Die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen in drei Variabeln.

Von

E. v. WEBER in München.

In der vorliegenden Arbeit soll versucht werden, die Charakteristikentheorie der partiellen Differentialgleichungen in zusammenhängender Darstellung zu entwickeln. Unsere Behandlungsweise dieser Aufgabe ist eine vorzugsweise geometrische, und verfolgt insbesondere den Zweck, für den bekannten Integrationsprocess der partiellen Differentialgleichungen I. O. im allgemeinen Falle Analogien aufzufinden. Ansätze in dieser Richtung finden sich bereits in dem Buche von P. Du-Bois Reymond*), doch ermangeln dieselben gerade im Falle der höhern Gleichungen vielfach der nöthigen Bestimmtheit, und geben insbesondere über die fundamentale Frage, unter welchen Voraussetzungen und durch welchen Process aus einem gegebenen vollständigen Integral einer partiellen Differentialgleichung ein allgemeineres hergeleitet werden kann, nicht den geringsten Aufschluss. Den Ausgangspunkt für unsere Darstellung nehmen wir von den Begriffen „Flächenelement“, „Streifen“ u. s. w., welche durch die Arbeiten der Herrn Lie und Bäcklund zur Grundlage der modernen Geometrie der partiellen Differentialgleichungen geworden sind; auch im Uebrigen machen wir vielfach von Lie'schen Bezeichnungsweisen und Begriffsbildungen Gebrauch.

In § 1 besprechen wir zunächst den geometrischen Inhalt, welcher den Definitionsgleichungen der *Charakteristiken n. und höherer Ordnung***)) der Gleichung n . O. unter Zugrundelegung der erwähnten Begriffe zukommt, in § 2 leisten wir dasselbe für die *Charakteristiken $n - 1$. O.*, deren Theorie sich übrigens z. T. auch in dem Buche des

*) Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen mit drei Variablen, Leipzig 1864.

**)) Diese Gleichungen sind für $n = 2$ bereits in der Arbeit von Darboux Éc. Norm. VII, 1870, p. 163—173 implicite enthalten.

Herrn Darboux*) skizzirt findet; § 3 enthält einen geometrischen Excurs, welcher bezweckt, für den Lie'schen Begriff des „Elementarkegels“, den eine partielle Differentialgleichung 1. O. einem beliebigen Raumpunkt zuordnet, in den höhern Fällen Ersatz zu schaffen. Die Theorie der *Differentio-Differentialausdrücke***), welche in § 4 entwickelt wird und als Grundlage aller folgenden Untersuchungen anzusehen ist, liefert uns eine neue, sehr einfache Definition der Charakteristiken *n. O.* und führt uns in § 5 auf den Begriff des *unbeschränkt integrablen Streifensystems*, für welchen in diesem und dem folgenden § 6 Beispiele ausgeführt werden***). In § 6 tritt die Analogie, welche zwischen unsern Betrachtungen und der gewöhnlichen Integrationstheorie der Gleichungen 1. O. besteht, besonders deutlich zu Tage. Der weiteren Durchführung dieser Analogie ist der letzte Paragraph unserer Arbeit gewidmet, in welchem wir die Frage nach der Herstellung eines allgemeineren Integrals aus einem gegebenen vollständigen erörtern, und im Anschluss daran die im Falle $n = 1$ wohlbekannte Theorie der „Integralcurven“†) auf die höheren Fälle übertragen.

§ 1.

Die Charakteristiken n^{ter} und höherer Ordnung der partiellen Differentialgleichung n^{ter} 0.

1. Wir setzen

$$\alpha_i^{(k)} = \frac{\partial^k z}{\partial x^{k-i} \partial y^i},$$

doch wollen wir für $\alpha_0^{(0)} \dots \alpha_3^{(3)}$ auch die Bezeichnungen $z, p, q, r, s, t, u, v, w, \varpi$ bereithalten. Ein Werthsystem $xyzpq \dots \alpha_n^{(n)}$ heisst dann ein *Flächenelement n. O.*, und soll abkürzend mit $E^{(n)}(x \dots \alpha_n^{(n)})$ bezeichnet werden. Eine continuirliche Schaar von Elementen *n. O.* von der Eigenschaft, dass je zwei aufeinanderfolgende $E^{(n)}$ *vereinigt liegen*, d. h. den Relationen

$$(1) \quad \delta \alpha_i^{(k)} = \alpha_i^{(k+1)} \delta x + \alpha_{i+1}^{(k+1)} \delta y$$

$$(i = 0, 1, \dots, k; k = 0, 1, \dots, n-1)$$

*) Théorie des Surfaces; III, p. 263 ff.

**) Ich entnehme diese Bezeichnung dem Titel einer mir leider nicht zugänglichen Arbeit von Schaposchnikow, Mosk.-Naturf. Ges. Phys. Abt. IV (Fortschr. d. Math. 1891, p. 398f.).

***) Vgl. meine Note in den Sitzungsberichten der kgl. bay. Akad. d. Wiss. Februar 1895.

†) Lie, „Ueber Complexe etc.“ (Math. Ann. Bd. 5, p. 145–256, 1871), vgl. auch Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles. Paris 1891, Chap. IX.

genügen, heisst ein *Streifen* n . O. oder $S^{(n)}$; eine continuirliche Schaar von ∞^2 Elementen E^n , welche den Differentialgleichungen (1) genügt, heisse eine Element- $M_2^{(n)}$; eine solche besteht entweder aus allen $E^{(n)}$ einer Fläche, oder aus allen $E^{(n)}$, die sich an einen Streifen $S^{(n-1)}$ anschliessen, oder endlich aus ∞^2 Elementen $E^{(n)}$ mit gemeinsamem $E^{(n-1)}$. Eine partielle Differentialgleichung:

$$(2) \quad F^{(n)}(xyzp \dots \alpha_n^{(n)}) = \text{Const.}$$

integriren heisst dann, alle Elemente- $M_2^{(n)}$ bestimmen, welche (2) befriedigen.

2. Unter Gebrauch der Abkürzungen:

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial F^{(n)}}{\partial x} &= X \dots \frac{\partial F^{(n)}}{\partial \alpha_i^{(k)}} = A_i^{(k)}, \\ \left\{ \begin{aligned} D_x^{(v)}(f) &\equiv \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{k=0}^v \sum_{i=0}^k \alpha_i^{(k+1)} \frac{\partial f}{\partial \alpha_i^{(k)}}, \\ D_y^{(v)}(f) &\equiv \frac{\partial f}{\partial y} + \sum_{k=0}^v \sum_{i=0}^k \alpha_{i+1}^{(k+1)} \frac{\partial f}{\partial \alpha_i^{(k)}} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

differentiiren wir jetzt (2) $\varrho + 1$ mal partiell nach x und y in der Voraussetzung, dass die $\alpha_i^{(k)}$ Functionen von x und y seien. Definirt man die Grössen $L_\nu^{(k)}$ durch die Recursionsformeln:

$$\begin{aligned} L_0^{(k+1)} &\equiv D_x^{(n+k-1)}(L_0^{(k)}) + \sum_{i=0}^n \alpha_i^{(n+k)} D_x^{(n)}(A_i^{(n)}), \\ L_\nu^{(k+1)} &\equiv D_x^{(n+k-1)}(L_\nu^{(k)}) + \sum_{i=0}^n \alpha_{i+\nu}^{(n+k)} D_x^{(n)}(A_i^{(n)}), \\ &\equiv D_y^{(n+k-1)}(L_{\nu-1}^{(k)}) + \sum_{i=0}^n \alpha_{i+\nu-1}^{(n+k)} D_y^{(n)}(A_i^{(n)}), \quad (\nu=1, 2, \dots, k) \\ L_{k+1}^{(k+1)} &\equiv D_y^{(n+k-1)}(L_k^{(k)}) + \sum_{i=0}^n \alpha_{i+k}^{(n+k)} D_y^{(n)}(A_i^{(n)}), \quad (k \geq 1) \\ (4) \quad L_0^{(1)} &\equiv D_x^{(n-1)}(F^{(n)}), \quad L_1^{(1)} \equiv D_y^{(n-1)}(F^{(n)}), \end{aligned}$$

so erhält man die $\varrho + 2$ Gleichungen

$$L_\sigma^{(\varrho+1)} + \sum_{i=0}^n A_i^{(n)} \alpha_{i+\sigma}^{(n+\varrho+1)} = 0,$$

die wir abkürzend so schreiben wollen:

$$(5) \quad H_\sigma^{(\varrho+1)} = 0. \quad (\sigma = 0, 1, \dots, \varrho + 1)$$

Wir sagen, ein Element $x \dots \alpha_{n+k}^{(n+k)}$ befriedige (2), wenn die Grössen $x \dots \alpha_{n+k}^{(n+k)}$ den Relationen (2) und (5) für $\varrho = 0, 1, \dots k-1$ genügen, und man könnte das Integrationsproblem von (2) allgemeiner so fassen: Alle Element- $M_2^{(n+k)}$ zu bestimmen, welche den Gleichungen (2), (5) für $\varrho = 0, \dots k-1$ genügen.

3. Man habe zwei vereinigt liegende Elemente $n + \tau^{\text{ter}} 0$: $x \dots \alpha_{n+\tau}^{(n+\tau)}$ und $x + dx, \dots \alpha_{n+\tau}^{(n+\tau)} + d\alpha_{n+\tau}^{(n+\tau)}$, so folgt aus den Gleichungen

$$(6) \quad d\alpha_i^{(n+\varrho)} = \alpha_i^{(n+\varrho+1)} dx + \alpha_{i+1}^{(n+\varrho+1)} dy \quad (i=0, \dots n+\varrho)$$

indem man $dy : dx$ gleich Λ setzt:

$$(7) \quad \alpha_i^{(n+\varrho+1)} = \sum_{k=0}^{n+\varrho-i} (-1)^k \frac{d\alpha_{i+k}^{(n+\varrho)}}{dx} \Lambda^k - (-1)^{n+\varrho-i} \alpha_{n+\varrho+1}^{(n+\varrho+1)} \Lambda^{n+\varrho+1-i}$$

$$(i=0, 1 \dots n+\varrho; \varrho=0, 1 \dots \tau).$$

Setzen wir:

$$(8) \quad \varphi(\Lambda) \equiv \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} A_i^{(n)} \Lambda^{n-i},$$

$$B_i = \sum_{k=0}^i (-1)^{k+i} A_k^{(n)} \Lambda^{i-k}; \quad C_{\varrho+1}^{(\varrho)} = 0,$$

$$(9) \quad C_{\sigma}^{(\varrho)} = \sum_{k=0}^{\varrho-\sigma} (-1)^k \Lambda^k \frac{d\alpha_{n+\sigma+k}^{(n+\varrho)}}{dx} \quad (\sigma=0, 1 \dots \varrho)$$

so folgt durch Substitution der Ausdrücke (7) in (5):

$$(10) \quad L_{\sigma}^{(\varrho+1)} + \sum_{i=0}^{n-1} B_i \frac{d\alpha_{i+\sigma}^{(n+\varrho)}}{dx} + (C_{\sigma}^{(\varrho)} - (-1)^{\varrho+\sigma} \alpha_{n+\varrho+1}^{(n+\varrho+1)} \Lambda^{\varrho-\sigma+1}) \varphi(\Lambda) = 0$$

$$(\sigma=0, 1 \dots \varrho+1; \varrho=0, 1 \dots \tau).$$

Wenn wir die linken Seiten dieser Gleichungen mit $G_{\sigma}^{(\varrho+1)}$ bezeichnen, so führt die Elimination von $\alpha_{n+\varrho+1}^{(n+\varrho+1)}$ aus dem System (10) zu den folgenden Beziehungen:

$$(11) \quad G_{\sigma}^{(\varrho+1)} + \Lambda G_{\sigma+1}^{(\varrho+1)} = 0 = \frac{dH_{\sigma}^{(\varrho)}}{dx}, \quad (\sigma=0, 1, \dots \varrho; \varrho=0, \dots \tau)$$

wie aus der Definition der $L_i^{(k)}$, B_i , $C_i^{(\varrho)}$ unmittelbar hervorgeht; bei der Differentiation rechts sind $yz \dots \alpha_{n+\varrho}^{(n+\varrho)}$ als Functionen von x zu behandeln. Diese Relationen, welche auch für $\varrho=0$ gelten, wenn man $H_0^{(0)} \equiv F^{(n)}$ setzt, drücken nach unserer Bezeichnungsweise aus, dass die Elemente $x \dots \alpha_{n+\tau}^{(n+\tau)}$ und $x + dx, \dots \alpha_{n+\tau}^{(n+\tau)} + d\alpha_{n+\tau}^{(n+\tau)}$ beide

der Gleichung (2) genügen sollen. Ist dies der Fall, und ist Λ keine der Wurzeln der Gleichung

$$(12) \quad \varphi(\Lambda) = 0,$$

so kann man aus (10) $\alpha_{n+\tau+1}^{(n+\tau+1)}$ und mittelst (7) die übrigen $\alpha_i^{(n+\tau+1)}$ eindeutig berechnen; zwei vereinigt liegende Elemente $E^{(n+\tau)}$, die beide der Gleichung (2) genügen, bestimmen also im allgemeinen ein und nur ein $E^{(n+\tau+1)}$, das sie beide enthält und ebenfalls (2) befriedigt. Da dies auch noch für $\tau = 0$ gilt, so werden längs eines beliebigen Streifens $S^{(n)}$, der die Relation $\delta F^{(n)} = 0$ befriedigt, im allgemeinen der Reihe nach ein $S^{(n+1)}$, ein $S^{(n+2)}$ etc., kurz die Ableitungen jeder beliebigen Ordnung eindeutig festgelegt sein. Es ist dies nur ein anderer Ausdruck für das bekannte Cauchy'sche Theorem, wonach unter gewissen Continuitätsbedingungen*), die wir hier natürlich als erfüllt ansehen, durch einen Streifen $S^{(n)}$ von (2) im Allgemeinen eine und nur eine Integralfläche von (2) bestimmt ist, die sich in einer gewissen Umgebung von $S^{(n)}$ regulär verhält.

