ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

N^o 3362.

Band 141.

2.

Die Störungen der Planeten sind Functionen des Winkels, welchen die Ebenen der Bahnen mit einander bilden.

Von *Aug. Weiler*.

1.

In den Nummern 3052–53, 3063, 3256 der A. N. habe ich die Bewegung des gestörten Planeten analytisch dargestellt, unter der Annahme, dass die Bahnen des gestörten und des störenden Planeten in ein und derselben Ebene liegen. In Wirklichkeit bilden die Ebenen der Bahnen einen Winkel mit einander, und die Störungsausdrücke sind demzufolge verwickelter als die dort erhaltenen. Setzt man in den der Wirklichkeit entsprechenden Störungsausdrücken diesen Winkel $\mathcal{F} = 0$, so sind dieselben identisch mit den der erwähnten Annahme entsprechenden Ausdrücken. Die letzteren sollen nun vervollständigt werden, es sollen auch diejenigen Glieder der Störungsausdrücke bestimmt werden, welche für den Fall $\mathcal{F} = 0$ verschwinden.

Selbstverständlich muss man in dieser Absicht von den Störungsgleichungen ausgehen. Es ist zu beachten, dass zu dem bisherigen System der vierten Ordnung zwei weitere Störungsgleichungen hinzukommen, aus welchen sich der Knoten und die Neigung der Bahn des gestörten Planeten zu der Coordinatenebene bestimmen. Die bisherigen vier Störungsgleichungen erleiden kaum eine weitere Aenderung ausser derjenigen, welche die Störungsfunktion betrifft. Die Störungsfunktion ist in allen Fällen eine gegebene Function der beiden Leitstrahlen und des Winkels, welchen die beiden Leitstrahlen mit einander bilden. Der Werth dieses Winkels aber ist eine Function von $\mathcal{F}$, und hat nun eine andere Gestalt als unter der Annahme $\mathcal{F} = 0$.

Der analytische Ausdruck der Bewegung des gestörten Planeten ist an dem angegebenen Ort nicht für den unbegrenzten Zeitraum, vielmehr nur für einen begrenzten, aber beträchtlich ausgedehnten Zeitraum aufgestellt worden. Es soll nämlich der Werth des Winkels, welchen die Ap-sidenlinie der gestörten Bahn in diesem Zeitraum beschreibt, die Grössenordnung der Excentricitäten nicht überschreiten. Dieser Zeitraum umfasst mindestens einige Jahrhunderte, oftmals aber viele Zehntausende. Will man die Störungen des Planeten für einen Zeitraum berechnen, welcher die hiermit gezogenen Grenzen überschreitet, so hat man Nichts weiter zu thun, als in den gegebenen analytischen Ausdruck der Bewegung an die Stelle der Integrationsbeständigen geänderte numerische Werthe einzusetzen. Indem man wiederholt in dieser Weise vorgeht, kann man den numerischen Werth der Störungen für jeden beliebigen, wenn auch noch so langen Zeitraum berechnen.

Wenn auch eingeräumt werden kann, dass es einen

für den unbegrenzten Zeitraum gültigen analytischen Ausdruck der Störungserscheinungen gebe, so dass also für den unbegrenzten Zeitraum während des ganzen Verlaufs der Erscheinung eine Aenderung der Integrationsbeständigen nicht erforderlich ist, so ist doch erwiesen, dass dieser Ausdruck, wenn es darauf ankommt, eine bestimmte Genauigkeit zu erreichen, eine verwickeltere Gestalt hat, als derjenige, welcher sich aus der ersteren nur für einen begrenzten Zeitraum gültigen Lösung ergibt. Es können nämlich in dieser Lösung die überzähligen Integrationsbeständigen anders bestimmt werden, als es in der für den unbegrenzten Zeitraum gültigen Lösung zulässig ist. Hieraus folgt schon, dass die Störungsausdrücke, welche sich aus der einen Lösung ergeben, formell nicht identisch sind mit den der anderen Lösung entsprechenden Störungsausdrücken. Man kann aber in der ersteren Lösung die Bestimmung der überzähligen Integrationsbeständigen so einrichten, dass die Entwicklungen eine stärkere Convergenz haben, als in der für den unbegrenzten Zeitraum gültigen Lösung. Hiermit ist die obige Bemerkung, die Gestalt der zwei verschiedenartigen Lösungen betreffend begründet.

