Ueber die Bestimmung der Integrationsconstanten in der Theorie der Gruppenstörungen.

Von *H. v. Zeipel.*

In einem früher erschienenen Aufsätze (A. N. 3620-21) habe ich einige Formeln und Tafeln gegeben, durch welche die allgemeinen Jupiterstörungen einer gewissen Asteroidengruppe zu berechnen sind.

Diejenigen von diesen Formeln und Tafeln, welche sich auf die Bewegung in der Bahnebene beziehen, enthalten vier Integrationsconstanten a, e, π, c , die mit den osculirenden Elementen nicht zusammenfallen. Ehe man die Störungen mit hinreichender Genauigkeit berechnen kann, ist es nöthig, diese Integrationsconstanten aus den osculirenden Elementen zu berechnen. Man kann die Bestimmung der Grössen a, e, π, c in folgender Weise ausführen.

Die Coordinaten r und v in der Bahnebene sind durch die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} r \cos(v - \pi) &= a(1 + v)(\cos \varepsilon - e) \\ r \sin(v - \pi) &= a(1 + v)\sqrt{1 - e^2} \sin \varepsilon \\ \varepsilon - e \sin \varepsilon &= nt + c + n\delta z \end{aligned} \right\} (1)$$

zu bestimmen. Wir setzen

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 + \Delta a_0 \\ e &= e_0 + \Delta e_0 \\ \pi &= \pi_0 + \Delta \pi_0 \\ c &= c_0 + \Delta c_0 \end{aligned} \right\} (2)$$

wo a_0, e_0, π_0, c_0 die osculirenden Elemente sind und $\Delta a_0, \Delta e_0, \Delta \pi_0, \Delta c_0$ kleine Grössen von der Ordnung der störenden Masse bezeichnen. Die Gleichungen (1) werden dann

$$\left. \begin{aligned} r \cos(v - \pi_0 - \Delta \pi_0) &= (a_0 + \Delta a_0)(1 + v)(\cos \varepsilon - e_0 - \Delta e_0) \\ r \sin(v - \pi_0 - \Delta \pi_0) &= (a_0 + \Delta a_0)(1 + v)\sqrt{1 - (e_0 + \Delta e_0)^2} \sin \varepsilon \\ \varepsilon - (e_0 + \Delta e_0) \sin \varepsilon &= (n_0 + \Delta n_0)t + c_0 + \Delta c_0 + n\delta z \end{aligned} \right\}$$

woraus sich ergibt

$$\left. \begin{aligned} r \cos(v - \pi_0) &= (a_0 + \Delta a_0)(1 + v)((\cos \varepsilon - e_0 - \Delta e_0) \cos \Delta \pi_0 - \sqrt{1 - (e_0 + \Delta e_0)^2} \sin \varepsilon \sin \Delta \pi_0) \\ r \sin(v - \pi_0) &= (a_0 + \Delta a_0)(1 + v)((\cos \varepsilon - e_0 - \Delta e_0) \sin \Delta \pi_0 + \sqrt{1 - (e_0 + \Delta e_0)^2} \sin \varepsilon \cos \Delta \pi_0) \\ \varepsilon - e_0 \sin \varepsilon &= n_0 t + c_0 + n\delta z + \Delta e_0 \sin \varepsilon + \Delta n_0 t + \Delta c_0 \end{aligned} \right\} (3)$$

Man kann endlich diese Gleichungen in der Form

$$\left. \begin{aligned} r \cos(v - \pi_0) &= a_0(1 + v + \Delta v)(\cos(\varepsilon + \Delta \varepsilon) - e_0) \\ r \sin(v - \pi_0) &= a_0(1 + v + \Delta v)\sqrt{1 - e_0^2} \sin(\varepsilon + \Delta \varepsilon) \\ (\varepsilon + \Delta \varepsilon) - e_0 \sin(\varepsilon + \Delta \varepsilon) &= n_0 t + c_0 + n\delta z + \Delta n\delta z \end{aligned} \right\} (4)$$

schreiben, wo die Glieder erster Ordnung in $\Delta v, \Delta \varepsilon$ und $\Delta n\delta z$ durch die folgenden Bedingungen zu bestimmen sind:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta v}{1 + v} - \frac{\Delta a_0}{a_0}\right)(\cos \varepsilon - e_0) - \Delta \varepsilon \sin \varepsilon &= -\Delta e_0 - \sqrt{1 - e_0^2} \sin \varepsilon \Delta \pi_0 + \dots \\ \left(\frac{\Delta v}{1 + v} - \frac{\Delta a_0}{a_0}\right) \sin \varepsilon + \Delta \varepsilon \cos \varepsilon &= -\frac{1}{1 - e_0^2} (e_0 \sin \varepsilon \cdot \Delta e_0 - \sqrt{1 - e_0^2} (\cos \varepsilon - e_0) \Delta \pi_0) + \dots \\ \Delta n\delta z &= \Delta \varepsilon (1 - e_0 \cos \varepsilon) + \Delta e_0 \sin \varepsilon + \Delta n_0 t + \Delta c_0 + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Die Auflösung ergibt