4. Eine Ausnahme tritt ein, wenn der Streifen $S^{(n+\tau)}$, dessen Elemente die Gleichung (2) befriedigen, auch noch der Bedingung

$$(13) \quad \frac{dy}{dx} = \Lambda,$$

genügt, unter Λ eine der Wurzeln von (12) verstanden. In (10) verschwinden dann die Coefficienten von $\alpha_{n+\tau+1}^{(n+\tau+1)}$, und wir nehmen zunächst an, dass auch die von dieser Grösse freien Glieder zu Null werden, d. h. dass man habe:

$$(14) \quad L_{\sigma}^{(\tau+1)} + \sum_{i=0}^{n-1} B_{i\tau} \frac{d\alpha_{i+\sigma}^{(n+\tau)}}{dx} = 0 \quad (\sigma = 0, 1 \dots \tau + 1)$$

wo

$$B_{i\tau} \equiv \sum_{k=0}^i (-1)^{i+k} A_k^{(n)} \Lambda_{\tau}^{i-k}$$

gesetzt ist.

Alle ∞^1 Elemente $n + \tau + 1^{\text{ter}} O.$, welche zwei benachbarte $E^{(n+\tau)}$ von $S^{(n+\tau)}$ enthalten, d. h. den Gleichungen (6) für $\varrho = \tau$ genügen, befriedigen dann auch (2). Einen solchen Streifen nennen wir eine *Charakteristik* $n + \tau^{\text{ter}} O.$ oder eine $C^{(n+\tau)}$ von (2). Die Gleichungen (13), (14) zusammen mit den folgenden:

$$(15) \quad \frac{d\alpha_i^{(k)}}{dx} = \alpha_i^{(k+1)} + \alpha_{i+1}^{(k+1)} \Lambda, \quad (i = 0, \dots, k; k = 0, \dots, n + \tau - 1)$$

*) Vergl. z. B. Goursat, l. c. Chap. I, woselbst die näheren Citate zu finden sind.

liefern für $\nu = 1, 2, \dots n$ die Definitionsgleichungen der n im allg. verschiedenen Charakteristikensysteme $n + \tau^{\text{ter}}$ O. der partiellen Differentialgleichung (2); sie lassen $n - 1$ der Ableitungen $d\alpha_i^{(n+\tau)}:dx$ völlig willkürlich. Daneben sind auch noch die Relationen (5) für $\rho = 0, \dots \tau - 1$ zu berücksichtigen. Die ∞^2 Elemente $E^{(n+\tau+1)}$, die sich an eine beliebige $C^{(n+\tau)}$ anschliessen, bilden nach der am Schluss von Nr. 2 gebrauchten Ausdrucksweise eine Integral- $M_2^{(n+\tau+1)}$ von (2).

5. Die Gleichungen (14) sind nach ihrer Herleitung völlig äquivalent mit den folgenden:

$$(14a) \quad \frac{d\alpha_i^{(n+\tau)}}{dx} = \alpha_i^{(n+\tau+1)} + \Lambda_\nu \alpha_{i+1}^{(n+\tau+1)},$$

wenn die $\alpha_i^{(n+\tau+1)}$ die allgemeinsten Functionen von $x \dots \alpha_{n+\tau}^{(n+\tau)}$ bedeuten, welche die Bedingungen

$$(14b) \quad H_\sigma^{(\tau+1)} = 0 \quad (\sigma = 0, 1 \dots \tau + 1)$$

erfüllen. Wendet man diese Bemerkung an auf die in (15) enthaltenen Gleichungen:

$$(15a) \quad \frac{d\alpha_i^{(n+\tau-1)}}{dx} = \alpha_i^{(n+\tau)} + \Lambda_\nu \alpha_{i+1}^{(n+\tau)} \quad (i = 0, 1 \dots n + \tau - 1)$$

und bezeichnen wir allgemein die ∞^1 Elemente $E^{(\nu-1)}$, welche zu einem Streifen $S^{(\nu)}$ gehören, als den „Trägerstreifen“ $\nu - 1^{\text{ter}}$ O. von $S^{(\nu)}$, so folgt für $\tau \geq 1$:

„Die Trägerstreifen $n + \tau - 1^{\text{ter}}$ O. der Gesamtheit der $C^{(n+\tau)}$ besteht aus der Gesamtheit der Charakteristiken $n + \tau - 1^{\text{ter}}$ O.“

Aus den Entwicklungen der Nr. 3 folgt, dass die Gleichungen

$$(16) \quad H_\sigma^{(\tau)} = 0 \quad (\sigma = 0, 1 \dots \tau)$$

Integralgleichungen von (14) sind; daher können wir die letzteren Gleichungen ersetzen durch eine von ihnen, etwa die letzte, und das System (16). Berechnet man nun aus (15a) die Grössen $\alpha_0^{(n+\tau)} \dots \alpha_{n+\tau-1}^{(n+\tau)}$ und substituirt ihre Werthe in die letzte der Gleichungen (14), so folgt eine Differentialgleichung 1. O. und 1. Grades für $\alpha_{n+\tau}^{(n+\tau)}$, welche ausser der Grösse $\alpha_{n+\tau}^{(n+\tau)}$ und ihrer Ableitung nur die Variablen $x \dots \alpha_{n+\tau-1}^{(n+\tau-1)}$ und die ersten und zweiten Ableitungen der $\alpha_i^{(n+\tau-1)}$ enthält. Der Coefficient von $d\alpha_{n+\tau}^{(n+\tau)}:dx$ in dieser Gleichung wird:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-i-1} B_{i*} \Lambda_\nu^{n-i-1} \equiv -\varphi'(\Lambda_\nu).$$

Denken wir uns also eine $C^{(n+\tau-1)}$ von (2) gegeben, und die $x \dots \alpha_{n+\tau-1}^{(n+\tau-1)}$ dementsprechend als Functionen einer unabhängigen Variablen, etwa x ,

definiert, so ergibt sich unter der Voraussetzung $\varphi'(\Lambda_r) \neq 0$ der Werth von $\alpha_{n+\tau}^{(n+\tau)}$ (und damit auch der übrigen $\alpha_i^{(n+\tau)}$) durch Integration der genannten Differentialgleichung. Also:

„Durch jede $C^{(n)}$, welche einer einfach zählenden Wurzel von (12) entspricht, gehen einfach unendlich viele $C^{(n+1)}$, deren einzelne durch Angabe eines ihrer Elemente $E^{(n+1)}$ eindeutig festgelegt ist; durch jede $C^{(n+1)}$ gehen ebenso einfach unendlich viele $C^{(n+2)}$ u. s. w.“

Dies ist der geometrische Ausdruck der Thatsache, dass die Gesamtheit der Integralfächen von (2), welche durch eine $C^{(n)}$ hindurchgehen, noch von den Coefficienten einer willkürlichen Function eines Arguments abhängt. Obwohl diese Thatsache auch für doppelt zählende Charakteristikensysteme bestehen bleibt, so ist gleichwohl durch die obige Bemerkung ein fundamentaler Unterschied zwischen diesen und den einfach zählenden bezeichnet*). Wir wollen im Folgenden die ersteren von der Betrachtung ausschliessen, also z. B. nur solche Gleichungen 2. O. berücksichtigen, für welche die Discriminante der Gleichung (12) nicht identisch verschwindet.

6. Geht man auf einer beliebigen Integralfäche von (2) vom Punkte xyz in der Richtung Λ_r zum benachbarten Punkte $x + dx \dots$ weiter, so werden die Incremente der $\alpha_i^{(n+\tau)}$ durch (14a) dargestellt, unter $\alpha_i^{(k)}$ die Ableitungen der Integralfäche im Punkte xyz verstanden. Da diese Ableitungen den Relationen (14b) identisch genügen, so erhält man durch Elimination der $\alpha_i^{(n+\tau+1)}$ aus (14a), (14b) die Gleichungen (14). Dieser Schluss ist nur dann ungültig, wenn die Integralfäche die partiellen Differentialgleichungen $A_0^{(n)} = \dots = A_n^{(n)} = 0$, und somit auch $L_0^{(1)} = L_1^{(1)} = 0$ befriedigt, d. h. wenn sie *singulär* ist. Es folgt somit der für jedes $\tau \geq 0$ geltende Satz:

„Jede nicht singuläre Integralfäche von (2) ist aus je ∞^1 Charakteristiken $n + \tau^{\text{ter}}$ O. eines jeden der n verschiedenen Systeme aufgebaut.“

7. Erfüllt ein Streifen $S^{(n+\tau)}$ von (2) die Bedingungen (13), (15), nicht aber (14), so werden die aus (10), (7) für $\varrho = \tau$ zu entnehmenden Werthe der $\alpha_i^{(n+\tau+1)}$ unendlich. Einen solchen Streifen nennen wir einen Integralstreifen $n + \tau^{\text{ter}}$ O. oder einen Integral- $S^{(n+\tau)}$ von (2). Für $\tau \geq 1$ ist der Trägerstreifen eines solchen $S^{(n+\tau)}$ nach Nr. 5 eine $C^{(n+\tau-1)}$, und die Integralfäche, welche nach Nr. 3 im allgemeinen durch einen Streifen $n + \tau^{\text{ter}}$ O. von (2) festgelegt ist, artet hier in die zu jener $C^{(n+\tau-1)}$ gehörige Integral- $M_2^{(n+\tau)}$ aus. Genügt dagegen ein Streifen $S^{(n)}$ von (2) den Relationen (13), (15) für $k=0, \dots, n-1$, so geht durch ihn im allgemeinen eine Integralfäche von (2), welche in ihm eine Rückkehrkante n . O. besitzt, die sich von einer gewöhnlichen

*) Vergl. auch Du-Bois Reymond l. c. §§ 91 und 94.

Rückkehrkante dadurch unterscheidet, dass in ihr erst die $n + 1^{\text{ten}}$ Ableitungen unstetig werden.

Wir führen dies hier nur historisch an, kommen aber in § 7 unter besonderen Voraussetzungen auf diese Frage zurück.

§ 2.

Die Charakteristiken $n - 1^{\text{ter}}$ O.; die Ampère-Natanischen Gleichungen.

8. Eine $C^{(n)}$ der partiellen Differentialgleichung § 1 (2) war durch die Eigenschaft charakterisirt, dass alle ∞^2 Elemente $n + 1^{\text{ter}}$ O., die sich an sie anschliessen, der Gleichung genügen. Wir fragen nun weiter nach Streifen $n - 1^{\text{ter}}$ O. von der Eigenschaft, dass alle Elemente $E^{(n)}$, die sich an sie anschliessen, die vorgelegte Gleichung erfüllen; solche Streifen bezeichnen wir als Charakteristiken $n - 1^{\text{ter}}$ O. oder $C^{(n-1)}$. Setzt man wieder $dy:dx = \Lambda$, so findet man aus den Gleichungen:

$$(1) \quad \frac{d\alpha_i^{(n-1)}}{dx} = \alpha_i^{(n)} + \alpha_{i+1}^{(n)} \Lambda \quad (i=0, 1, \dots, n-1)$$

die folgenden:

$$(2) \quad \alpha_i^{(n)} = \sum_{v=0}^{n-i-1} (-1)^v \frac{d\alpha_{i+v}^{(n-1)}}{dx} \Lambda^v + (-1)^{n-i} \Lambda^{n-i} \alpha_n^{(n)} \\ (i=0, 1, \dots, n-1).$$

Indem wir diese Werthe in § 1 (2) substituiren, dabei aber die Constante der rechten Seite durch Null ersetzen, erhalten wir im allgemeinen eine algebraische Gleichung μ^{ten} Grades in $\alpha_n^{(n)}$, wenn μ den Grad von $F^{(n)}$ in den $\alpha_i^{(n)}$ bedeutet. Die Coefficienten der einzelnen Potenzen von $\alpha_n^{(n)}$ liefern, gleich Null gesetzt, die Definitionsgleichungen der $C^{(n-1)}$. Dieselben brauchen nicht mit einander verträglich zu sein, d. h. nicht jede Gleichung n . O. besitzt Charakteristiken $n - 1^{\text{ter}}$ O.

9. Besonders interessant ist der Fall, wo jene algebraische Gleichung *linear* wird; dazu ist nothwendig und hinreichend, dass (2) § 1 die Form besitzt:

$$(3) \quad F^{(n)} \equiv P + \sum_{i=0}^n P_i \alpha_i^{(n)} + \sum \sum P_{ik} \pi_{ik} = 0$$

worin

$$\pi_{ik} = \alpha_i^{(n)} \alpha_{i+k}^{(n)} - \alpha_{i+1}^{(n)} \alpha_{i+k-1}^{(n)} \\ (i=0, \dots, n-2; k=2, 3, \dots, n-i),$$

und die Coefficienten $P \dots$ irgend welche Functionen von $x, \dots, \alpha_{n-1}^{(n-1)}$

bedeuten. Eine solche Gleichung nennen wir eine *Ampère-Natani'sche Gleichung**), für $n = 2$ speciell eine Ampère'sche Gleichung.

Durch die Substitution (2) nehme (3) die Form an:

$$A + B\alpha_n^{(n)} = 0.$$

Wir erhalten dann für die $C^{(n-1)}$ ausser den Relationen

$$(4) \quad \frac{d\alpha_i^{(k)}}{dx} = \alpha_i^{(k+1)} + \Lambda \alpha_{i+1}^{(k+1)} \quad (i = 0, \dots, k; k = 0, 1, \dots, n-2)$$

noch die Bedingungsgleichungen

$$(5) \quad A = 0, B = 0$$

welche die $x \dots \alpha_{n-1}^{(n-1)}$, sowie $\frac{dy}{dx}$ und die Ableitungen der $\alpha_i^{(n-1)}$ enthalten; $n-1$ dieser Differentialquotienten bleiben also völlig willkürlich. Für jede Gleichung der Form (3) kennt man somit ein particuläres Integral mit $n-1$ willkürlichen Functionen, bestehend aus allen Element- $M_2^{(n)}$, die sich an die $C^{(n-1)}$ anschliessen.