Die Integration der beiden neu hinzukommenden Störungsgleichungen ist eine verhältnissmässig leicht zu erledigende. Die beabsichtigte Vervollständigung der Störungsausdrücke beruht also hauptsächlich auf der Entwicklung der erweiterten Störungsfunktion. Es wird in Erinnerung gebracht, dass die Störungsfunktion Wandlungen erleidet mit der Wahl des Coordinatensystems, auf welches der gestörte Planet bezogen ist. Die neue Störungstheorie geht nicht von einem beliebigen Coordinatensystem aus. Die beiden einander störenden Planeten sind auf ein Coordinatensystem bezogen, dessen Nullpunkt mit dem gemeinsamen Schwerpunkt der Sonne und des der Sonne näher stehenden Planeten zusammenfällt, gleichgültig ob man die Störungen des der Sonne näher stehenden oder des entfernteren Planeten zu bestimmen hat. Ferner ist als Ebene der XY nicht eine beliebige durch diesen Nullpunkt gelegte Ebene angenommen. Die beiden Ebenen, in welchen die einander störenden Planeten ihre Bahnen beschreiben, haben eine veränderliche Lage; aber es besteht bekanntlich das sehr einfache Gesetz, dass die Durchschnittslinie dieser Ebenen, in einer unveränderlichen durch den Nullpunkt der Coordinaten gehenden Ebene fortschreitet. In der neuen Störungstheorie ist diese unveränderliche Ebene als Ebene der XY angenommen. Es ist nun die Entwicklung

derjenigen Form der Störungfunction zu geben, welche diesem Coordinatensystem entspricht.

Dass die Entwicklung der Störungfunction eine vielfältig behandelte Aufgabe ist, bedarf hier nicht eines Nachweises. Es fragt sich aber, ob sich die Störungstheorie auf einen Theil der hierher gehörigen Untersuchungen beschränken kann, unbeschadet des zu erzielenden Resultats. Der vorliegende Aufsatz enthält nicht eine neue Lösung dieser Aufgabe; der Verfasser glaubt aber, dass es in der That nur einer kleinen Auswahl unter den ausgedehnten und verwickelten Untersuchungen bedarf, welche über diesen Gegenstand veröffentlicht sind, um die Entwicklung der Störungfunction frei zu machen von jenen erschreckenden Weitläufigkeiten, welche in den üblichen Darstellungen dieser Entwicklung durch die Einführung des Winkels $\mathcal{F}$ herbeigeführt sind. Wenn es auch einzelne Störungsaufgaben giebt, in welchen eine Weitläufigkeit der Entwicklung nicht ganz vermieden werden kann, so gelangt man doch auch in diesen Fällen zu einer Näherung der durch die Neigung der Bahnen zu einander bewirkten Störungen vermittelt einer einfachen Rechnung. Dies nachzuweisen ist die Aufgabe, welche sich der vorliegende Aufsatz gestellt hat.

2.

Es handelt sich zunächst um die Entwicklung der Wurzelgrösse

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 2 \rho \cos z + \rho^2}}$$

nach den Cosinus der Vielfachen gegebener Winkel. In derselben ist z das Supplement des Winkels, welchen die Leitstrahlen r und r_1 der beiden einander störenden Planeten mit einander bilden. Von den Leitstrahlen ist r als der kleinere gedacht, ferner ist $\rho = \frac{r}{r_1}$, und demzufolge die vorliegende Wurzelgrösse identisch mit dem Verhältniss von r_1 zu dem Abstand der beiden Planeten von einander.

$$\begin{aligned} 1 + 2 \rho \cos z + \rho^2 &= (1 + \rho \cos z + \rho i \sin z)(1 + \rho \cos z - \rho i \sin z) \\ &= (1 + \rho \varepsilon^{zi})(1 + \rho \varepsilon^{-zi}), \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung $i = \sqrt{-1}$ gesetzt, und ε die Basis des natürlichen Logarithmensystems ist. Die Entwicklung des Productes:

$$(1 + \rho \varepsilon^{zi})^{-n} (1 + \rho \varepsilon^{-zi})^{-n}$$

bewerkstelliget sich mittelst des binomischen Satzes. Es ist:

$$(1 + \rho \varepsilon^{zi})^{-n} = c_0 - c_1 \rho \varepsilon^{zi} + c_2 \rho^2 \varepsilon^{2zi} - c_3 \rho^3 \varepsilon^{3zi} + c_4 \rho^4 \varepsilon^{4zi} - \dots$$

$$(1 + \rho \varepsilon^{-zi})^{-n} = c_0 - c_1 \rho \varepsilon^{-zi} + c_2 \rho^2 \varepsilon^{-2zi} - c_3 \rho^3 \varepsilon^{-3zi} + c_4 \rho^4 \varepsilon^{-4zi} - \dots$$

In diesen Gleichungen sind $c_1, c_2, c_3, \dots$ die bekannten Binomialcoefficienten. Multiplicirt man die beiden Gleichungen mit einander, so erhält man:

$$\begin{aligned} (1 + 2 \rho \cos z + \rho^2)^{-n} &= c_0^2 + c_1^2 \rho^2 + c_2^2 \rho^4 + c_3^2 \rho^6 + c_4^2 \rho^8 + \dots \\ &- (c_0 c_1 + c_1 c_2 \rho^2 + c_2 c_3 \rho^4 + c_3 c_4 \rho^6 + \dots) 2 \rho \cos z + (c_0 c_2 + c_1 c_3 \rho^2 + c_2 c_4 \rho^4 + \dots) 2 \rho^2 \cos 2z \\ &- (c_0 c_3 + c_1 c_4 \rho^2 + \dots) 2 \rho^3 \cos 3z + (c_0 c_4 + \dots) 2 \rho^4 \cos 4z - \dots \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist in der That nach den Cosinus der Vielfachen von z , und zugleich nach den Potenzen von