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon &= \sin \varepsilon \cdot \frac{\Delta e_0}{1 - e_0^2} + (1 - e_0 \cos \varepsilon) \frac{\Delta \pi_0}{\sqrt{1 - e_0^2}} + \dots \\ \Delta n\delta z &= -\frac{3}{2} n_0 t \frac{\Delta a_0}{a_0} + \sin \varepsilon (1 - e_0^2 + 1 - e_0 \cos \varepsilon) \frac{\Delta e_0}{1 - e_0^2} + (1 - e_0 \cos \varepsilon)^2 \frac{\Delta \pi_0}{\sqrt{1 - e_0^2}} + \Delta c_0 + \dots \\ \frac{\Delta v}{1 + v} &= \frac{\Delta a_0}{a_0} - (\cos \varepsilon + e_0) \frac{\Delta e_0}{1 - e_0^2} - e_0 \sin \varepsilon \frac{\Delta \pi_0}{\sqrt{1 - e_0^2}} + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Die Grössen Δa_0 , Δe_0 , $\Delta \pi_0$, Δc_0 werden nun durch die Bedingungen bestimmt, dass $(n\delta z + \Delta n\delta z)$ und $(v + \Delta v)$ nebst ihren Derivirten erster Ordnung für $t = 0$ verschwinden. Die Bedingungsgleichungen sind also:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= (n\delta z)_0 + \sin \varepsilon_0 (1 - e_0^2 + 1 - e_0 \cos \varepsilon_0) \frac{\Delta e_0}{1 - e_0^2} + (1 - e_0 \cos \varepsilon_0)^2 \frac{\Delta \pi_0}{\sqrt{1 - e_0^2}} + \Delta c_0 + \dots \\ 0 &= \left(\frac{dn\delta z}{d\varepsilon} \right)_0 - \frac{3}{2} (1 - e_0 \cos \varepsilon_0) \frac{\Delta a_0}{a_0} + (2 \cos \varepsilon_0 + e_0) (1 - e_0 \cos \varepsilon_0) \frac{\Delta e_0}{1 - e_0^2} \\ &\quad + 2 e_0 \sin \varepsilon_0 (1 - e_0 \cos \varepsilon_0) \frac{\Delta \pi_0}{\sqrt{1 - e_0^2}} + \dots \\ 0 &= (v)_0 + \frac{\Delta a_0}{a_0} - (\cos \varepsilon_0 + e_0) \frac{\Delta e_0}{1 - e_0^2} - e_0 \sin \varepsilon_0 \frac{\Delta \pi_0}{\sqrt{1 - e_0^2}} + \dots \\ 0 &= \left(\frac{dv}{d\varepsilon} \right)_0 + \sin \varepsilon_0 \frac{\Delta e_0}{1 - e_0^2} - e_0 \cos \varepsilon_0 \frac{\Delta \pi_0}{\sqrt{1 - e_0^2}} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

wo ε_0 durch die Kepler'sche Gleichung, $\varepsilon_0 - e_0 \sin \varepsilon_0 = c_0$, bestimmt ist.

Nach Elimination von Δa_0 aus den drei letzten Gleichungen ergeben sich für die Bestimmung von Δe_0 und $\Delta \pi_0$ die Relationen

$$\left. \begin{aligned} \sin \varepsilon_0 \frac{\Delta e_0}{1 - e_0^2} - \cos \varepsilon_0 \frac{e_0 \Delta \pi_0}{\sqrt{1 - e_0^2}} &= - \left(\frac{dv}{d\varepsilon} \right)_0 \\ (\cos \varepsilon_0 - e_0) \frac{\Delta e_0}{1 - e_0^2} + \sin \varepsilon_0 \frac{e_0 \Delta \pi_0}{\sqrt{1 - e_0^2}} &= - 3 (v)_0 - \frac{2}{1 - e_0 \cos \varepsilon_0} \left(\frac{dn\delta z}{d\varepsilon} \right)_0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Wenn man nun der Hansen'schen Function W die Form