10. Setzen wir

$$(6) \quad \lambda_n = 0, \lambda_i = \sum_{v=0}^{n-i-1} (-1)^v \frac{d\alpha_{i+v}^{(n-1)}}{dx} \Lambda^v \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

und deuten durch eckige Klammern an, dass in dem betr. Ausdruck $\alpha_i^{(n)}$ durch λ_i ersetzt ist, so findet man

$$A \equiv [F^{(n)}], B = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \Lambda^{n-i} [A_i^{(n)}] = [\varphi(\Lambda)]$$

(vgl. (12), § 1). Wir denken uns nun in A, B für die $d\alpha_i^{(n-1)} : dx$ wieder ihre Werthe (1) eingesetzt; da dann λ_i wegen (2) in

$$\alpha_i^{(n)} - (-1)^{n-i} \Lambda^{n-i} \alpha_n^{(n)}$$

übergeht, so erhalten wir mit Rücksicht auf die besondere Form von (3) durch unsere Substitution aus (5) die beiden Gleichungen:

$$(7) \quad F^{(n)} - \alpha_n^{(n)} \varphi(\Lambda) = 0, \quad \varphi(\Lambda) = 0.$$

Dies vorausgeschickt wollen wir nun ermitteln, wie viele $C^{(n)}$ durch eine gegebene $C^{(n-1)}$ hindurchgehen. Sind also $x \dots \alpha_{n-1}^{(n-1)}$ Functionen einer unabhängigen Variablen, etwa x , die den Differentialgleichungen (4), (5) genügen, und legen wir den unbekannten Functionen $\alpha_i^{(n)}$ von x die Bedingungen (1) auf, so folgen daraus nach dem eben Gesagten von selbst die Relationen (3) und § 1 (12), Λ ist also mit einer

*) Ampère, Journ. d. l'Ec. Polytechnique Cah. 17 und 18. Natani, die höhere Analysis, Berlin 1866. Vgl. auch die Arbeiten von Bäcklund Math. Ann. 11 u. 13.

Wurzel Λ , der Fundamentalgleichung $\varphi(\Lambda) = 0$ identisch. Von den beiden noch übrigen Definitionsgleichungen der $C^{(n)}$:

$$(8) \quad L_{\sigma}^{(1)} + \sum_{i=0}^{n-1} B_i \cdot \frac{d\alpha_i^{(n)}}{dx} = 0 \quad (\sigma = 0, 1) \dots$$

ist aber die eine wegen (3) und § 1 (11) eine Folge der andern, und die Substitution der Werthe (2) in die eine von ihnen liefert für $\alpha_n^{(n)}$ eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. O. und 1. Grades, in welcher $d\alpha_n^{(n)}:dx$ nach Nr. 5 mit dem Factor $-\varphi'(\Lambda_n)$ behaftet ist.

Werden umgekehrt unter den $\alpha_i^{(n)}$ die allgemeinsten Functionen von $x \dots \alpha_{n-1}^{(n-1)}$ verstanden, die (3) befriedigen, so stellen die Gleichungen (1), (4) zusammen mit $dy:dx = \Lambda$, die Trägerstreifen $n-1$. O. sämtlicher Charakteristiken und Integralstreifen n . O. von (3) dar (Nr. 7); alle diese $S^{(n-1)}$ sind also unter den $C^{(n-1)}$ enthalten. Wir fassen das Resultat dieser Untersuchungen in den folgenden Sätzen zusammen:

„Eine Ampère-Natanische Gleichung n . O. besitzt im allgemeinen n verschiedene Charakteristikensysteme $n-1$. O., bestehend aus den Trägerstreifen der $C^{(n)}$. Durch jeden Trägerstreifen $C^{(n-1)}$ einer $C^{(n)}$, die einer einfachen Wurzel Λ , der Fundamentalgleichung entspricht, gehen noch einfach unendlich viele andere $C^{(n)}$ hindurch, deren jede durch Angabe eines ihrer $E^{(n)}$ eindeutig festgelegt ist. Die Integralstreifen n . O. bestehen aus der Gesamtheit der Streifen n . O., die durch die $C^{(n-1)}$ hindurchgehen; die nach Nr. 7 durch jeden einzelnen von ihnen bestimmte Integralfläche artet in die Element- $M_2^{(n)}$ aus, welche sich an die zugehörige $C^{(n-1)}$ anschliesst.

§ 3.

Geometrische Interpretation der Fundamentalgleichung.

11. Zum Zwecke einer geometrischen Deutung der Gleichung (11) § 1 schicken wir einige Hilfsbetrachtungen voraus.

Ist in einem $n+1$ -dimensionalen Raum R_{n+1} mit den cartesischen Punktcoordinaten $x_1 \dots x_{n+1}$ ein System von ∞^n Curven oder eine „Curvencongruenz“ durch die Gleichungen

$$(1) \quad \varphi_i(x_1 \dots x_{n+1}, a_1, \dots a_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

gegeben, worin die φ_i unabhängige Functionen der x_k , die a_i wesentliche Parameter bedeuten, und setzen wir $\partial\varphi_i:\partial a_k = \varphi_{ik}$, so werden durch die (in Kronecker's Bezeichnungsweise geschriebene) Gleichung:

$$(2) \quad |\varphi_{ik}| = 0$$

auf jeder Curve (1) die Punkte ausgeschnitten, in denen sie von je

einer benachbarten Congruenzcurve geschnitten wird, und in welchen sie das „Focalgebilde“ berührt; dieses ergibt sich durch Elimination der α_i aus (1), (2). In denselben Punkten wird das Focalgebilde auch von allen die Curve enthaltenden, aus ∞^{n-1} Congruenzcurven aufgebauten „Flächen“ berührt.

Ist eine Gerade des R_{n+1} durch die Gleichungen

$$(3) \quad x_i = m_i + n_i x_{n+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

dargestellt, so sind die Grössen m_i , n_i und $\omega_{ik} = m_i n_k - n_i m_k$ die Plücker'schen Linienkoordinaten dieser Geraden; eine Relation zwischen ihnen definiert einen „Strahlencomplex“, n unabhängige Relationen eine „Strahlencongruenz“. Ein Congruenzstrahl von allgemeiner Lage besitzt n Brennpunkte, woselbst er das Focalgebilde berührt. Bezeichnen wir eine q -fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit des R_{n+1} als eine M_q , so liefern uns die Gesamtheit der n -fachen Tangenten einer M_n , oder das System der gemeinsamen Tangenten von n verschiedenen M_n , oder endlich die n -fachen Sekanten einer M_{n-1} Beispiele für Strahlencongruenzen.

12. Wir setzen nun $\mu_k = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ und interpretiren die $x \dots \alpha_{n-1}^{(n-1)}$ als cartesische Coordinaten eines $R_{\mu_{n-1}+2}$. Die Gleichungen:

$$(4) \quad \alpha_i^{(k)} - \bar{\alpha}_i^{(k)} = \bar{\alpha}_i^{(k+1)}(x - \bar{x}) + \bar{\alpha}_{i+1}^{(k+1)}(y - \bar{y})$$

$$(i = 0, 1, \dots, k; k = 0, 1, \dots, n-2)$$

ordnen jedem Punkte $P(\bar{x} \dots \bar{\alpha}_{n-1}^{(n-1)})$ dieses Raums einen durch ihn gehenden linearen R_{n+2} zu; durch das System;

$$(5) \quad \alpha_i^{(n-1)} - \bar{\alpha}_i^{(n-1)} = \alpha_i^{(n)}(x - \bar{x}) + \alpha_{i+1}^{(n)}(y - \bar{y})$$

$$(i = 0, 1 \dots n-1),$$

worin die $\alpha_i^{(n)}$ Constante bezeichnen, ist in diesem Raume eine durch P gehende ebene M_2 bestimmt.*)

Schneiden wir aus dem R_{n+2} durch die Gleichung

$$(6) \quad x - \bar{x} = 1$$

einen linearen R_{n+1} aus, und setzen wir

$$(7) \quad y - \bar{y} = x_{n+1}, \quad \alpha_i^{(n-1)} - \bar{\alpha}_i^{(n-1)} = x_{i+1} \quad (i = 0 \dots n-1)$$

so definiren uns die aus (5) entstehenden Gleichungen

$$(7a) \quad x_i = \alpha_i^{(n)} + \alpha_{i+1}^{(n)} x_{n+1} \quad (i = 1, \dots, n)$$

∞^{n+1} Strahlen, nach der vorigen Bezeichnungsweise die gemeinsamen Geraden der $n-1$ linearen Complexe $n_i = m_{i+1}$. Durch Hinzunahme der Relation

*) Eine ähnliche Interpretation wird angewendet bei Bäcklund, Math.*Ann. Bd. 11, p. 219 ff.

$$(8) \quad F^{(n)}(\bar{x} \dots \bar{\alpha}_{n-1}^{(n-1)}, \alpha_0^{(n)} \dots \alpha_n^{(n)}) = 0$$

erhalten wir eine Strahlencongruenz (bez. wenn in (2) § 1 die Constante rechts beibehalten wird, ∞^1 Strahlencongruenzen). Auf jedem Congruenzstrahl werden dann die n Brennpunkte durch die Relation

$$(9) \quad \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} A_i^{(n)} x_{n+1}^{n-i} = 0$$

bestimmt, womit die in Aussicht genommene geometrische Deutung der Fundamentalgleichung gewonnen ist.

13. Die Strahlen der Congruenz werden vom Punkte P aus durch ∞^n ebene M_2 der Form (5) projicirt; auf jeder dieser M_2 sind n ausgezeichnete Gerade gelegen, nach denen sie von je einer benachbarten M_2 geschnitten wird, nämlich die Verbindungslinien von P mit den Brennpunkten des zugehörigen Congruenzstrahls. Ist $F^{(n)}$ insbesondere von der Form (3) § 2, so wird durch (7), (8) eine lineare Strahlencongruenz dargestellt; das Focalgebilde einer solchen artet im allgemeinen in eine M_{n-1} aus; in der That liefert die Elimination der $\alpha_i^{(n)}$ aus (7a), (8), (9) in diesem Falle 2 Gleichungen für die x_i , wie wir in den NN. 9, 10 gesehen haben. Die durch (5) dargestellten M_2 gehen dann zu je einfach unendlich vielen durch die Strahlen, welche von P nach den Punkten jener Focal- M_{n-1} gezogen werden. Man erkennt leicht, dass die bekannte, von Ampère*) für den Fall $n=2$ gegebene Zerfällung der beiden Gleichungen (5) § 2 in 2 Paare linearer totaler Differentialgleichungen damit zusammenhängt, dass das Focalgebilde einer linearen Strahlencongruenz des R_3 in 2 Gerade ausartet.

14. Um diese Resultate in die Sprache der Theorie der Flächenelemente zu übersetzen, wollen wir sagen, zwei Elemente n . O. $x \dots \alpha_{n-1}^{(n-1)}, \alpha_0^{(n)} \dots \alpha_n^{(n)}$ und $x \dots \alpha_{n-1}^{(n-1)}, \bar{\alpha}_0^{(n)} \dots \bar{\alpha}_n^{(n)}$ berühren sich stationär**), wenn sie ausser dem Element $x \dots \alpha_{n-1}^{(n-1)}$ noch ein benachbartes, mit diesem vereinigt liegendes Element $n-1^{\text{ter}}$ O. $x + dx, y + dy \dots \alpha_{n-1}^{(n-1)} + d\alpha_{n-1}^{(n-1)}$ mit einander gemein haben; die Verhältnisse $dx:dy:dz$ definiren dann die „Richtung der stationären Berührung“, wie wir uns ausdrücken wollen. Sind die beiden Elemente benachbart, d. h. hat man $\bar{\alpha}_i^{(n)} = \alpha_i^{(n)} + \delta \alpha_i^{(n)}$, so sind die Bedingungen der stationären Berührung:

$$(10) \quad \delta \alpha_i^{(n)} + \frac{dy}{dx} \delta \alpha_{i+1}^{(n)} = 0 \quad (i=0, 1, \dots, n-1),$$

*) Vgl. z. B. die Darstellung bei Darboux, Théorie des Surfaces III, p. 263 ff.

**) Vgl. meine Arbeit: die singulären Lösungen der partiellen Differentialgleichungen in 3 Variablen, Math. Ann. 46.

wenn $dy : dx$ die Richtung der stat. Berührung bestimmt. Man kann jetzt den Sätzen der Nr. 13 die folgende Fassung geben:

„Zu jedem Element $E^{(n)}$ der partiellen Differentialgleichung (2) § 1 giebt es im allgemeinen n benachbarte, im Falle der Ampère-Natanischen Gleichungen n Gruppen von ∞^1 Elementen n . O., die ebenfalls die vorgelegte Gleichung befriedigen und mit $E^{(n)}$ eine stationäre Berührung eingehen; die n Richtungen der stationären Berührung sind in jedem Fall durch (12) § 1 defnirt.

§ 4.

Theorie der Differentio-differentialausdrücke.

15. Liegen die zu dem Element n . O. $E^{(n)}(x \dots \alpha_n^{(n)})$ benachbarten Elemente $E'(x + dx \dots \alpha_n^{(n)} + d\alpha_n^{(n)})$ und $E''(x + \delta x, \dots \alpha_n^{(n)} + \delta \alpha_n^{(n)})$ mit E vereinigt, hat man also

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad d\alpha_i^{(k)} &= \alpha_i^{(k+1)} dx + \alpha_{i+1}^{(k+1)} dy; \\ (2) \quad \delta\alpha_i^{(k)} &= \alpha_i^{(k+1)} \delta x + \alpha_{i+1}^{(k+1)} \delta y \end{aligned} \right\} (i=0, \dots, k; k=0, \dots, n-1)$$

und verlangt man, dass E, E', E'' auf demselben Element $n+1$ ter O. gelegen seien, d. h. dass die Gleichungen

$$(3) \quad d\alpha_i^{(n)} = \alpha_i^{(n+1)} dx + \alpha_{i+1}^{(n+1)} dy; \quad \delta\alpha_i^{(n)} = \alpha_i^{(n+1)} \delta x + \alpha_{i+1}^{(n+1)} \delta y \\ (i=0, \dots, n)$$

zusammen bestehen können, so folgen durch Elimination der $\alpha_i^{(n+1)}$ aus (3) nach Weghebung unwesentlicher Factoren die n Relationen:

$$d\alpha_{i-1}^{(n)} \delta x - \delta\alpha_{i-1}^{(n)} dx + d\alpha_i^{(n)} dy - \delta\alpha_i^{(n)} dy = 0,$$

die wir abkürzend so schreiben:

$$(4) \quad (d\delta)_i^{(n)} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Umgekehrt, sind diese Bedingungen erfüllt, so kann man die $\alpha_i^{(n+1)}$ aus (3) berechnen. Ausnahmen treten ein, erstens falls $\delta y : \delta x = dy : dx$; in diesem Falle müssen die Elemente $E' E''$ identisch sein, wenn die $\alpha_i^{(n+1)}$ endliche Werthe haben sollen, und es giebt solcher Werthe dann einfach unendlich viele; zweitens, wenn $\delta x = \delta y = 0$; dann gehen die Gleichungen (4) über in das System (10) der vorigen Nr., EE'' berühren sich also stationär in der Richtung $dy : dx$ und die $\alpha_i^{(n+1)}$ werden unendlich; analoges tritt natürlich ein, wenn sich EE' stationär berühren.