$\rho = \frac{r}{r_1}$ entwickelt. Der Coefficient von $\rho^n \cos n z$ ist eine unendliche Reihe, deren Glieder nach den Potenzen von ρ^2

Es ist schon erwähnt worden, dass diejenige Gerade, in welcher sich die Ebenen der Bahnen der beiden einander störenden Planeten schneiden, in einer unveränderlichen, durch den Nullpunkt der Coordinaten gelegten Ebene fortschreitet, welche letztere als Ebene der XY angenommen ist. Jene Gerade ist gleichbedeutend mit der gemeinsamen Knotenlinie der beiden Bahnen. Der Winkel, welchen die Ebenen der Bahnen mit einander bilden, ist $\mathcal{F}$. Wenn ferner u und u_1 die Winkel sind, welche die Leitstrahlen mit der gemeinsamen Knotenlinie bilden, und dieselben von dem aufsteigenden Knoten an in der Richtung der Bewegung der Planeten gemessen werden, so besteht jederzeit die Gleichung:

$$\cos z = \cos^2 \frac{\mathcal{F}}{2} \cos(u - u_1) + \sin^2 \frac{\mathcal{F}}{2} \cos(u + u_1).$$

Zur Bestimmung der Leitstrahlen hat man die Gleichungen:

$$\frac{\rho}{r} = 1 + e \cos v, \quad \frac{\rho_1}{r_1} = 1 + e_1 \cos v_1,$$

wo v und v_1 die wahren Anomalien der beiden einander störenden Planeten, ρ und ρ_1 die Parameter, e und e_1 die Excentricitäten der gestörten Ellipsen sind. Die obige Wurzelgrösse soll aber nach den Cosinus der Vielfachen der vier Winkel u, u_1, v, v_1 entwickelt werden.

Ich gebe der zu entwickelnden Grösse die etwas allgemeinere Form:

$$\frac{1}{(1 + 2 \rho \cos z + \rho^2)^n},$$

in welcher der Exponent n einen positiven Zahlenwerth bezeichnet, und bediene mich zunächst jener bekannten Methode, durch welche die vorliegende Grösse nach den Cosinus der Vielfachen von z und zugleich nach den steigen-

den Potenzen von $\rho = \frac{r}{r_1}$ entwickelt wird. Man hat dann

die identische Gleichung zu schreiben:

geordnet sind, und der Coefficient einer jeden Potenz von ρ^2 ist als das Product zweier gegebenen Binomialcoefficienten dargestellt.

Hiermit ist auch die Entwicklung der Störungfunction nach den Cosinus der Vielfachen von z , und zugleich nach den Potenzen von ρ gegeben. Denn die Störungfunction ist:

$$\Omega = \frac{\kappa m m_1}{1+m} \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + 2 r_1 r \cos z + r^2}} + \frac{\kappa m_1}{1+m} \frac{1}{\sqrt{r_1^2 - 2 m r_1 r \cos z + m^2 r^2}} - \frac{\kappa m_1}{r_1},$$

vgl. Nr. 2908 S. 51. Dieselbe enthält zwei Wurzelgrößen, welche beide die oben vorausgesetzte Form haben. Vernachlässigt man die mit den zweiten Potenzen der

Masse m multiplicirten Glieder, und setzt alsdann $\frac{r}{r_1} = \varrho$, so schreibt sich die Störungsfunction einfacher:

$$\Omega = \frac{\kappa m m_1}{r_1} \left(\sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{r^{2i}}{r_1^{2i}} - \sum_{i=0} D_i^{(1)} \frac{r^{2i+1}}{r_1^{2i+1}} \cos z + \sum_{i=0} D_i^{(2)} \frac{r^{2i+2}}{r_1^{2i+2}} \cos 2z - \sum_{i=0} D_i^{(3)} \frac{r^{2i+3}}{r_1^{2i+3}} \cos 3z + \sum_{i=0} D_i^{(4)} \frac{r^{2i+4}}{r_1^{2i+4}} \cos 4z - \dots \right),$$

in welche unter dem Summenzeichen anstatt i die positiven ganzen Zahlen von 0 bis ∞ zu setzen sind. Der Coefficient $D_i^{(n)}$ ist ein positiver, aus der Entwicklung der obigen Wurzelgrösse zu entnehmender Zahlenwerth. Es ist:

$$D_i^{(0)} = c_i c_i, \quad D_i^{(n)} = 2 c_i c_{i+n}.$$

$$(1 + \varrho)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} \varrho + \frac{3}{8} \varrho^2 - \frac{5}{16} \varrho^3 + \frac{35}{128} \varrho^4 - \frac{63}{256} \varrho^5 + \frac{231}{1024} \varrho^6 - \frac{429}{2048} \varrho^7 + \dots,$$

wenn die rechte Seite dieser Gleichung identisch gleichgesetzt wird dem Ausdruck:

$$c_0 - c_1 \varrho + c_2 \varrho^2 - c_3 \varrho^3 + c_4 \varrho^4 - c_5 \varrho^5 + c_6 \varrho^6 - c_7 \varrho^7 + \dots$$

Entwickelt man ferner in dem vorliegenden Werthe der Störungsfunction die Potenzen von r und von r_1 nach den Cosinus der Vielfachen von v und v_1 , so hat man für den Fall $\mathcal{F} = 0$ die verlangte Entwicklung der Störungsfunction nach den Cosinus der Vielfachen von u u_1 v v_1 . Denn es ist für diesen Fall $\cos z = \cos(u - u_1)$, folglich $z = u - u_1$.