$$W = x + y \cos \psi + z \sin \psi$$

gibt*), so ist nach Hansen

$$- \frac{dv}{d\varepsilon} = \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial \psi} + \dots = - \frac{1}{2} y \sin \varepsilon + \frac{1}{2} z \cos \varepsilon + \dots \quad (9)$$

$$v = - \frac{1}{2} \bar{W} - \frac{1}{6} (x + ey) + \dots \quad \frac{1}{1 - e \cos \varepsilon} \frac{dn\delta z}{d\varepsilon} = \bar{W} + \dots$$

$$\text{d. h.} \quad - 3v - \frac{2}{1 - e \cos \varepsilon} \frac{dn\delta z}{d\varepsilon} = - \frac{1}{2} \bar{W} + \frac{1}{2} (x + ey) + \dots = - \frac{1}{2} y (\cos \varepsilon - e) - \frac{1}{2} z \sin \varepsilon + \dots \quad (10)$$

Unter Berücksichtigung der Formeln (9) und (10) findet man aus dem System (8)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta e_0}{1 - e_0^2} &= - \frac{1}{2} (y)_0 + \dots \\ \frac{e_0 \Delta \pi_0}{\sqrt{1 - e_0^2}} &= - \frac{1}{2} (z)_0 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Die dritte Gleichung im System (7) giebt danach

$$\frac{\Delta a_0}{a_0} = \frac{2}{3} ((x)_0 - \eta_0 (y)_0) \quad (12)$$

wo

$$\eta_0 = \frac{1}{2} e_0.$$

Aus den Gleichungen

$$n_0^2 a_0^3 = k^2 \quad w_0 = 1 - 2 \frac{n'}{n_0}$$

findet man weiter

$$\frac{\Delta a_0}{a_0} = - \frac{2}{3} \frac{\Delta n_0}{n_0} = - \frac{2}{3} \frac{\Delta w_0}{1 - w_0}$$

Die Relation (12) lässt sich also in folgender Weise schreiben

$$\frac{\Delta w_0}{1 - w_0} = - ((x)_0 - \eta_0 (y)_0) + \dots \quad (13)$$

Die erste Gleichung im System (7) giebt endlich

$$\Delta c_0 = - (n\delta z)_0 - \sin \varepsilon_0 (1 - e_0^2 + 1 - e_0 \cos \varepsilon_0) \frac{\Delta e_0}{1 - e_0^2} - (1 - e_0 \cos \varepsilon_0)^2 \frac{\Delta \pi_0}{\sqrt{1 - e_0^2}} + \dots \quad (14)$$

Die constanten Grössen $(y)_0$, $(z)_0$, $((x)_0 - \eta_0 (y)_0)$ und $(n\delta z)_0$ sind, in Bogensecunden ausgedrückt, durch die folgenden Tafeln zu berechnen.

In diesen Tafeln ist $\theta_0 = \frac{1}{2} c_0 - c'$.

c' ist die mittlere Anomalie von Jupiter für die Epoche $t = 0$.

Ueber die Bestimmung von Δ_0 und Σ_0 siehe A. N. 3620-21.

*) Hansen hat anstatt ψ die Bezeichnung η .

Tafel I. $(y)_0 \cos \psi + (z)_0 \sin \psi$.

cosinus		w_0^{-1}		w_0
$\psi - \varepsilon_0$	—		1.9360 _n	2.4082
$\psi - \frac{1}{2} \varepsilon_0 + \theta_0 + \Delta_0$	—		2.2570 _n	2.6435
$\psi + 2 \theta_0 + 2 \Delta_0$	—	2.4696	2.8696 _n	2.8651
$\psi + \frac{1}{2} \varepsilon_0 + 3 \theta_0 + 3 \Delta_0$	—		2.6614	3.4502 _n
$\psi + \varepsilon_0 + 4 \theta_0 + 4 \Delta_0$	—		2.2237	2.9877 _n
$\psi - \varepsilon_0 + 2 \theta_0 + 2 \Delta_0$	η_0		3.1749	3.4425 _n
$\psi - \frac{1}{2} \varepsilon_0 + 3 \theta_0 + 3 \Delta_0$	η_0		3.5390	3.4232 _n
$\psi + 4 \theta_0 + 4 \Delta_0$	η_0	2.9240 _n	3.5221	3.7474 _n
$\psi + \frac{1}{2} \varepsilon_0 + 5 \theta_0 + 5 \Delta_0$	η_0		3.4713 _n	4.4589
$\psi + \varepsilon_0 + 6 \theta_0 + 6 \Delta_0$	η_0		3.0888 _n	4.0094
$\psi - \varepsilon_0 + 2 \theta_0 + \Delta_0$	η'		2.8102 _n	3.2577
$\psi - \frac{1}{2} \varepsilon_0 + 3 \theta_0 + 2 \Delta_0$	η'		3.6610 _n	3.0792 _n
$\psi + 4 \theta_0 + 3 \Delta_0$	η'	3.0899	3.6095 _n	3.7536
$\psi + \frac{1}{2} \varepsilon_0 + 5 \theta_0 + 4 \Delta_0$	η'		3.6619	4.6125 _n
$\psi + \varepsilon_0 + 6 \theta_0 + 5 \Delta_0$	η'		3.2954	4.1738 _n