16. Eine andere Interpretation der Relationen (4), deren linke Seiten wir *Differentio-differentialausdrücke* nennen, ergibt sich aus der folgenden Betrachtung:

Eine infinitesimale Transformation $X(f)$ der Elemente $x \dots \alpha_n^{(n)}$ des Raumes heiße eine inf. Streifentransformation, wenn sie jedes Element in ein benachbartes, mit ihm vereinigt liegendes überführt.

Definieren wir fortan das Symbol d durch die Identität

$$(5) \quad df = X(f) d\lambda$$

unter f eine Function von $x \dots \alpha_n^{(n)}$, unter $d\lambda$ eine unendlich kleine Constante verstanden, so gelten die Relationen (1) identisch und $X(f)$ hat die Form:

$$(6) \quad X(f) \equiv \xi D_x^{(n-1)}(f) + \eta D_y^{(n-1)}(f) + \sum_{i=0}^n \beta_i^{(n)} \frac{\partial f}{\partial \alpha_i^{(n)}},$$

worin $\xi, \eta, \beta_i^{(n)}$ irgend welche Functionen von $x \dots \alpha_n^{(n)}$ bezeichnen. Die ∞^{μ_n+1} Streifen, die sich durch Integration des Systems

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{dx}{d\lambda} = \xi, \quad \frac{dy}{d\lambda} = \eta, \quad \frac{d\alpha_i^{(n)}}{d\lambda} = \beta_i^{(n)} \quad (i=0, 1 \dots n), \\ \frac{d\alpha_i^{(k)}}{d\lambda} = \xi \alpha_i^{(k+1)} + \eta \alpha_{i+1}^{(k+1)} \quad (i=0, 1 \dots k; k=0, 1 \dots n-1) \end{cases}$$

seien die *Bahnstreifen* von $X(f)$ genannt.

Zwei vereinigt liegende Elemente $x \dots \alpha_n^{(n)}$ und $x + \delta x \dots \alpha_n^{(n)} + \delta \alpha_n^{(n)}$ werden von $X(f)$ in zwei benachbarte Elemente $x + dx \dots$ und $x + \delta x + d(x + \delta x) \dots$ übergeführt, welche wieder vereinigt liegen, wenn man hat:

$$(8) \quad d\delta \alpha_i^{(k)} = d\alpha_i^{(k+1)} \delta x + d\alpha_{i+1}^{(k+1)} \delta y + \alpha_i^{(k+1)} d\delta x + \alpha_{i+1}^{(k+1)} d\delta y \\ (i=0, \dots k; k=0, \dots n-1).$$

Subtrahirt man diese Gleichungen bez. von den folgenden:

$$(9) \quad d\delta \alpha_i^{(k)} = \delta \alpha_i^{(k+1)} dx + \delta \alpha_{i+1}^{(k+1)} dy + \alpha_i^{(k+1)} d\delta x + \alpha_{i+1}^{(k+1)} d\delta y,$$

welche ausdrücken, dass die Elemente $x + \delta x \dots$ und

$$x + \delta x + d(x + \delta x) \dots$$

vereinigt liegen, eine Bedingung, die für jede Streifentransformation erfüllt ist, so folgen die Relationen

$$(10) \quad (d\delta)_i^{(q)} = 0 \quad (i=1, \dots q; q=1, \dots n)$$

welche mit Ausnahme der n letzten wegen (1), (2) identisch erfüllt sind.

Da aus (10) wegen (9) umgekehrt (8) folgt, so hat man den Satz:
„Damit durch die inf. Streifentransformation $X(f)$ zwei benachbarte vereinigt liegende Elemente $x \dots \alpha_n^{(n)}$ und $x + \delta x \dots \alpha_n^{(n)} + \delta \alpha_n^{(n)}$ wieder in solche übergeführt werden, ist nothwendig und hinreichend, dass die Relationen (4) bestehen, worin die d durch (5) definirt sind.“

Bedeutend die $\delta x \dots$ Incremente, die nur den Bedingungen (2) genügen, sonst aber willkürlich sind, so hat man wegen (1), (2) u. a.:

$$(11) \quad \begin{cases} d\delta x = \delta dx = \delta \xi d\lambda; & d\delta y = \delta dy = \delta \eta d\lambda, \\ d\delta \alpha_i^{(k)} = \delta d\alpha_i^{(k)}; & \text{für } k = 0, 1, n-2 \text{ und } k = n \end{cases}$$

dagegen

$$(12) \quad d\delta \alpha_i^{(n-1)} - \delta d\alpha_i^{(n-1)} = (d\delta)_{i+1}^{(n)} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1),$$

und allgemein, wenn unter δf , wie fortan immer, der Ausdruck

$$(13) \quad \delta x \cdot D_x^{(n-1)}(f) + \delta y \cdot D_y^{(n-1)}(f) + \sum_{i=0}^n \delta \alpha_i^{(n)} \frac{\delta f}{\delta \alpha_i^{(n)}}$$

verstanden wird:

$$(14) \quad d(\delta F^{(n)}) - \delta(dF^{(n)}) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial \alpha_i^{(n-1)}} (d\delta)_{i+1}^{(n)}.$$

17. Legen wir der Streifentransformation $X(f)$ die Bedingung auf, dass die totalen Differentialgleichungen (4) eine integrable Combination zulassen, d. h. dass eine Identität der Form

$$(15) \quad d\lambda \cdot \delta F^{(n)} \equiv \sum_{i=1}^n \lambda_i (d\delta)_i^{(n)}$$

bestehe, unter den λ_i unbestimmte Factoren verstanden, so folgen durch Vergleichung der Coefficienten von δx , δy , $\delta \alpha_i^{(n)}$ auf beiden Seiten die Gleichungen:

$$(16) \quad d\lambda \cdot D_x^{(n-1)}(F^{(n)}) \equiv \sum_{i=1}^n \lambda_i d\alpha_{i-1}^{(n)},$$

$$(17) \quad d\lambda \cdot D_y^{(n-1)}(F^{(n)}) \equiv \sum_{i=1}^n \lambda_i d\alpha_i^{(n)};$$

$$(18) \quad d\lambda \cdot A_0^{(n)} \equiv -\lambda_1 dx,$$

$$(19) \quad d\lambda \cdot A_k^{(n)} \equiv -\lambda_{k-1} dy - \lambda_k dx \quad (k = 2, \dots, n-1),$$

$$(20) \quad d\lambda \cdot A_n^{(n)} \equiv -\lambda_n dy.$$

Die Elimination der λ_i aus (18), (19), (20) liefert (12) § 1, wenn $dy:dx$ oder $\eta:\xi$ mit Λ bezeichnet wird; es besteht also eine Beziehung der Form (13) § 1; aus (16), (18), (19) bez. (17), (18), (19) erhält man ebenso die Gleichungen (8) § 2. Umgekehrt schliesst man aus (13) § 1 und (8) § 2 leicht auf das Bestehen einer Identität der Form (15). Also:

„Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Gleichungen (4) eine integrable Combination $\delta F^{(n)}$ zulassen, ist die,

dass die Bahnstreifen von $X(f)$ unter den Charakteristiken n . O. von $F^{(n)} = C$ enthalten seien; oder auch: „Die Identität (15) ist mit den Definitionsgleichungen der Charakteristiken von $F^{(n)} = C$ völlig äquivalent.“

§ 5.

Die unbeschränkt integrablen Streifensysteme.

18. Wir werfen nun die Frage auf: wie muss eine Streifentransformation $X(f)$ der Form (6) § 4 beschaffen sein, damit sie irgend zwei benachbart vereinigt liegende Elemente EE' , die (2), (4) § 4 befriedigen, in benachbarte, vereinigt liegende Elemente überführe, die wiederum die Bedingungen (4) § 4 erfüllen? Dazu ist offenbar nothwendig und hinreichend, dass man für jedes Werthsystem der δx , δy , $\delta \alpha_i^{(n)}$ identisch habe:

$$(1) \quad d(\delta \delta)_i^{(n)} \equiv \sum_{k=1}^n \mu_{ik} (d\delta)_k^{(n)} \quad (i = 1, \dots, n)$$

worin unter den μ_{ik} nicht näher bestimmte Factoren der Grössenordnung $d\lambda$ zu verstehen sind. Führt man die Differentiationen auf der linken Seite mit Rücksicht auf (2), (5), (11) § 4 aus, und vergleicht die Coefficienten der willkürlichen Differentiale δx , δy , $\delta \alpha_i^{(n)}$ auf beiden Seiten, so liefert die Elimination der n^2 Grössen μ_{ik} aus den so erhaltenen $n(n+3)$ Gleichungen $3n$ partielle Differentialgleichungen 1. O., welchen die in $X(f)$ auftretenden Grössen ξ , η , $\beta_i^{(n)}$ als Functionen von $x \dots \alpha_n^{(n)}$ zu genügen haben. Die Transformation $X(f)$ hat dann folgende Eigenschaft: Bestimmt man zwei Elemente $x \dots \alpha_n^{(n)}$ und $x + \delta x, \dots \alpha_n^{(n)} + \delta \alpha_n^{(n)}$, welche die Bedingungen (2), (4) § 4 erfüllen, so liegen die von ihnen bez. auslaufenden Bahnstreifen von $X(f)$ ihrer ganzen Ausdehnung nach vereinigt, d. h. jedes Element n . O. des ersten Streifens liegt mit allen ihm benachbarten Elementen des zweiten vereinigt; genügt demnach ein Streifen $S^{(n)}$ den Differentialgleichungen (2), (4) § 4, worin die d durch (5) definirt sind, so bilden die ∞^1 Bahnstreifen von $X(f)$, welche von den ∞^1 Elementen $E^{(n)}$ von $S^{(n)}$ bez. auslaufen, eine Fläche; umgekehrt folgt aus dieser Eigenschaft das Bestehen von Identitäten der Form (1). Wir wollen in diesem Falle das Bahnstreifensystem von $X(f)$ ein *unbeschränkt integrables Streifensystem*, und jede Fläche, die aus ihm nach der geschilderten Methode erhalten wird, eine *Integralfläche* desselben nennen.

19. Nehmen wir an, dass für $X(f)$ eine Identität der Form (15) § 4 erfüllt sei, so folgt zunächst, indem wir darin die $\delta x \dots$ mit den dx identificiren:

$$(2) \quad dF^{(n)} \equiv 0.$$

Ferner können wir die genannte Identität, wieder unter Beachtung von § 4 (2), (11), mit dem Symbol d differenzieren, wobei $d\lambda$ als Constante zu behandeln ist, und erhalten so wegen (14) § 4

$$\sum_{i=1}^n (d\lambda_i - A_{i-1}^{(n-1)} d\lambda) (d\delta)_i^{(n)} + \sum_{i=1}^n \lambda_i d(d\delta)_i^{(n)} = 0.$$

Da nicht alle λ_i identisch verschwinden können, so ist stets eine der Identitäten (1) eine Folge der übrigen. Nehmen wir $n = 1$ an, so ist demnach die einzige in diesem Falle zu befriedigende Identität (1) von selbst erfüllt, und es ergibt sich, dass das Charakteristikensystem einer partiellen Differentialgleichung $F^{(1)} = C$ ein unbeschränkt integrables Streifensystem darstellt*), ein in anderer Form wohlbekannter Satz, der die ganze, von Lagrange und Monge begründete Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen I. O. in sich enthält.

20. In dem von nun an ausschliesslich zu betrachtenden Fall $n = 2$ folgen aus (1) für die in $X(f)$ auftretenden Coefficienten $\xi, \eta, \beta_0^{(2)}, \beta_1^{(2)}, \beta_2^{(2)}$, von denen die drei letzten abkürzend durch ϱ, σ, τ , bezeichnet werden sollen, die nachfolgenden Beziehungen, in denen von der Bezeichnung $f_r = \partial f : \partial r$ etc. und von den Abkürzungen der Nr. 2 Gebrauch gemacht ist:

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} X(\varrho) + \varrho D_x^{(1)}(\xi) - \xi D_x^{(1)}(\varrho) + \sigma D_x^{(1)}(\eta) - \eta D_x^{(1)}(\sigma) = \mu_{11}\varrho + \mu_{12}\sigma, \\ X(\sigma) + \sigma D_y^{(1)}(\xi) - \xi D_y^{(1)}(\sigma) + \tau D_y^{(1)}(\eta) - \eta D_y^{(1)}(\tau) = \mu_{11}\sigma + \mu_{12}\tau, \\ -X(\xi) + \varrho\xi_r - \xi\varrho_r + \sigma\eta_r - \eta\sigma_r = -\mu_{11}\xi, \\ -X(\eta) + \varrho\xi_s - \xi\varrho_s + \sigma\eta_s - \eta\sigma_s = -\mu_{11}\eta - \mu_{12}\xi, \\ \varrho\xi_t - \xi\varrho_t + \sigma\eta_t - \eta\sigma_t = -\mu_{12}\eta, \end{array} \right.$$

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} X(\sigma) + \sigma D_x^{(1)}(\xi) - \xi D_x^{(1)}\sigma + \tau D_x^{(1)}(\eta) - \eta D_x^{(1)}(\tau) = \mu_{21}\varrho + \mu_{22}\sigma, \\ X(\tau) + \sigma D_y^{(1)}(\xi) - \xi D_y^{(1)}\sigma + \tau D_y^{(1)}(\eta) - \eta D_y^{(1)}(\tau) = \mu_{21}\sigma + \mu_{22}\tau, \\ \sigma\xi_r - \xi\sigma_r + \tau\eta_r - \eta\tau_r = -\mu_{21}\xi, \\ -X(\xi) + \sigma\xi_s - \xi\sigma_s + \tau\eta_s - \eta\tau_s = -\mu_{21}\eta - \mu_{22}\xi, \\ -X(\eta) + \sigma\xi_t - \xi\sigma_t + \tau\eta_t - \eta\tau_t = -\mu_{22}\eta. \end{array} \right.$$