3.

In dem Vorausgehenden ist die Entwicklung der Störungsfunction für den Fall $\mathcal{F} = 0$ gegeben. Weitläufiger ist die Entwicklung der Störungsfunction in der allgemeinen Aufgabe. In der letzteren ist dieselbe eine Function der fünf Veränderlichen $\mathcal{F}$ u u_1 v v_1 , während die Entwicklung für den Fall $\mathcal{F} = 0$ nur die drei Veränderlichen $u - u_1$, v und v_1 enthält. An der Bewältigung der Analysis, welche die allgemeine Entwicklung der Störungsfunction im Gefolge hat, haben sich die Mathematiker viel abgemüht. In einer seiner Schriften hat sich Hansen dahin geäußert, diese Entwicklung sei eine der schwierigsten Aufgaben der Analysis. Entwickelt man die Wurzelgrösse

$$\frac{1}{\sqrt{r_1^2 + 2 r_1 r \cos z + r^2}}$$

nach den steigenden Potenzen des Verhältnisses $\frac{r}{r_1}$, so erhält man eine unendliche Reihe, deren Glieder die Form

$$f(z) \frac{r^n}{r_1^{n+1}} \text{ haben. Der Coefficient von } \frac{r^n}{r_1^{n+1}} \text{ ist eine}$$

Function von $\cos z$, welche Kugelfunction genannt wird.

$$\Omega = \frac{\kappa m m_1}{r_1} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 2 \varrho \cos z + \varrho^2}} - 1 + \varrho \cos z \right).$$

Indem ich die obige Entwicklung der Wurzelgrösse hier einführe, gebe ich der Störungsfunction die folgende Entwicklung:

In der letzteren Gleichung ist der Fall $n = 0$ ausgeschlossen, für welchen die erstere Gleichung gegeben ist. Die Coefficienten $D_0^{(0)}$ und $D_0^{(1)}$ ergeben sich ausnahmsweise nicht aus diesen Gleichungen. Denn es ist $D_0^{(0)} = 0$, und mit Rücksicht darauf, dass $2 c_1 = 1$ ist, auch $D_0^{(1)} = 0$. Die Factoren c_i und c_{i+n} ergeben sich aus der binomischen Entwicklung

Es giebt bekanntlich Relationen, welche wegen ihres einfachen Aussehens die Meinung erwecken, dass man mit deren Hilfe den analytischen Ausdruck der Kugelfunction leicht darstellen könne. Diese Meinung ist aber eine irrige. Die Bestimmung der Kugelfunction hat zu endlosen Untersuchungen geführt. Ich verweise auf Heine's Werk: »Die Theorie der Kugelfunction und der verwandten Functionen«. In der zweiten Auflage dieses Werkes, Berlin 1878, enthält der erste Band S. 1–484 ausschliesslich theoretische Untersuchungen. In der Einleitung hat Heine ein Gewicht darauf gelegt, dass er alle die ihm wissenswerth erscheinenden Arbeiten über Kugelfunction in Betracht gezogen habe. Doch sucht der Leser in dem umfangreichen Werk vergeblich nach einer brauchbaren Entwicklung der Störungsfunction.

In eine glückliche Bahn ist die Lösung der vorliegenden Aufgabe gelenkt durch ein Verfahren, welches nach dem Vorgange von Leverrier Herr Tisserand in den Annales de l'Observatoire de Paris, Mémoires T. XV, 1880 eingeschlagen hat. Ueber diese Arbeit des Herrn Tisserand hat Herr Seeliger in dem 19. Jahrgang der Vierteljahrsschrift der A. G. eingehend berichtet. Es wird in derselben die dem Falle $\mathcal{F} = 0$ entsprechende Entwicklung der Störungsfunction zum Ausgangspunkt genommen, und es kommt dann nur darauf an, in diese dem Falle $\mathcal{F} = 0$ entsprechende Entwicklung denjenigen Werth von $\cos n z$ zu substituieren, welcher aus der Gleichung:

$$\cos z = \cos^2 \frac{\mathcal{F}}{2} \cos(u - u_1) + \sin^2 \frac{\mathcal{F}}{2} \cos(u + u_1)$$

folgt. Die Herleitung des Werthes von $\cos n z$ aus der

vorliegenden Gleichung ist zwar eine etwas weitläufige, doch verhältnissmässig einfache Aufgabe. Für die Störungstheorie ist die Bestimmung der Kugelfunction meiner Ansicht nach ein überwundener Standpunkt. Die Kugelfunction ist nun durch einen einfacheren Begriff ersetzt. Denn es handelt sich nur noch um den Werth von $\cos n z$, welcher durch eine endliche Anzahl Glieder ausgedrückt ist. Dagegen ist die Kugelfunction eine unendliche Reihe Glieder von der Form $C_n \cos n z$, in welcher die Coefficienten C_n beständige Grössen sind.