Tafel II. $(x)_0 - \eta_0 (y)_0$.

cosinus		w_0^{-1}		w_0
$\frac{1}{2} \varepsilon_0 + \theta_0 + \Delta_0$	—		1.9745 _n	2.5944
$\varepsilon_0 + 2 \theta_0 + 2 \Delta_0$	—		2.4338 _n	2.9581
$\frac{3}{2} \varepsilon_0 + 3 \theta_0 + 3 \Delta_0$	—		2.1587 _n	2.7642
$2 \varepsilon_0 + 4 \theta_0 + 4 \Delta_0$	—		1.9025 _n	2.5763
$\frac{5}{2} \varepsilon_0 + 5 \theta_0 + 5 \Delta_0$	—		1.6580 _n	2.3892
$2 \theta_0 + 2 \Delta_0$	η_0	2.9468	3.3466 _n	3.3444
$\frac{1}{2} \varepsilon_0 + 3 \theta_0 + 3 \Delta_0$	η_0		3.4040	4.2057 _n
$\varepsilon_0 + 4 \theta_0 + 4 \Delta_0$	η_0		3.1294	3.9031 _n
$\frac{3}{2} \varepsilon_0 + 5 \theta_0 + 5 \Delta_0$	η_0		2.9201	3.7152 _n
$2 \theta_0 + \Delta_0$	η'	2.5027 _n	3.0334	3.1931 _n
$\frac{1}{2} \varepsilon_0 + 3 \theta_0 + 2 \Delta_0$	η'		3.6109 _n	4.3502
$\varepsilon_0 + 4 \theta_0 + 3 \Delta_0$	η'		3.3577 _n	4.0689
$\frac{3}{2} \varepsilon_0 + 5 \theta_0 + 4 \Delta_0$	η'		3.1602 _n	3.8976
$4 \theta_0 + 4 \Delta_0$	η_0^2	3.4028 _n	4.0000	
$4 \theta_0 + 3 \Delta_0$	$\eta_0 \eta'$	3.8683	4.3875 _n	
$4 \theta_0 + 2 \Delta_0$	η'^2	3.7275 _n	4.1517	

Tafel III. $(n \delta z)_0$.

sinus		w_0^{-2}	w_0^{-1}		w_0
$\frac{1}{2} \varepsilon_0 + \theta_0 + \Delta_0$	—			2.7686 _n	3.3820
$\varepsilon_0 + 2 \theta_0 + 2 \Delta_0$	—		2.4696	3.1048 _n	3.4533
$\frac{3}{2} \varepsilon_0 + 3 \theta_0 + 3 \Delta_0$	—			2.3522	3.2480 _n
$2 \theta_0 + 2 \Delta_0$	η_0	2.9468	3.1206 _n	2.0000	
$\frac{1}{2} \varepsilon_0 + 3 \theta_0 + 3 \Delta_0$	η_0			4.0671	4.8482 _n
$\varepsilon_0 + 4 \theta_0 + 4 \Delta_0$	η_0		2.9238 _n	3.8035	4.4166 _n
$2 \theta_0 + \Delta_0$	η'	2.5027 _n	2.3263	3.2175	
$\frac{1}{2} \varepsilon_0 + 3 \theta_0 + 2 \Delta_0$	η'			4.2240 _n	4.9609
$\varepsilon_0 + 4 \theta_0 + 3 \Delta_0$	η'		3.0899	3.9304 _n	4.5237
$4 \theta_0 + 4 \Delta_0$	η_0^2	3.1000 _n	3.3222		
$4 \theta_0 + 3 \Delta_0$	$\eta_0 \eta'$	3.5670	3.6335 _n		
$4 \theta_0 + 2 \Delta_0$	η'^2	3.4267 _n	3.2504		
$4 \theta_0 + 3 \Delta_0 - \Sigma_0$	j_0^2	2.1818 _n	2.0000		

Die Berechnung von Δe_0 , $\Delta \pi_0$, Δw_0 und Δc_0 nach diesen Tafeln setzt nur die Kenntniss der osculirenden Elemente voraus.