Genügt $X(f)$ einer Identität der Form

$$(5) \quad d\lambda \delta F \equiv \lambda_1 (d\delta)_1^{(2)} + \lambda_2 (d\delta)_2^{(2)},$$

unter F eine Function von $xyzpqrst$ verstanden, und setzt man

$$(6) \quad X = \frac{\partial F}{\partial x}, \dots T = \frac{\partial F}{\partial t}, M = D_x^{(1)}(F), N = D_y^{(1)}(F),$$

*) Dieser Satz lässt sich nicht umkehren, vergl. Nr. 23 a. E. und die auf der folgenden Seite citirte Arbeit p. 432.

so dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit R als nicht identisch verschwindend und also $\xi \equiv 1$, $d\lambda = dx$ voraussetzen, da es sich augenscheinlich nur um eine Eigenschaft der *Bahnstreifen* von $X(f)$ handelt. Setzt man noch $\eta = \Lambda_v$, worunter eine der Wurzeln der Gleichung

$$(7) \quad R\Lambda^2 - S\Lambda + T = 0$$

zu verstehen ist, so genügen die Functionen ϱ, σ, τ den Beziehungen

$$(8) \quad \begin{cases} M + R\varrho + (S - R\Lambda_v)\sigma = 0, \\ N + R\sigma + (S - R\Lambda_v)\tau = 0. \end{cases}$$

Da nach § 4 (18) λ_1 in unserem Falle nicht verschwindet, so sind nach Nr. 19 die Beziehungen (3) eine Folge von (4), und die Elimination von μ_{21}, μ_{22} aus den letzteren führt mit Hülfe der Abkürzungen:

$$(9) \quad \begin{cases} X_1(f) \equiv D_x^{(1)}(f) + (\varrho - \Lambda_v\sigma) \frac{\partial f}{\partial r} + \sigma \frac{\partial f}{\partial s}, \\ X_2(f) \equiv D_y^{(1)}(f) + (\sigma - \Lambda_v\tau) \frac{\partial f}{\partial s} + \tau \frac{\partial f}{\partial t}, \\ X_3(f) \equiv \Lambda_v^2 \frac{\partial f}{\partial r} - \Lambda_v \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial t} \end{cases}$$

zu den folgenden Gleichungen:

$$(10) \quad \begin{aligned} X(\sigma) - X_1(\sigma) + \tau X_1(\Lambda_v) - \Lambda_v X_1(\tau) &= 0, \\ X(\tau) - X_2(\sigma) + \tau X_2(\Lambda_v) - \Lambda_v X_2(\tau) &= 0, \\ -X(\Lambda_v) - X_3(\sigma) + \tau X_3(\Lambda_v) - \Lambda_v X_3(\tau) &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen bez. mit 1, Λ_v , τ , addirt sie und beachtet, dass

$$(11) \quad X(f) \equiv X_1(f) + \Lambda_v X_2(f) + \tau X_3(f),$$

so erkennt man, dass das System (10) nur *zwei* unabhängige Bedingungen enthält, welche sich in zwei partielle Differentialgleichungen 1. O. mit der unbekannten Function τ und den unabhängigen Variablen $x \dots t$ verwandeln, wenn man für ϱ, σ ihre Werthe aus (8) substituirt denkt.*) Kennt man eine gemeinsame Lösung dieser Gleichungen, so kennt man auch ϱ, σ , und findet dann durch Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen das System der Bahnstreifen von $X(f)$, welches wir ein *unbeschränkt integrables Charakteristikensystem* der Gleichung $F = C$ nennen wollen.

*Man kann also durch ausführbare Operationen und Integration gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme alle unbeschränkt integrablen Charakteristikensysteme einer vorgelegten Gleichung 2. O. bestimmen.**)*

*) Für Gleichungen 2. O. mit einem doppeltzählenden Charakteristikensystem werden diese Differentialgleichungen illusorisch; daher die Einschränkung der Nr. 5.

**) Aehnliches gilt auch für die Charakteristiken höherer Ordnung, worauf wir aber hier nicht näher eingehen. Eine weitgehende Verallgemeinerung der

21. Ist das Bahnstreifensystem von $X(f)$ ein unbeschränkt integrables Streifensystem 2. O. und will man eine Integralfäche desselben nach Nr. 18 bestimmen, so hat man zunächst einen Ausgangsstreifen $S^{(2)}$ zu suchen, welcher den Gleichungen:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta z = p \delta x + q \delta y, \quad \delta p = r \delta x + s \delta y, \quad \delta q = s \delta x + t \delta y, \\ (\delta \delta)_1^{(2)} = (\delta \delta)_2^{(2)} = 0 \end{array} \right.$$

genügt. Wir können zu diesem Zweck y und z beliebigen Functionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$ von x bez. gleichsetzen; ist ferner $x_0 y_0 z_0$ ein Punkt der so definirten Raumcurve R , und setzen wir zur Abkürzung $\varphi_0 = \varphi(x_0)$ etc., so wählen wir ein Werthsystem p_0, q_0 , das der Relation

$$(12a) \quad \psi_0' = p_0 + q_0 \varphi_0'$$

genügt, ferner beliebige Anfangswerthe s_0, t_0 , worauf r_0 durch die aus (12) leicht abzuleitende Gleichung:

$$(12b) \quad r_0 + 2s_0 \varphi_0' + t_0 \varphi_0'^2 = \psi_0'' - q_0 \varphi_0''$$

bestimmt und vermöge (12) längs R ein das Element $x_0 \dots t_0$ enthaltender Streifen $S^{(2)}$ im allgemeinen eindeutig festgelegt ist. Durch eine beliebige Raumcurve gehen also im allgemeinen ∞^3 Integralfächen des vorgelegten unbeschränkt integrablen Streifensystems hindurch. Ist dieses insbesondere ein Charakteristikensystem, so bilden die aus ihm in der geschilderten Weise aufzubauenden Flächen (Nr. 6) ein Integral von $F = C$, das nach dem obigen von einer willkürlichen Function eines Arguments abhängt. *) Ist ein Element $E^{(2)}(x_0 \dots t_0)$ gegeben, und wählt man eine durch den Punkt $x_0 y_0 z_0$ gehende Raumcurve $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$, welche den Bedingungen (12a), (12b) genügt, sonst aber beliebig ist, so ist ihr entlang nach dem Vorigen ein Ausgangsstreifen $S^{(2)}$, also eine durch sie hindurchgehende Integralfäche des gegebenen unbeschränkt integrablen $C^{(2)}$ -Systems bestimmt, welche die von $E^{(2)}$ auslaufende $C^{(2)}$ des Systems enthält. Für den Fall also, dass eine $C^{(2)}$ einem unbeschränkt integrablen Charakteristikensystem angehört, haben wir eine Bestätigung der in Nr. 5 erwähnten Thatsache, dass die Gesamtheit der Integralfächen, welche durch eine $C^{(2)}$ hindurchgehen, noch von den Coefficienten einer willkürlichen Function eines Arguments abhängt, und man wird von hier aus auch die Angaben der Nr. 5 über die Charakteristiken 3. und höherer Ordnung leicht verificiren. Die umgekehrte Frage dagegen, ob jede beliebige Charakteristik 2. O. einer partiellen Differentialgleichung 2. O. $F = C$ einem unbeschränkt integrablen Charakteristiken-

Theorien dieses und des vorigen § findet sich in meiner Mittheilung: „Ueber gewisse Systeme Pfaff'scher Gleichungen“. Sitzungsber. d. kgl. bayr. Ak. 7. Dec 1895.

*) Dass umgekehrt jedes unbeschränkt integrablen Streifensystem, dessen sämtliche Flächen Integralfächen von $F = C$ sind, aus Charakteristiken von F besteht, erscheint selbstverständlich.

system angehört, ist im allgemeinen, d. h. für beliebiges F , zu verneinen. *)

22. Wir wollen die vorhergehenden Untersuchungen zunächst durch ein besonders einfaches Beispiel erläutern. Die Relationen (3), (4) sind identisch erfüllt, wenn man setzt:

$$\xi \equiv 1, \eta = \Lambda, \varrho = \sigma = \tau = \mu_{ik} = 0,$$

und der Function Λ die Bedingung $X(\Lambda) \equiv 0$ auferlegt. Längs jedes Streifens eines solchen Systems sind also die Richtung $\frac{dy}{dx}$ und die Grössen r, s, t constant; die Trägercurve ist dann, wie leicht zu sehen, eine Parabel, deren Ebene zur z -Axe parallel läuft, und man erhält das allgemeinste Streifensystem der verlangten Beschaffenheit, indem man auf jeder Fläche V der ∞^6 -Schaar:

$$(13) \quad z = a_0 + a_1 x + a_2 y + \frac{1}{2} (a_3 x^2 + 2 a_4 x y + a_5 y^2)$$

diejenigen ∞^1 Streifen 2. O. ins Auge fasst, welche auf ihr durch die zur z -Axe parallelen Tangentenebenen einer auf V willkürlich gewählten Curve bestimmt werden. Die endlichen Gleichungen eines solchen Systems können in der Form:

$$(14) \quad y = \alpha_1 x + \alpha_2; \quad z = \frac{1}{2} \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x + \alpha_5; \quad p = (\alpha_3 - \alpha_1 \alpha_6) x + \alpha_4 - \alpha_1 \alpha_7;$$

$q = \alpha_6 x + \alpha_7; \quad t = \chi(\alpha_1 \dots \alpha_7); \quad r = \alpha_3 - 2 \alpha_1 \alpha_6 + \alpha_1^2 \chi; \quad s = \alpha_6 - \alpha_1 \chi$ geschrieben werden, wenn $\alpha_1 \dots \alpha_7$ willkürliche Parameter, χ irgend eine Function derselben bedeuten; wir nennen einen Streifen $S^{(2)}$ der Form (14) kurz einen *parabolischen* Streifen.

23. Eine partielle Differentialgleichung 2. O.: $F = \text{const.}$, welche ∞^7 parabolische Streifen zu Charakteristiken hat, wird demnach von allen Flächen (13) erfüllt, und hat also die Form:

$$(15) \quad \psi(\xi, \pi, \kappa, r, s, t) = C$$

worin

$$\xi \equiv z - px - qy + \frac{1}{2} (rx^2 + 2sxy + ty^2),$$

$$\pi \equiv p - rx - sy; \quad \kappa \equiv q - sx - ty$$

gesetzt ist. Dieser Gleichung gegenüber zerlegt sich die Flächenschaar (13) in ∞^1 Schaaren:

$$(16) \quad \psi(a_0, a_1, \dots, a_5) = C$$

von je ∞^5 Flächen, in dem Sinne, dass jede solche Schaar ein voll-

*) Das allgemeine Integral einer Gleichung $F = C$ dieser Eigenschaft lässt sich, wie leicht einzusehen, durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen bestimmen; vgl. hierüber meine p. 246 citirte Mittheilung.

ständiges Integral der demselben C entsprechenden Gleichung (15) darstellt. Kann man (16) nach a_0 in der Form

$$(17) \quad a_0 = \varphi(a_1 \dots a_5, C)$$

aufösen, so bestimmen sich auf der einzelnen Fläche (13) die Charakteristiken durch die Differentialgleichung*):

$$y'^2 \left(\frac{1}{2} x^2 + x\varphi_1 - \varphi_3 \right) - y'(xy + \varphi_2 x + \varphi_1 y - \varphi_4) + \left(\frac{1}{2} y^2 + \varphi_2 y - \varphi_5 \right) = 0,$$

worin

$$\varphi_i = \partial \varphi : \partial a_i$$

gesetzt und C aus (16) zu entnehmen ist.

Setzt man hierin:

$$y = -\frac{v}{u} x - \frac{w}{u},$$

so folgt die Bedingung:

$$(18) \quad \varphi_5 u^2 + \varphi_3 v^2 - \frac{1}{2} w^2 + \varphi_1 v w + \varphi_2 w u + \varphi_4 u v = 0.$$

Da die Relation:

$$(19) \quad \begin{vmatrix} 2\varphi_5 & \varphi_4 & \varphi_2 \\ \varphi_4 & 2\varphi_3 & \varphi_1 \\ \varphi_2 & \varphi_1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

im Allgemeinen nicht identisch befriedigt ist, so hat man den Satz: „Auf jeder Fläche (13) umhüllen die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung (15) eine Curve, die sich in die xy -Ebene als im Allg. nicht zerfallender Kegelschnitt projicirt, dessen Tangentialgleichung durch (18) gegeben ist.“ Ebenso erhält man als Projection der Umhüllungscurve eine eigentliche oder zerfallende Curve 2. Classe, wenn (16) nicht nach a_0 , dagegen etwa nach a_1 auflösbar ist, u. s. w. Daraus folgt unmittelbar, dass das Streifensystem (14), solange x beliebig gewählt wird, keiner Identität der Form (5) genügt.** Es giebt also unbeschränkt integrabale Streifensysteme, welche nicht Charakteristikensysteme einer Gleichung $F = C$ sind.

*) Vgl. meinen in Nr. 14 citirte Arbeit p. 6 Gl. (15).

**) Versteht man unter C eine festgewählte Constante, so liefert die durch (13), (17) definirte 5-gliedrige Flächenschaar ein treffliches Beispiel für die in der vorhin citirten Arbeit entwickelte Theorie der *singulären Elemente*, besonders auch für die l. c. in § 4 a. E. angedeuteten Ausnahmefälle. Ist (19) identisch erfüllt, so giebt es auf jeder der betrachteten ∞^5 Flächen (13) 2 sing. Stellen I. Art, in die der zugehörige Kegelschnitt (18) ausartet; besteht die Relation (19) nicht identisch, so definirt sie diejenigen ∞^4 Flächen der Schaar (13), die je 2 sing. Elemente $E^{(2)}$ enthalten, es giebt der letzteren dann ∞^4 und im allgemeinen auch ∞^4 singuläre Elemente $E^{(1)}$ (l. c. Nr. 19); es kann aber auch der Fall eintreten,

§ 6.

Involutorische partielle Differentialgleichungen 2. O.