Das hier besprochene Verfahren zum Behuf einer Entwicklung der Störungfunction ist auch in dem vorliegenden Aufsatz maassgebend. Doch glaubt der Verfasser dem Werthe von $\cos n z$ eine Gestalt geben zu müssen, welche etwas abweichend ist von derjenigen, welche Herr Tisserand in Vorschlag gebracht hat. In einer so verwickelten Aufgabe, wie die Störungstheorie ist, soll kein, wenn auch noch so geringfügiges Mittel unbeachtet bleiben, welches zu einer Vereinfachung der Analysis führt.

Man kann sich zur Herleitung des Werthes von $\cos n z$ der folgenden Gleichung bedienen:

$$\cos n z = 2 \cos z \cos (n-1) z - \cos (n-2) z.$$

Wenn man in der Störungfunction des Werthes von $\cos n z$ für eine bestimmte ganze Zahl n bedarf, so ist der Werth von $\cos n z$ für jede der diesem n vorausgehenden ganzen Zahlen gleichfalls erforderlich. Demzufolge bestimme ich mittelst der vorliegenden Gleichung nach einander die Werthe von $\cos 2 z$, $\cos 3 z$, $\cos 4 z$ u. s. w. Ich gebe dem Resultat eine einfachere Gestalt, indem ich

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \alpha, \quad \sin^2 \frac{x}{2} = \beta, \quad u - u_1 = x, \quad u + u_1 = y$$

$$\cos 2 z = \alpha^2 \cos 2 x + 2 \alpha \beta (2 \cos x \cos y - 1) + \beta^2 \cos 2 y$$

$$\cos 3 z = \alpha^3 \cos 3 x + 3 \alpha^2 \beta (2 \cos 2 x \cos y - 2 \cos x + \cos y) + 3 \alpha \beta^2 (2 \cos x \cos 2 y + \cos x - 2 \cos y) + \beta^3 \cos 3 y.$$

Es versteht sich, dass der Werth von $\cos n z$ eine Aenderung nicht erleidet, wenn die Buchstaben α und β , und zugleich die Buchstaben x und y mit einander vertauscht werden. Durch diese Vertauschungen werden der erste und der letzte Theil des Werthes von $\cos n z$ in einander übergeführt, ebenso der zweite und vorletzte Theil u. s. w. Für den Fall eines geradzahigen Werthes von n ist in dem

$$\begin{aligned} \cos 4 z = & \alpha^4 \cos 4 x + 4 \alpha^3 \beta (2 \cos 3 x \cos y - 2 \cos 2 x + 2 \cos x \cos y - 1) \\ & + 2 \alpha^2 \beta^2 (6 \cos 2 x \cos 2 y + 4 \cos 2 x - 16 \cos x \cos y + 4 \cos 2 y + 5) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 5 z = & \alpha^5 \cos 5 x + 5 \alpha^4 \beta (2 \cos 4 x \cos y - 2 \cos 3 x + 2 \cos 2 x \cos y - 2 \cos x + \cos y) \\ & + 5 \alpha^3 \beta^2 (4 \cos 3 x \cos 2 y + 3 \cos 3 x - 12 \cos 2 x \cos y + 6 \cos x \cos 2 y \\ & + 9 \cos x - 8 \cos y) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 6 z = & \alpha^6 \cos 6 x + 6 \alpha^5 \beta (2 \cos 5 x \cos y - 2 \cos 4 x + 2 \cos 3 x \cos y - 2 \cos 2 x + 2 \cos x \cos y - 1) \\ & + 3 \alpha^4 \beta^2 (10 \cos 4 x \cos 2 y + 8 \cos 4 x - 32 \cos 3 x \cos y + 16 \cos 2 x \cos 2 y + 26 \cos 2 x \\ & - 48 \cos x \cos y + 9 \cos 2 y + 16) \\ & + 4 \alpha^3 \beta^3 (10 \cos 3 x \cos 3 y + 18 \cos 3 x \cos y - 36 \cos 2 x \cos 2 y + 18 \cos x \cos 3 y \\ & - 27 \cos 2 x + 72 \cos x \cos y - 27 \cos 2 y - 23) + \dots \end{aligned}$$

setze. Es besteht dann die Gleichung

$$\cos z = \alpha \cos x + \beta \cos y.$$

Der Werth von $\cos n z$ ist eine homogene Function des ersten Grades von α und β , und es soll demgemäss der Werth von $\cos n z$ als eine homogene Function des n^{ten} Grades von α und β dergestalt werden. Man kann das damit erreichen, dass man die Gleichung