Um die allgemeinen Störungen $\pi \delta z$ und ν durch die in A. N. 3620-21 mitgetheilten Tafeln zu berechnen, gehe man von den Elementen a , e , π , c aus, welche in den

Gleichungen (2) gegeben sind. Es empfiehlt sich, die Elemente a , e , π , c noch einmal zu corrigiren, um eine gute Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung zu erhalten. Hierbei sind nur die Glieder der elliptischen Bewegung nebst zwei oder drei von den grössten Störungsgliedern zu verändern.

Stockholm, 1900 Mai.

H. v. Zeipel.

Measures of the Companions of Sirius and Procyon

made with the new micrometer of the 26inch Equatorial of the U. S. Naval Observatory, Washington.

By T. F. F. See.

Sirius.			
Date	θ	ρ	Seeing
1900.247	149°2	4".64	2.3
.299	147.0	4.39	3.4
.316	154.9	4.80	3.4
.319	152.4	4.71	3.4
1900.295	150.9	4.64	
Procyon.			
1900.247	325°4	4".55	2.3
.299	335.0	4.22	3.4
.316	337.0	5.12	3.4
.319	332.1	4.52	3.4
1900.295	332.4	4.60	
Procyon AC.			
1900.247	343°6	59".04	

The Clark micrometer I of this telescope used by Professors Newcomb, Holden, Hall and Brown for more than a quarter of a century having become somewhat worn, was recently replaced by Clark micrometer II, made in 1874 shortly after micrometer I, and considered by the late Geo. Clark his finest piece of mechanical work. Though the great excellence of this micrometer has been known since Prof. Holden's study of it in 1876, it has remained unused for want of suitable illumination.

One of the first acts of Prof. S. J. Brown, on assuming the astronomical directorship of the observatory, Dec. 17,

1899, was to provide an illumination which would fit this micrometer for research on the great Equatorial.

Electric illuminating apparatus similar to that of the 40 inch Yerkes telescope was designed by Warner and Swasey of Cleveland, Ohio, and as now arranged a two candle-power lamp illuminates the wires directly and also by reflection from a cylindrical mirror placed on the opposite side of the box. The wires appear perfectly sharp and symmetrical in a black field of uniform darkness. A hexagon of colored glasses rotating about the lamp enables the observer to modify the illumination to any desired tint or intensity, so that the faintest object may be seen and measured in immediate contact with the wires. In fact the illumination is perfect; and as the heat from the small lamp is quite insensible, it is anticipated that the George Clark micrometer as now illuminated will give the best attainable results.

The earliest investigation of the value of the screw was made by Prof. E. S. Holden, who first made an elaborate study of the screw of micrometer I, and then extended his researches to the screw of micrometer II. From a variety of observations of different objects, Prof. Holden found the value of one revolution of screw I to be 9".948. By more careful study of this screw Prof. Asaph Hall afterwards reduced the value to 9".936, which is the value finally adopted in his work and in that of Prof. S. J. Brown. Prof. Holden's work on screw II is based upon the following data (Washington Observations, 1877, Appendix I, p. 41).

		Weight
239 Transits of quick moving Stars (6 nights)	9".9270 $\pm$ 0".0004	70
10 measures of $\Delta \delta$ between Atlas and Pleione (1 night)	9.915 $\pm$ 0.004	1
Measures of focal length, &c.	9.930 $\pm$ 0.001	1
Relative length with screw I	9.9389 $\pm$?	28

Resulting value of one revolution of screw II, 9".93024.

If we reduce the value depending on the relative length, in accordance with Prof. Hall's correction of -0".012, the weighted mean of Prof. Holden's data will be 9".9267.

Using standard differences of declination of certain stars in the Pleiades, I have obtained the following data:

Date		R	Wt.
1900 March 10	Atlas-Pleione	9".913	1
" " 12	Atlas-Pleione and other pairs	9.914	1 $t = 30^\circ 5$ F.
" " 13	Atlas-Pleione	9.928	3 $t = 44^\circ 0$ F., focus 2.47