24. Wir legen nunmehr der infinitesimalen Streifentransformation

$$(1) \quad X(f) \equiv D_x^{(1)}(f) + \Lambda_1 D_y^{(1)}(f) + \varrho \frac{\partial f}{\partial r} + \sigma \frac{\partial f}{\partial s} + \tau \frac{\partial f}{\partial t}$$

die Bedingung auf, dass die Gleichungen:

$$(2) \quad (d\delta)_1^{(2)} = 0, \quad (d\delta)_2^{(2)} = 0$$

zwei von einander unabhängige integrable Combinationen zulassen, d. h. dass man identisch habe (vgl. Nr. 20):

$$(3) \quad \begin{aligned} dx \cdot \delta F &\equiv \lambda_1 (d\delta)_1^{(2)} + \lambda_2 (d\delta)_2^{(2)}, \\ dx \cdot \delta F' &\equiv \lambda_1' (d\delta)_1^{(2)} + \lambda_2' (d\delta)_2^{(2)}, \end{aligned}$$

wobei wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit von F, F' :

$$(4) \quad \lambda_1 \lambda_2' - \lambda_2 \lambda_1' \neq 0.$$

Daraus folgt dann von selbst, dass das Bahnstreifensystem von (1) unbeschränkt integrabel ist. In der That ergeben sich durch Differentiation der Identitäten (3) nach Nr. 19 die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 d(d\delta)_1^{(2)} + \lambda_2 d(d\delta)_2^{(2)} + (d\lambda_1 - P dx)(d\delta)_1^{(2)} + (d\lambda_2 - Q dx)(d\delta)_2^{(2)} &\equiv 0, \\ \lambda_1' d(d\delta)_1^{(2)} + \lambda_2' d(d\delta)_2^{(2)} + (d\lambda_1' - P' dx)(d\delta)_1^{(2)} + (d\lambda_2' - Q' dx)(d\delta)_2^{(2)} &\equiv 0, \end{aligned}$$

woraus sich wegen (4) Identitäten der Form:

$$\begin{aligned} d(d\delta)_1^{(2)} &\equiv \mu_{11} (d\delta)_1^{(2)} + \mu_{12} (d\delta)_2^{(2)}, \\ d(d\delta)_2^{(2)} &\equiv \mu_{21} (d\delta)_1^{(2)} + \mu_{22} (d\delta)_2^{(2)} \end{aligned}$$

ableiten lassen.

dass nur ∞^3 oder weniger sing. $E^{(1)}$ vorhanden sind. so dass die Elimination der a_i aus (15), (16), (17) Nr. 22 l. c. auf 2 oder mehr Relationen für $xyzpq$ führt; Beispiele für die genannten 3 Fälle liefern die folgenden Annahmen für φ : $a_2 a_5$, $a_4^2 + a_2 a_5$, $a_4^2 + a_2 + a_5$. Wir wollen bei dieser Gelegenheit constataren, dass das in Nr. 25 l. c. gegebene Beispiel *unrichtig* ist; ein brauchbares Beispiel

liefert die Schaar (13) für $a_0 = \frac{1}{2} \sum_1^5 a_i^2$; die l. c. mit $A_1 A_2 A_3$ bezeichneten Ausdrücke, die bez. gleich:

$$a_3 - a_1 x - \frac{1}{2} x^2, \quad a_4 - a_2 x - a_1 y - xy, \quad a_5 - a_2 y - \frac{1}{2} y^2$$

werden, verschwinden für:

$$x = a_2 = a_4 = 1, \quad y = a_1 = a_5 = 0, \quad a_3 = \frac{1}{2};$$

die Determinanten (30), (31) l. c. und ihre gemeinsame Unterdeterminante werden 0, 2, 4 bez.

*) Für den Inhalt dieses Paragraphen vgl. auch Bäcklund Math. Ann. XIII, bes. pag. 86 ff.

25. Die Beziehungen (3) drücken aus, dass die ∞^7 Bahnstreifen von $X(f)$, welche sich durch Integration des Systems:

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \Lambda_1, & \frac{dz}{dx} &= p + q\Lambda_1, & \frac{dp}{dx} &= r + s\Lambda_1, \\ \frac{dq}{dx} &= s + t\Lambda_1; & \frac{dr}{dx} &= \varrho, & \frac{ds}{dx} &= \sigma, & \frac{dt}{dx} &= \tau \end{aligned}$$

ergeben, ein gemeinsames Charakteristikensystem der beiden Gleichungen

$$(6) \quad F = C, \quad F' = C'$$

darstellen. Man erkennt aber sofort, dass keine dieser Gleichungen ganz willkürlich gewählt werden kann. In der That folgt zunächst, dass die beiden Fundamentalgleichungen

$$(7) \quad R\Lambda^2 - S\Lambda + T = 0,$$

$$(8) \quad R'\Lambda^2 - S'\Lambda + T' = 0.$$

eine gemeinsame Wurzel Λ_1 besitzen müssen, was das identische Bestehen der Relation

$$(9) \quad \begin{vmatrix} R & S & T & 0 \\ 0 & R & S & T \\ R' & S' & T' & 0 \\ 0 & R' & S' & T' \end{vmatrix} = 0$$

nach sich zieht. Sind ferner die Streifen (5) Charakteristiken sowohl von $F = C$ als auch von $F' = C'$, so genügen alle Systeme von Functionen $uvw\varpi$, welche die Bedingungen:

$$(10) \quad \varrho = u + \Lambda_1 v, \quad \sigma = v + \Lambda_1 w, \quad \tau = w + \Lambda_1 \varpi$$

erfüllen, nach Nr. 4 den folgenden Relationen (vgl. Nr. 21 (6)):

$$(11) \quad \begin{cases} M + Ru + Sv + Tw & = 0, \\ N + & + Rv + Sw + T\varpi & = 0, \end{cases}$$

$$(12) \quad \begin{cases} M' + R'u + S'v + T'w & = 0, \\ N' + & + R'v + S'w + T'\varpi & = 0, \end{cases}$$

welche somit die eine der Functionen $uvw\varpi$ völlig unbestimmt lassen; also müssen die sämtlichen viergliedrigen Unterdeterminanten der zugehörigen Matrix verschwinden, was wir durch die symbolische Gleichung:

$$(13) \quad \left\| \begin{array}{ccccc} M & R & S & T & 0 \\ N & 0 & R & S & T \\ M' & R' & S' & T' & 0 \\ N' & 0 & R' & S' & T' \end{array} \right\| = 0$$

ausdrücken wollen. Wir sagen in diesem Falle, die partiellen Differentialgleichungen (6) befinden sich in Involution. Die Bedingungen (13)

stellen zwei unabhängige partielle Differentialgleichungen 1. O. mit den unbekannten Functionen F, F' und den unabhängigen Variablen $x \dots t$ dar; ihr allgemeinstes Lösungssystem*) FF' enthält nach bekannten Existenztheoremen zwei willkürliche Functionen von je 7 Argumenten.

26. Erfüllen umgekehrt zwei Functionen F, F' die Relationen (13) identisch, ohne dass alle dreigliedrigen Unterdeterminanten der linken Seite von (9) Null werden, so kann man aus dreien der Gleichungen (11), (12) drei der Grössen $uvw\varpi$ durch die vierte ausdrücken; um die Ideen zu fixiren, nehmen wir an, dass aus den ersten drei dieser Gleichungen uvw durch ϖ in der Form

$$(14) \quad u = \mu_1 - \Lambda_1^3 \varpi, \quad v = \mu_2 + \Lambda_1^2 \varpi, \quad w = \mu_3 - \Lambda_1 \varpi$$

dargestellt sei, worin Λ_1 die wegen (9) vorhandene gemeinsame Wurzel von (7), (8) bedeutet. Dass die Coefficienten von ϖ die angegebene Form haben, erkennt man leicht durch die Anwendung von Sylvester's Eliminationsverfahren auf (7), (8). Bestimmt man jetzt die Functionen ϱ, σ, τ durch die Gleichungen:

$$(15) \quad \varrho = \mu_1 + \Lambda_1 \mu_2; \quad \sigma = \mu_2 + \Lambda_1 \mu_3, \quad \tau = \mu_3,$$

so genügen alle Functionen $uvw\varpi$, die (10) befriedigen, auch den Relationen (11), (12), und die Streifen (5) sind also in der That Charakteristiken jeder der beiden Gleichungen (6). Man hat demnach den Satz:

„Bestehen zwischen den linken Seiten zweier partieller Differentialgleichungen (6) die Relationen (13) identisch, so haben sie ein unbeschränkt integrables System von ∞^7 Charakteristiken miteinander gemein, und umgekehrt.“

Es ist jedoch bemerkenswerth, dass eine Gleichung $F = C$ unbeschränkt integrable Charakteristikensysteme enthalten kann, ohne dass eine Gleichung $F' = C'$ existirt, welche mit ihr in Involution ist. Ein Beispiel liefert die Gleichung (15) der Nr. 23, wenn man sich ψ daselbst ganz allgemein gewählt denkt.

27. Aus der Schlussbemerkung der Nr. 7 und den Entwicklungen der Nr. 21 folgt jetzt unmittelbar, dass zwei involutorische partielle Differentialgleichungen 2. O. ein gemeinschaftliches Integral**) besitzen, welches eine willkürliche Function eines Arguments enthält, in dem Sinne, dass durch eine beliebige Raumcurve ∞^3 gemeinsame Integralflächen von (6) hindurchgehen. Die Relationen (2) sind wegen (3), (4) mit $\delta F = 0, \delta F' = 0$ völlig äquivalent. Nennen wir daher einen Streifen 2. O., der die Gleichung $\delta F = 0$ befriedigt, kurz einen Streifen von F , so können wir auch sagen:

*) Vgl. z. B. Goursat l. c. Chap. I, 4.

**) Vgl. meine in der Einleitung citirte Note, woselbst nähere Litteraturangaben zu finden sind.

„Durch jeden gemeinsamen Streifen von F, F' geht im allgemeinen eine und nur eine gemeinsame Integralfläche der beiden involutorischen Gleichungen.“

Umgekehrt erkennt man leicht, dass jede gemeinschaftliche Integralfläche der involutorischen Gleichungen (6) aus deren gemeinschaftlichem Charakteristikensystem nach der Methode der Nr. 21 erhalten wird.

28. Bedeuten Λ_2 und Λ_2' bez. die zweiten Wurzeln der Gleichungen (7) und (8), so ist das zweite Charakteristikensystem von $F = C$ durch die Gleichungen

$$(16) \quad \frac{dy}{da} = \Lambda_2, \quad \frac{dz}{dx} = p + q \Lambda_2 \dots \frac{dt}{dx} = w + \varpi \Lambda_2 \dots$$

definiert, unter $u \dots \varpi$ die allgemeinsten Functionen von $x \dots t$ verstanden, die (11) befriedigen; das zweite Charakteristikensystem von $F' = C'$ erhält man, wenn man hierin Λ_2 durch Λ_2' und (11) durch (12) ersetzt. Dies vorausgeschickt, können wir die Involutionsbeziehung zwischen F und F' auch durch die folgende Eigenschaft völlig charakterisiren:

„Alle Charakteristiken des zweiten Systems von $F = C$ sind Streifen von F' , alle Charakteristiken des zweiten Systems von $F' = C'$ sind Streifen von F .“

Wegen der zwischen F, F' herrschenden, völligen Reciprocität beweisen wir nur den ersten Theil der Behauptung. Substituirt man für $\frac{dy}{dx} \dots \frac{dt}{dx}$ ihre Werthe aus (16) in die Relation:

$$dF' = 0,$$

so folgt

$$(17) \quad M' + \Lambda_2 N' + R'u + (S' + \Lambda_2 R')v + (T' + \Lambda_2 S')w + T'\Lambda_2 \varpi = 0$$

und wir haben nur zu zeigen, dass diese Gleichung eine Folge von (11) ist. Rändert man aber die Matrix der drei Gleichungen (11), (17) mit der Horizontalreihe N', O, R', S', T' und der Verticalreihe 0001, so folgen nach einfacher Umformung die Bedingungen:

$$\left\| \begin{array}{cccccc} M & R & S & T & 0 & 0 \\ N & 0 & R & S & T & 0 \\ M' & R' & S' & T' & 0 & -\Lambda_2 \\ N' & 0 & R' & S' & T' & 1 \end{array} \right\| = 0,$$

welche, wie leicht zu sehen, nicht mehr und nicht weniger aussagen als (13), w. z. b. w.

Hat man zwei partielle Differentialgleichungen I. O. $f = C, f' = C'$, so führt die Forderung, dass alle charakteristischen Streifen I. O. von f Streifen von f' , und alle Charakteristiken von f' Streifen

von f seien, unter Gebrauch des Jacobi'schen Klammersymbols auf die Bedingung:

$$\{f\tilde{f}\} \equiv 0.$$

Nach dem Vorhergehenden ist also die Matrix (13) in gewissem Sinne als ein Analogon des Jacobi'schen Klammersymbols zu betrachten.

§ 7.

Theorie der vollständigen Integrale und der Integralstreifen.

29. Versteht man in dem System Pfaff'scher Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{aligned} \delta z &= p\delta x + q\delta y; & \delta p &= r\delta x + s\delta y; & \delta q &= s\delta x + t\delta y; \\ \delta r &= u\delta x + v\delta y; & \delta s &= v\delta x + w\delta y; & \delta t &= w\delta x + \varpi\delta y, \end{aligned}$$

unter $uvw\varpi$ Functionen von $xy \dots t$, welche den Relationen § 6 (11) identisch genügen, so ist dieses System unbeschränkt integrierbar, wenn man identisch hat:

$$(2) \quad D_y^{(2)}(u) = D_x^{(2)}(v); \quad D_y^{(2)}(v) = D_x^{(2)}(w); \quad D_y^{(2)}(w) = D_x^{(2)}(\varpi),$$

wobei nach Nr. 2 (3):

$$(3) \quad \begin{aligned} D_x^{(2)}(f) &\equiv \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + r\frac{\partial f}{\partial p} + s\frac{\partial f}{\partial q} + u\frac{\partial f}{\partial r} + v\frac{\partial f}{\partial s} + w\frac{\partial f}{\partial t}, \\ D_y^{(2)}(f) &\equiv \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + s\frac{\partial f}{\partial p} + t\frac{\partial f}{\partial q} + v\frac{\partial f}{\partial r} + w\frac{\partial f}{\partial s} + \varpi\frac{\partial f}{\partial t}. \end{aligned}$$

Differentiirt man aber die erste Relation (11) § 6 mit dem Symbol $D_y^{(2)}$, die zweite mit $D_x^{(2)}$, so folgt durch Subtraction die Identität:

$$(4) \quad \begin{aligned} R(D_y^{(2)}(u) - D_x^{(2)}(v)) + S(D_y^{(2)}(v) - D_x^{(2)}(w)) \\ + T(D_y^{(2)}(w) - D_x^{(2)}(\varpi)) \equiv 0. \end{aligned}$$

Da wir, ohne der Allgemeinheit zu schaden, R als nicht identisch verschwindend voraussetzen dürfen, so ist die erste Relation (2) eine Folge der beiden letzten; werden in diese letzteren für u, v ihre Werthe aus (11) § 6 substituirt, so gehen sie in zwei simultane partielle Differentialgleichungen I. O. mit den unbekannten Functionen w, ϖ und den unabhängigen Variablen $x \dots t$ über. Ist ein particuläres Lösungssystem $w\varpi$ dieser Gleichungen bekannt, so kennt man auch u, v , und die Integration von (1) liefert zu jedem Element 2. O. des Raums eine und nur eine dasselbe enthaltende Fläche, deren dritte Ableitungen den Relationen (11) § 6 identisch genügen, die also eine Integralfäche einer bestimmten unter den ∞^1 Gleichungen

$$(5) \quad F = C$$

darstellt, d. h. man erhält so ein vollständiges Integral von (5), in das ausser C noch fünf willkürliche Constante eingehen. Umgekehrt

ist leicht zu erkennen, dass *jedes* vollständige Integral von (5) in dieser Weise gewonnen werden kann.