$$\cos n z = 2 \cos z \cos (n-1) z - \cos (n-2) z$$

einer kleinen Aenderung unterwirft. Auf der rechten Seite dieser Gleichung ist in dem ersten Gliede der Factor $\cos z$ eine homogene Function des ersten Grades von α und β , der andere Factor $\cos (n-1) z$ der Forderung gemäss eine homogene Function des $n-1^{\text{ten}}$ Grades von α und β . Dagegen ist auf der rechten Seite der vorliegenden Gleichung das zweite Glied $\cos (n-2) z$ der Forderung gemäss eine homogene Function des $n-2^{\text{ten}}$ Grades von α und β . Schreibt man die Gleichung in der folgenden Form:

$$\cos n z = 2 \cos z \cos (n-1) z - (\alpha + \beta)^2 \cos (n-2) z,$$

so ist auch das zweite Glied rechts eine homogene Function des n^{ten} Grades von α und β . Offenbar wird mittelst der neuen Gleichung der Werth von $\cos n z$ als eine homogene Function des n^{ten} Grades von α und β dargestellt. Der angenommenen Aenderung der Gleichung steht Nichts im Wege, weil $\alpha + \beta = 1$ ist.

Indem ich die Glieder des Coefficienten einer jeden Potenz von β so ordne, dass die Summe der Vielfachen von x und von y in den einzelnen Gliedern abnehmende Zahlen darstellen, erhalte ich die folgenden Werthe:

Werthe von $\cos n z$ die Zahl der mit verschiedenen Potenzen von β multiplicirten Theile eine ungerade, und der mittlere Theil bleibt bei diesen Vertauschungen ungeändert. Die nun folgenden Werthe von $\cos n z$ schreibe ich abgekürzt, indem ich diejenigen Theile dieses Werthes fortlasse, welche durch die erwähnten Vertauschungen hergeleitet werden können:

$$\begin{aligned}\cos 7z &= \alpha^7 \cos 7x + 7\alpha^6\beta(2\cos 6x \cos y - 2\cos 5x + 2\cos 4x \cos y - 2\cos 3x + 2\cos 2x \cos y - 2\cos x + \cos y) \\ &+ 7\alpha^5\beta^2(6\cos 5x \cos 2y + 5\cos 5x - 20\cos 4x \cos y + 10\cos 3x \cos 2y + 17\cos 3x \\ &- 32\cos 2x \cos y + 12\cos x \cos 2y + 23\cos x - 18\cos y) \\ &+ 7\alpha^4\beta^3(10\cos 4x \cos 3y + 20\cos 4x \cos y - 40\cos 3x \cos 2y + 20\cos 2x \cos 3y - 32\cos 3x \\ &+ 92\cos 2x \cos y - 72\cos x \cos 2y + 12\cos 3y - 68\cos x + 63\cos y) + \dots\end{aligned}$$

4.

Die Entwicklung von $\cos nz$ nach den Cosinus der Vielfachen von x und von y gestaltet sich sehr einfach für den Fall $\cos y = \cos x$. Denn es ist dann

$$\cos z = (\alpha + \beta) \cos x = \cos x,$$

und man erhält dementsprechend den einfachen Werth:

$$\cos nz = (\alpha + \beta)^n \cos nx = \cos nx,$$

was aus den unter 3. gegebenen Entwicklungen leicht zu ersehen ist. Es ist hier $\cos z$, folglich auch $\cos nz$ unabhängig von dem Winkel $\mathcal{F}$. Aus der Annahme $\cos x = \cos y$ folgt $y = \pm x$, oder $u + u_1 = \pm (u - u_1)$. Diese Gleichung giebt entweder $u_1 = 0$ oder $u = 0$. Der Fall $\cos y = \cos x$ zeigt also an, dass einer der beiden einander störenden Planeten mit dem Knoten zusammenfällt. Hieraus folgt, dass in dem besprochenen Falle die drei Körper sämmtlich in einer der beiden Ebenen liegen, in welchen die von den Planeten beschriebenen Bahnen enthalten sind. Es versteht sich, dass in diesem Falle der Winkel $\mathcal{F}$, welchen die beiden Ebenen mit einander bilden, auf die gegenseitige Anziehung der drei Körper keinen Einfluss hat, dass also der Winkel $\mathcal{F}$ aus der Entwicklung der Störungsfunction hinausfällt.

Es ist von Werth, auch den Fall in das Auge zu fassen, in welchem der Winkel $\mathcal{F}$ seinen grössten Einfluss auf die Störungsfunction erhält. Leicht ist aus den unter 3. gegebenen Entwicklungen zu ersehen, dass in dem

$$\cos n \frac{\mathcal{F}}{2} = c^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} c^{n-2} s^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} c^{n-4} s^4 - \dots,$$

wo zur Abkürzung $\cos \frac{\mathcal{F}}{2} = c$ und $\sin \frac{\mathcal{F}}{2} = s$ gesetzt ist.

Diese Gleichung geht über in die vorliegenden Entwicklungen, wenn anstatt n nach einander die Zahlen 4, 6, 8 ... 14 gesetzt werden.

