{m=\infty} \Bigg[C_m \sin \frac{N(t - r/c)}{(m+\mu)^2} & \\ + D_m \cos \frac{N(t - r/c)}{(m+\mu)^2}\Bigg]. & \end{aligned} \right.$$

Dann müssen die Reihen als Summen Integrale der Form (29) ergeben. Da aber die Intensitäten der verschiedenen Glieder experimentell nicht genügend bekannt sind, so wissen wir über die Amplituden C_m und D_m weiter nichts, als daß sie mit wachsendem m abnehmen, aber verhältnismäßig langsam; dagegen sind die Größen N und μ sehr genau bekannt. Es kommt also darauf an, eine langsam konvergierende Reihe der Form (30) allgemein zu summieren. Ist dieses geschehen, so muß man durch Vergleich mit (29) die Funktionen p und $\mathfrak{v}$ bestimmen, womit die Bewegung des Elektronensystems vollständig mitbestimmt wird. Obgleich die bis jetzt zu Gebote stehenden analytischen Hilfsmittel zur Summierung der Reihe (30) kaum ausreichen dürften, so ist hiermit doch das physikalische Problem der Erklärung der Spektrumserien mittels der Bewegung eines Elektronensystems auf das rein analytische Problem einer Reihensummierung zurückgeführt. Da hierzu keinerlei dynamische Begriffe nötig sind, folgern wir, daß die Verknüpfung der Linien einer Serie eine rein kinematische, allein durch die Form des Integrals (29) bedingte ist.

Bonn, Physik. Institut d. Universität, 4. November 1907.

(Eingegangen 6. November 1907.)