30. Die ∞^7 charakteristischen Streifen 2. O.*), welche auf den ∞^6 Flächen eines gegebenen vollständigen Integrals von (5) verlaufen, werden durch Integration des Systems

$$(6) \quad \frac{dy}{dx} = \Lambda_v, \quad \frac{dz}{dx} = p + q\Lambda_v, \quad \frac{dq}{dx} = s + t\Lambda_v, \quad \frac{dr}{dx} = \varrho, \quad \frac{ds}{dx} = \sigma, \quad \frac{dt}{dx} = \tau$$

bestimmt, worin

$$(7) \quad \varrho = u + v\Lambda_v, \quad \sigma = v + w\Lambda_v, \quad \tau = w + \varpi\Lambda_v$$

gesetzt ist, $u \dots \varpi$ die dem vollständigen Integral nach der vorigen Nr. zugeordneten Functionen bedeuten, und unter Λ_v eine der Wurzeln von (7) § 6 verstanden wird. Berechnet man uvw aus (7), so folgt durch Substitution in (3) unter Gebrauch der Abkürzungen der Nr. 20:

$$D_x^{(2)}(f) \equiv X_1(f) + (\tau - \varpi\Lambda_v)X_3(f),$$

$$D_y^{(2)}(f) \equiv X_2(f) + \varpi X_3(f).$$

Die beiden letzten Gleichungen (2) gehen dann mit Hülfe unserer Substitution zufolge leichter Rechnung bez. über in:

$$(8) \quad \Lambda_v X(\varpi) = X(\tau) + \tau X_2(\Lambda_v) - X_1(\sigma) - \varpi [2\Lambda_v X_2(\Lambda_v) + X_1(\Lambda_v) + X_3(\sigma)] - \varpi^2 \Lambda_v X_3(\Lambda_v),$$

$$(9) \quad X(\varpi) = X_2(\tau) - \varpi (X_2(\Lambda_v) - X_3(\tau)) - \varpi^2 X_3(\Lambda_v),$$

woraus mit Rücksicht auf § 5 (11) durch Elimination von $X(\varpi)$ folgt:

$$X(\tau) - X_2(\sigma) + \tau X_2(\Lambda_v) - \Lambda_v X_2(\tau) + \varpi (-X(\Lambda_v) - X_3(\sigma) + \tau X_3(\Lambda_v) - \Lambda_v X_3(\tau)) = 0.$$

Nach Nr. 20 ist diese Relation unabhängig von ϖ erfüllt, wenn das v^{te} Charakteristikensystem des gegebenen vollständigen Integrals unbeschränkt integrabel ist; umgekehrt, ist letzteres der Fall, so ist jede der Gleichungen (8), (9) eine Folge der andern; jeder particuläre Werth ϖ , welcher der partiellen Differentialgleichung 1. O. (9) genügt, macht zusammen mit den aus (7) zu berechnenden u, v, w das System (1) unbeschränkt integrabel, und es giebt also unbegrenzt viele vollständige Integrale von (5), welche das gegebene unbeschränkt integrabele Charakteristikensystem (6) miteinander gemein haben, was übrigens auch leicht aus § 5 gefolgert werden kann. Schreibt man in (9) $d\varpi : dx$ für $X(\varpi)$, so definirt diese gewöhnliche Differentialgleichung wie in Nr. 5 längs jeder $C^{(2)}$ des Systems (6) die hindurchgehenden *Charakteristiken* 3. O.**)

*) Vgl. meine oben citirte Arbeit (Math. Ann. 47) § 1.

**) Ein Beispiel für ein vollständiges Integral, dessen *beide* Charakteristikensysteme unbeschränkt integrabel sind, liefert das in Nr. 24 behandelte Integral der Gleichung (15) daselbst.

31. Hat man ein vollständiges Integral von (5), dessen v^{tes} Charakteristikensystem unbeschränkt integrierbar ist, so lässt sich aus ihm durch Enveloppenbildung ein allgemeineres Integral von (5) ableiten. Nach den Nrn. 29, 30 geht nämlich durch jedes Element $E(x \dots t)$ eine Integralfäche V des vollständigen Integrals und eine auf ihr gelegene Charakteristik C des Systems (6); durch ein benachbartes Element E' , welches den Relationen § 5 (12) genügt (wo das Symbol d sich auf das System (6) bezieht), geht ebenso eine Fläche V' und eine darauf gelegene Charakteristik C' ; diese liegt mit C ihrer ganzen Erstreckung nach vereinigt, d. h. jedes Element von C liegt mit den benachbarten Elementen von C' vereinigt. Da nun die Bedingung der vereinigten Lage benachbarter Elemente 2. O. ee' nichts anderes ausdrückt (Nr. 1), als dass das zu e' gehörige Element 1. O. auf e gelegen ist, so folgt, dass die Streifen CC' , oder auch: die Flächen VV' den zu C' gehörigen Streifen 1. O. K' mit einander gemein haben. Versteht man also unter $S^{(2)}$ einen Streifen, der die Bedingungen § 5 (12) erfüllt, unter $EE'E'' \dots$ successive Elemente desselben, unter $CC'C'' \dots$ und $VV'V'' \dots$ die durch sie bestimmten Charakteristiken des Systems (6) bez. Flächen des gegebenen vollständigen Integrals, unter $KK'K'' \dots$ die zu $CC'C'' \dots$ bez. gehörigen Streifen 1. O., so ist die Fläche U , welche aus den Streifen $CC'C'' \dots$ aufgebaut ist, das Umhüllungsgebilde der eingliedrigen Flächenschaar $VV'' \dots$ in dem Sinne, dass jede Fläche V mit U einen Streifen 2. O. C , mit der benachbarten Fläche V' einen Streifen 1. O. K' gemein hat. U ist dann eine Fläche des in Aussicht genommenen allgemeineren Integrals von (5).

Umgekehrt erkennt man leicht, dass eine eingliedrige Flächenschaar $VV' \dots$, in der jede Fläche V mit der benachbarten V' einen Streifen 1. O. K' gemein hat, eine Enveloppe U besitzt, die mit jeder Fläche V einen Streifen 2. O. gemein hat.*)

32. Besitzt die eingliedrige Flächenschaar

$$(10) \quad V(xyz\alpha) = 0$$

mit dem Parameter α die soeben geschilderte Eigenthümlichkeit, und setzen wir wie gewöhnlich zur Abkürzung

$$\partial V : \partial \alpha = V_\alpha, \quad \partial^2 V : \partial \alpha \partial x = V_{\alpha x} \text{ etc.,}$$

so sind die Gleichungspaare:

$$(11) \quad V_x + p V_\alpha = 0, \quad V_y + q V_\alpha = 0$$

und

$$(12) \quad V_{\alpha x} + p V_{\alpha x} = 0, \quad V_{\alpha y} + q V_{\alpha x} = 0$$

für jedes beliebige α und jedes Werthsystem xyz , das die Relationen

$$(13) \quad V = 0, \quad V_\alpha = 0$$

*) Diese Art von Enveloppen betrachtet schon Du Bois-Reymond l. c. § 55.

erfüllt, miteinander verträglich. Nun bestehen zwischen der Fläche $V' = V + V_\alpha d\alpha = 0$ und der zweitbenachbarten Fläche V'' der Schaar (10) wieder dieselben Beziehungen wie zwischen V und V' , d. h. sie haben einen zu K' benachbarten Streifen K'' 1. O. gemein. Einem Punkte xyz der Raumcurve $R^{(0)}$, die durch Elimination von α aus (13) und:

$$(14) \quad V_{\alpha\alpha} = 0$$

sich ergibt, ist so ein Element 1. O. e zugewiesen, für das man ausser (11), (12) hat:

$$(15) \quad V_{\alpha\alpha\alpha} + p V_{\alpha\alpha z} = 0, \quad V_{\alpha\alpha y} + q V_{\alpha\alpha z} = 0.$$

Die solcherweise den Punkten von $R^{(0)}$ zugewiesenen Elemente 1. O. bilden einen durch $R^{(0)}$ gehenden Streifen $R^{(1)}$, d. h. man hat:

$$(16) \quad dz = p dx + q dy$$

wo die dx etc. Verschiebungen auf $R^{(0)}$ anzeigen, und p, q den Gleichungen (11), (12), (15) genügen; man erhält die Relation (16) in der That durch Differentiation von (13), (14) unter Berücksichtigung der Beziehungen (11), (12), (15). Um das dem Nachbarpunkt $x + dx \dots$ von $R^{(0)}$ zugewiesene Element 1. O. e' von $R^{(1)}$ zu finden, differentiiren wir (11), (12) unter der Annahme, dass α die durch (13), (14) definirte Function des Ortes auf der Raumcurve $R^{(0)}$ sei. Wir erhalten so wegen (12) und (15) z. B. für $dp : dx, dy : dx$ die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} (V_{xx} + 2p V_{xz} + p^2 V_{zz}) dx + (V_{xy} + \dots) dy + dp V_z &= 0, \\ (V_{\alpha\alpha x} + 2p V_{\alpha\alpha z} + p^2 V_{\alpha\alpha z}) dx + (V_{\alpha\alpha y} + \dots) dy + dp V_{\alpha\alpha z} &= 0. \end{aligned}$$

Dieselben Relationen erhält man aber, wenn man das auf K' gelegene zu $x \dots q$ benachbarte Element bestimmt. Indem wir auf die Bezeichnungen der Nr. 31 zurückgreifen, können wir sagen:

„Ordnet man nach der Methode der Nr. 18 ∞^1 Charakteristiken $CC' \dots$ des unbeschränkt integrablen Systems (6) zu einer Fläche U zusammen, so umhüllen die zugehörigen Trägerstreifen 1. O. $KK'K'' \dots$ im allgemeinen*) einen Streifen 1. O. $R^{(1)}$ in dem Sinne, dass jeder Streifen K mit $R^{(1)}$ zwei benachbarte Elemente ee' gemein hat.“

Zu jedem Element e von $R^{(1)}$ gehört ein Element 2. O., welches definirt ist als Element der zu K gehörigen Charakteristik C ; solcherweise ist ein durch $R^{(1)}$ gehender Streifen $R^{(2)}$ bestimmt, der augenscheinlich der Gleichung

$$(17) \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \Lambda,$$

und den Relationen § 5 (12) genügt, die wegen (17) in die nachfolgenden übergehen:

*) Vgl. den Schluss der folgenden Nr.

$$(18) \quad \frac{\delta z}{\delta x} = p + q \Lambda_v, \quad \frac{\delta p}{\delta x} = r + s \Lambda_v, \quad \frac{\delta q}{\delta x} = s + t \Lambda_v,$$

$$(19) \quad \begin{cases} \frac{\delta r}{\delta x} + \Lambda_v \frac{\delta s}{\delta x} = \frac{dr}{dx} + \Lambda_v \frac{ds}{dx}, \\ \frac{\delta s}{\delta x} + \Lambda_v \frac{\delta t}{\delta x} = \frac{ds}{dx} + \Lambda_v \frac{dt}{dx} \end{cases}$$

worin die $dr : dx$ etc. wie gewöhnlich durch (6) bestimmt sind. Wegen (17), (18) ist also $R^{(2)}$ ein Integralstreifen 2. O. von $F = C$ (Nr. 7) und umgekehrt bestimmt nach Nr. 18 jeder Integralstreifen $R^{(2)}$ des v^{ten} Systems, der (19) befriedigt, eine Integralfäche U von (5).

33. Die Relationen (17), (18), (19) sind erfüllt für:

$$\begin{aligned} \delta x = \delta y = \delta z = \delta p = \delta q = 0, \\ \delta r + \Lambda_v \delta s = 0, \quad \delta s + \Lambda_v \delta t = 0 \end{aligned}$$

d. h. für einen Streifen $S^{(2)}$ von ∞^1 Elementen 2. O., die alle ein Element $xyzpq$ gemein haben, und deren jedes das unmittelbar vorhergehende stationär berührt (NNr. 14, 15); $S^{(2)}$ ist dann selbst eine Charakteristik, welche der andern Wurzel Λ_v , der Fundamentalgleichung entspricht. In der Bezeichnungsweise von § 3 correspondirt eine solche Serie $S^{(2)}$ von Elementen 2. O. einer *Developpabeln* innerhalb der daselbst betrachteten Strahlencongruenz. Die durch $S^{(2)}$ bestimmte Integralfäche des unbeschränkt integrabeln Charakteristikensystems (6) weist im Punkte xyz eine Singularität von transcendentem Charakter auf, und stellt das Analogon der sog. „Integralconoide“*) einer partiellen Differentialgleichung 1. O. dar. Die Existenz dieser Art von Integralfächen kann auch unabhängig von der Betrachtung eines unbeschränkt integrabeln Charakteristikensystems erschlossen werden, und man findet, dass durch jedes Element 2. O. E eine und nur eine derartige Fläche geht, welche eine willkürlich gewählte von E auslaufende Charakteristik enthält.