Die vorliegenden Gleichungen zeigen, in welchem Maasse für den Fall $z = \mathcal{F}$ die Störungsfunction durch die auf einander folgenden nach den Potenzen von β geordneten Theile in dem Werthe von $\cos nz$ beeinflusst ist. Bei wachsendem n nehmen die numerischen Coefficienten der Potenzen von β in dem Werthe von $\cos nz$ schnell zu, so dass der einzelne Coefficient viele Einheiten ausmachen kann. Man darf aber nicht vergessen, dass die Summe aller Theile dieses Werthes gleich $\cos n \mathcal{F}$, also < 1 ist.

Ich nehme nun an, die Störungsrechnung beschränke sich auf die zwei ersten Theile des Werthes von $\cos nz$. Indem man zu immer grösseren Werthen von n fortschreitet, kann die Rechnung einen derartigen Verlauf nehmen, dass die Summe der zwei ersten Theile des Werthes von $\cos nz$ um einen höheren Betrag von $\cos n \mathcal{F}$ abweicht, als

Werthe von $\cos nz$ der numerische Coefficient einer jeden Potenz von β das Maximum erreicht, wenn $\cos x = 1$ und zugleich $\cos y = -1$, wenn also $x = 0$ und zugleich $y = 180^\circ$ gesetzt wird. Aus den Gleichungen $u - u_1 = 0$ und $u + u_1 = 180^\circ$ folgt $u = 90^\circ$ und $u_1 = 90^\circ$. Der Einfluss des Winkels $\mathcal{F}$, welchen die Ebenen der Bahnen mit einander bilden, ist also am grössten, wenn die einander störenden Planeten beide um 90° von dem Knoten entfernt sind. In diesem Falle ist das Supplement des Winkels, welchen die beiden Leitstrahlen mit einander bilden, gleich $\mathcal{F}$. In der That folgt aus der Gleichung

$$\cos z = \alpha - \beta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\mathcal{F}}{2} = \cos \mathcal{F},$$

dass $z = \mathcal{F}$ ist. Es ergeben sich für diesen Fall die folgenden Entwicklungen:

$$\cos 2z = \alpha^2 - 2.3 \alpha \beta + \beta^2$$

$$\cos 3z = \alpha^3 - 3.5 \alpha^2 \beta + 15 \alpha \beta^2 - \beta^3$$

$$\cos 4z = \alpha^4 - 4.7 \alpha^3 \beta + 70 \alpha^2 \beta^2 - \dots$$

$$\cos 5z = \alpha^5 - 5.9 \alpha^4 \beta + 210 \alpha^3 \beta^2 - \dots$$

$$\cos 6z = \alpha^6 - 6.11 \alpha^5 \beta + 495 \alpha^4 \beta^2 - 924 \alpha^3 \beta^3 + \dots$$

$$\cos 7z = \alpha^7 - 7.13 \alpha^6 \beta + 1001 \alpha^5 \beta^2 - 3003 \alpha^4 \beta^3 + \dots$$

Dieselben sind nichts Anderes, als besondere Fälle der bekannten Gleichung:

der erste Theil für sich genommen davon abweicht. Für jeden derartigen Werth von n ist in dem Werthe von $\cos nz$ neben den folgenden Theilen auch der zweite Theil fortzulassen. Der Fehler, welchen man durch diese Streichung begeht, ist offenbar weniger gross, als derjenige, welcher unter Berücksichtigung der zwei ersten Theile des Werthes von $\cos nz$ entstehen würde.

Wird an diesen Beschränkungen des Werthes von $\cos nz$ festgehalten, so gelangt man in allen Fällen zu einer Näherung derjenigen Störung, welche durch den Einfluss des Winkels $\mathcal{F}$ entsteht. Doch giebt es einzelne Fälle, in welchen diese Näherung nicht ausreichend ist, um die Beobachtungswerthe genau darzustellen. Wollte man eine grössere Genauigkeit erhalten, als sich mit dem so eingerichteten Werthe von $\cos nz$ erreichen lässt, so könnte die hierzn führende Rechnung allerdings nicht mehr eine einfache genannt werden. Insbesondere führen dann diejenigen Werthe von n , für welche sich nach der obigen Vorschrift der Werth von $\cos nz$ auf den ersten Theil beschränken soll, zu der Nöthigung, die sämmtlichen Theile des Werthes von $\cos nz$ in die Rechnung einzuführen. Obwohl diese Theile einzeln

genommen sehr grosse numerische Werthe darstellen können, so ist doch deren Summe genau gleich einem Cosinus, und daher kleiner als die Einheit. Auf diesen Fall, dass die sämtlichen Theile des Werthes von $\cos n z$ in Betracht kommen, werde ich in diesem Aufsatz nicht eingehen.