Die Ueberlegungen der vorigen Nr. werden ungültig, wenn (5) eine Ampère'sche Gleichung ist (Nr. 8); in diesem Falle artet ja, wie wir in Nr. 9 gesehen haben, die durch einen Integralstreifen bestimmte Integralfäche in die Element- $M_2^{(2)}$ aus, welche sich an eine $C^{(1)}$ anschliesst; in dieselben Element- $M_2^{(2)}$ gehen auch die soeben betrachteten besonderen Integralfächen über. Die Gleichungen (13), (14) stellen jetzt, solange die Flächenschar (10) nicht besonders gewählt ist, keine Raumcurve dar, sondern liefern (durch Elimination der xyz) eine Relation für α allein. Ein weitergehendes Studium dieser Verhältnisse würde uns indes hier zu weit führen.**)

*) Du Bois-Reymond l. c. § 31. p. 62.

**) Aus den bisherigen Entwicklungen folgert man leicht, dass der auf p. 9 meiner in Nr. 23 citirten Arbeit ausgesprochene Satz nur für vollständige

34. Ist $R^{(2)}$ ein Integralstreifen, der wie in Nr. 32 als Umhüllungsgebilde von ∞^1 Charakteristiken $CC' \dots$ des Systems (6) definiert ist, so werden ihm entlang nach Nr. 7 die Ableitungen $uvw\varpi$ der durch ihn bestimmten Integralfäche U unendlich. Um weitere Aufschlüsse über das Verhalten von U in der Nähe von $R^{(2)}$ zu erhalten, nehmen wir an, dass ein beliebiger Punkt der vorhin mit $R^{(0)}$ bezeichneten Curve Nullpunkt sei, dass das zugehörige Element 1. O. in die xy -Ebene hineinfalle, und dass die x -Axe die Curve $R^{(0)}$ im Nullpunkt berühre. *) Es sei s die vom Nullpunkt aus gerechnete Bogenlänge dieser Curve, σ die Bogenlänge der Trägercurve einer der ∞^1 Charakteristiken $CC' \dots$, die längs $R^{(0)}$ aufgereiht sind, gezählt von ihrem Berührungspunkt mit $R^{(0)}$. Die ∞^1 Trägerstreifen 1. O. $KK' \dots$ von $CC' \dots$ sind dann durch Gleichungen der folgenden Form gegeben:

$$(20) \quad \begin{aligned} x &= \Phi(s, \sigma), & y &= \Psi(s, \sigma), & z &= X(s, \sigma), \\ p &= \Pi(s, \sigma), & q &= K(s, \sigma). \end{aligned}$$

worin die rechten Seiten gewöhnliche convergente Potenzreihen von s und σ bedeuten, und s als reihender Parameter aufzufassen ist.

Man hat für jedes s und σ

$$(21) \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \sigma}\right)^2 = 1$$

ferner, da die Gleichungen (20) für $\sigma = 0$ den Streifen $R^{(1)}$ darstellen sollen, für $\sigma = 0$ und beliebiges s

$$(22) \quad \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 = 1.$$

Da $R^{(1)}$ von den Trägerstreifen der $CC' \dots$ eingehüllt wird, so folgt für jedes s wegen (21) und (22):

$$(23) \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}\right)_{\sigma=0} = \frac{\partial \Phi(s, 0)}{\partial s} \dots \left(\frac{\partial K}{\partial \sigma}\right)_{\sigma=0} = \frac{\partial K(s, 0)}{\partial s}.$$

Endlich haben wir für jedes s und σ die Identitäten:

$$(24) \quad \frac{\partial z}{\partial s} \equiv \Pi \frac{\partial x}{\partial s} + K \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial z}{\partial \sigma} \equiv \Pi \frac{\partial x}{\partial \sigma} + K \frac{\partial y}{\partial \sigma}.$$

Die Wahl unseres Coordinatensystems und die Bedingungen (21), (22), (23) erlauben uns, die Gleichungen (20) sogleich in folgender Form hinzuschreiben:

Integrale mit unbeschränkt integrablen Charakteristikensystemen, sowie im Falle der Ampère-Natani'schen Gleichungen richtig ist; der daselbst gegebene Beweis gilt, wie man leicht sieht, nur in dem letzteren Falle.

*) Vgl. die analoge Entwicklung für $n = 1$ bei Darboux, Sav. Etr. XXVII, 1883, p. 42 ff.

$$(25) \quad x = s + \sigma + \frac{1}{2}a(s + \sigma)^2 + \frac{1}{2}a'\sigma^2 + \frac{1}{6}[\varphi_{111}(s^3 + 3s^2\sigma) + \dots] + \dots,$$

$$(26) \quad y = \frac{1}{2}b(s + \sigma)^2 + \frac{1}{2}b'\sigma^2 + \frac{1}{6}[\psi_{111}(s^3 + s^2\sigma) + \dots] + \dots,$$

$$(27) \quad z = \frac{1}{2}c(s + \sigma)^2 + \frac{1}{2}c'\sigma^2 + \frac{1}{6}[\chi_{111}(s^3 + 3s^2\sigma) + 3\chi_{122}s\sigma^2 + \chi_{222}\sigma^3],$$

$$p = \pi(s + \sigma) + \frac{1}{2}d(s + \sigma)^2 + \frac{1}{2}d'\sigma^2 + \dots,$$

$$q = \kappa(s + \sigma) + \frac{1}{2}e(s + \sigma)^2 + \frac{1}{2}e'\sigma^2 + \dots.$$

Die erste der Identitäten (24) liefert dann die Relationen

$$c = \pi,$$

$$(28) \quad \chi_{111} = d + 2a\pi + 2b\kappa,$$

$$(29) \quad \frac{1}{2}\chi_{122} = \frac{1}{2}(d + d') + a\pi + b\kappa,$$

die zweite ergibt die weiteren:

$$c' = 0,$$

$$(30) \quad \chi_{122} = d + 2a\pi + 2b\kappa + a'\pi + b'\kappa,$$

$$(31) \quad \frac{1}{2}\chi_{222} = \frac{1}{2}(d + d') + \pi(a + a') + \kappa(b + b').$$

Aus (28)–(31) folgt:

$$a'\pi + b'\kappa = d'; \quad \chi_{122} = \chi_{111} + d'; \quad \chi_{222} = \chi_{111} + 3d'.$$

Die Gleichungen (25), (26), (27) gehen also, wenn man $s + \sigma = u$ setzt, in die folgende Gestalt über:

$$(25a) \quad x = u + \frac{1}{2}au^2 + \frac{1}{2}a'\sigma^2 + \dots,$$

$$(26a) \quad y = \frac{1}{2}bu^2 + \frac{1}{2}b'\sigma^2 + \dots,$$

$$(27a) \quad z = \frac{1}{2}cu^2 + \frac{1}{2}d'u\sigma^2 + \frac{1}{6}\chi_{111}u^3 + \dots.$$

Für die Schnittcurve von U mit einer den Nullpunkt, aber nicht die x -Achse enthaltenden Ebene E :

$$(32) \quad x = my + nz$$

hat man wegen (25a) annähernd:

$$u = \rho\sigma^2 + \rho'\sigma^3 + \dots.$$

Substituiert man dies in die vorigen Gleichungen, so kommt:

$$(33) \quad x = \alpha\sigma^2 + \alpha'\sigma^3 + \dots, \quad y = \beta\sigma^2 + \beta'\sigma^3 + \dots, \quad z = \gamma''\sigma^4 + \gamma'''\sigma^5 + \dots$$

worin γ''' im allgemeinen nicht verschwindet. Bestimmt man in der Ebene E ein rechtwinkliges Coordinatensystem ξ, η mit dem Nullpunkt als Anfangspunkt, so hat man wegen (32) Gleichungen der Form:

$$(34) \quad \xi = \alpha y + \beta z, \quad \eta = \gamma y + \delta z \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0).$$

Aus (33), (34) gewinnt man eine Relation der folgenden Gestalt:

$$(35) \quad \eta = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi^i + \xi^{\frac{5}{2}} \left(\beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \xi^k \right),$$

worin β_0 im allgemeinen nicht verschwindet; wir haben also das Resultat:

„Ist $R^{(2)}$ ein Integralstreifen von (5), der den Bedingungen (17), (18), (19) genügt, $R^{(0)}$ seine Trägercurve, U die durch ihn festgelegte Integralfläche des unbeschränkt integrablen Charakteristikensystems (6), so ist die Schnittcurve von U mit einer durch einen Punkt P von $R^{(0)}$, aber nicht durch die zugehörige Tangente von $R^{(0)}$ gehenden Ebene E in der Form (35) darstellbar, wenn ξ, η rechtwinklige Coordinaten in E mit P als Anfangspunkt bedeuten, besitzt also in P einen Rückkehrpunkt 2. O. Daher bezeichnen wir $R^{(2)}$ auch als Rückkehrstreifen 2. O. von U .“

35. Wir haben uns in § 5 damit begnügt, den Begriff des unbeschränkt integrablen Charakteristikensystems n . O. aufzustellen, ohne für allgemeines n ein Beispiel anzugeben. *) Daher führen wir auch nur historisch an, dass die Entwicklungen dieses Paragraphen sich auch für allgemeines n ohne wesentliche Modificationen durchführen lassen. Genügt insbesondere ein Integralstreifen n . O. von

$$(36) \quad F^{(n)} = C$$

ausser den Relationen

$$(37) \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \Lambda, \quad \frac{\partial \alpha_i^{(k)}}{\partial x} = \alpha_i^{(k+1)} + \Lambda, \alpha_{i+1}^{(k+1)} \quad (i=0, \dots, k; k=0, \dots, n-1)$$

auch noch den folgenden

$$(38) \quad \frac{\partial \alpha_k^{(n)}}{\partial x} + \Lambda, \frac{\partial \alpha_{k+1}^{(n)}}{\partial x} = \frac{\partial \alpha_k^{(n)}}{\partial x} + \Lambda, \frac{\partial \alpha_{k+1}^{(n)}}{\partial x}$$

(worin sich die $\frac{\partial \alpha_i^{(n)}}{\partial x}$, $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ auf ein gegebenes unbeschränkt integrables Charakteristikensystem beziehen), so stellt er einen Rückkehrstreifen n . O. (Nr. 7) einer durch ihn gehenden Integralfläche von (36) dar, welche aus Charakteristiken des gegebenen unbeschränkt integrablen Systems aufgebaut ist, und umgekehrt. Die Gleichungen (38) gestatten eine sehr einfache Interpretation, der wir uns nun zuwenden.

36. Wir betrachten eine einzelne Charakteristik $C^{(n)}$ eines unbeschränkt integrablen Charakteristikensystems von (36), und einen Integralstreifen $R^{(n)}$ von (36), in dessen Definitionsgleichungen (37) dasselbe Λ eingeht, das auch in den Bedingungsgleichungen der $C^{(n)}$

*) Es ist übrigens leicht, das Beispiel der Nrn. 23, 24 in diesem Sinne zu verallgemeinern.

auftritt (Nr. 4), und welcher mit $C^{(n)}$ ein Element $x \dots \alpha_n^{(n)}$ gemein hat. Unter dieser Voraussetzung haben die bez. zu $R^{(n)}$ und $C^{(n)}$ gehörigen Trägerstreifen $n-1^{\text{ter}}$ O. $R^{(n-1)}$ und $C^{(n-1)}$ die beiden benachbarten Elemente $x \dots \alpha_{n-1}^{(n-1)}$ und $x + dx \dots \alpha_{n-1}^{(n-1)} + d\alpha_{n-1}^{(n-1)}$ mit einander gemein; dies folgt unmittelbar aus der Definition der Integralstreifen, für $n=2$ übrigens auch aus Nr. 32. Bezeichnet man wie bisher mit δ, d die resp. auf $R^{(n)}, C^{(n)}$ bezüglichen Differentiale, so hat man also:

$$(39) \quad \begin{cases} \delta x = dx; & \delta y = \Lambda, dx, \\ d\alpha_i^{(k)} = \delta\alpha_i^{(k)} = \alpha_i^{(k+1)} dx + \alpha_{i+1}^{(k+1)} dy & (i=0, \dots, k; k=0, 1, \dots, n-1). \end{cases}$$

Hieraus folgt

$$(40) \quad \delta^2 \alpha_i^{(k)} = \alpha_i^{(k+1)} \delta^2 x + \alpha_{i+1}^{(k+1)} \delta^2 y + \delta \alpha_i^{(k+1)} dx + \delta \alpha_{i+1}^{(k+1)} dy \\ (i=0, \dots, k; k=0, 1, \dots, n-1).$$

Soll das zweitbenachbarte Element

$$x + 2\delta x + \delta^2 x \dots \alpha_{n-1}^{(n-1)} + 2\delta \alpha_{n-1}^{(n-1)} + \delta^2 \alpha_{n-1}^{(n-1)}$$

von $R^{(n-1)}$ auf dem Element $x + dx \dots \alpha_n^{(n)} + d\alpha_n^{(n)}$ von $C^{(n)}$ gelegen sein, so muss man haben:

$$(41) \quad \delta^2 \alpha_i^{(k)} = \alpha_i^{(k+1)} \delta^2 x + \alpha_{i+1}^{(k+1)} \delta^2 y + d\alpha_i^{(k+1)} dx + d\alpha_{i+1}^{(k+1)} dy. \\ (i=0, \dots, k; k=0, 1, \dots, n-1).$$

Wegen (40) ergibt sich hieraus unter Vernachlässigung von Grössen 3. O. das Gleichungssystem (38); die für $k=0, \dots, n-2$ aus (40), (41) folgenden Relationen erweisen sich nämlich vermöge (39) als identisch erfüllt. Da man umgekehrt von (38), (39), (40) aus leicht zu den Gleichungen (41) gelangt, so können wir den folgenden Satz aussprechen:

„Die Rückkehrstreifen $R^{(n)}$ der Integralflächen V eines unbeschränkt integralen Charakteristikensystems besitzen die folgende Eigenschaft: hat der Trägerstreifen $R^{(n-1)}$ eines Streifens $R^{(n)}$ mit einer Fläche V zwei aufeinanderfolgende Elemente $n-1^{\text{ter}}$ O. gemein, so liegt stets noch ein drittes benachbartes Element von $R^{(n-1)}$ auf V .“

Für $n=1$ ergibt sich hieraus Lié's Theorem über die „Integralcurven“ der partiellen Differentialgleichungen 1. O.*)

München, 1. März 1895.

*) Vgl. z. B. Goursat, l. c. Chap. IX, Nr. 77.