Ich habe die mittlere Bewegung des Perihels des gestörten Planeten mit $B v$ bezeichnet, wo der Coefficient B eine beständige mit der störenden Masse multiplicirte Grösse ist. Die Störungen sollen für denjenigen Zeitraum bestimmt werden, in welchem das Product $B v$ einen kleinen mit den Excentricitäten vergleichbaren Bruchwerth darstellt. Indem ich die drei Grössen $B v$, e und e_1 als solche des ersten Grades bezeichne, habe ich in No. 3052–53 und in No. 3063 gezeigt, dass sich die Störungsausdrücke verhältnissmässig einfach gestalten, wenn dieselben alle diejenigen Störungen umfassen, deren Grad niedriger ist als der fünfte. Die periodischen Störungen der ersten Ordnung sind mit der störenden Masse multiplicirt, und dürfen, wenn deren Coefficienten unabhängig von den Excentricitäten sind, in dem schwierigsten Falle, wo es sich um die Störungen des Planeten durch den Jupiter handelt, als solche des dritten Grades angesehen werden. Ich habe daher diese periodischen Störungen auch für den Fall entwickelt, dass deren Coefficienten mit der ersten Potenz einer Excentricität multiplicirt sind. Nur in einzelnen Fällen, wo grosse numerische Coefficienten auftreten, habe ich auch solche periodischen Störungen der ersten Ordnung berücksichtigt, deren Coefficienten nach den Excentricitäten quadratisch sind. Die säcularen Störungen der ersten Ordnung haben den Factor $B v$, welcher als eine Grösse des ersten Grades gedacht wird. Es versteht sich, dass dieselben auch dann zu berücksichtigen sind, wenn deren Coefficienten cubische Formen der Excentricitäten sind. Zu jenen drei kleinen Grössen $B v$, e und e_1 kommt nun noch die Grösse $\beta = \sin^2 \frac{1}{2} \mathcal{F}$

hinzu. In der überwiegenden Mehrzahl der Fälle ist der Winkel $\frac{1}{2} \mathcal{F}$ ein kleiner Bruchwerth, welcher mit den Excentricitäten vergleichbar ist. Der Werth von $\beta = \sin^2 \frac{1}{2} \mathcal{F}$ kann daher als eine Grösse des zweiten Grades betrachtet werden. Aus den obigen Erörterungen über den Werth von $\cos n z$ folgt, dass diejenigen periodischen Störungen der ersten Ordnung, welche mit β multiplicirt sind, einen ansehnlich grossen numerischen Coefficienten haben können. Man kann sich daher veranlasst sehen anzunehmen, dass die mit β multiplicirten periodischen Störungen der ersten Ordnung nicht solche des fünften, sondern nur des vierten Grades seien. Dagegen sind in den säcularen mit β multiplicirten Störungen die Coefficienten weniger beträchtlich als in den periodischen, und es darf in denselben der Factor β als eine Grösse des zweiten Grades aufgefasst werden. Die säcularen Störungen haben in allen Fällen mindestens den einen der Factoren e und e_1 neben dem Factor $B v$. Es folgt hieraus, dass die säcularen mit β multiplicirten Störungen der ersten Ordnung mindestens den vierten Grad haben. Es kommen schliesslich noch diejenigen Glieder der Störungsgleichungen in Betracht, welche mit β multiplicirt aber unabhängig von x und von y sind. Dieselben führen gleichfalls zu Störungen, welche den Factor $B v$ haben, stellen sich aber als Störungen des dritten Grades dar. Es ist offenbar, dass auch hier die mit β^2 multiplicirten Glieder des Werthes von $\cos n z$ vernachlässigt werden können. Man sieht nun, dass die Entwicklung von $\cos n z$ als homogene Function von α und β des n^{ten} Grades in der That auf jene beiden ersten Theile beschränkt werden kann, von welchen der erste den Factor α^n , der zweite den Factor $\alpha^{n-1} \beta$ hat.

Die unter 3. erhaltenen Werthe von $\cos n z$ können nun auf die folgenden einfacheren beschränkt werden.

$$\cos 2 z = \alpha^2 \cos 2 x + 2 \alpha \beta (2 \cos x \cos y - 1)$$

$$\cos 3 z = \alpha^3 \cos 3 x + 3 \alpha^2 \beta (2 \cos 2 x \cos y - 2 \cos x + \cos y)$$

$$\cos 4 z = \alpha^4 \cos 4 x + 4 \alpha^3 \beta (2 \cos 3 x \cos y - 2 \cos 2 x + 2 \cos x \cos y - 1)$$

$$\cos 5 z = \alpha^5 \cos 5 x + 5 \alpha^4 \beta (2 \cos 4 x \cos y - 2 \cos 3 x + 2 \cos 2 x \cos y - 2 \cos x + \cos y)$$

$$\cos 6 z = \alpha^6 \cos 6 x + 6 \alpha^5 \beta (2 \cos 5 x \cos y - 2 \cos 4 x + 2 \cos 3 x \cos y - 2 \cos 2 x + 2 \cos x \cos y - 1)$$

$$\cos 7 z = \alpha^7 \cos 7 x + 7 \alpha^6 \beta (2 \cos 6 x \cos y - 2 \cos 5 x + 2 \cos 4 x \cos y - 2 \cos 3 x + 2 \cos 2 x \cos y - 2 \cos x + \cos y)$$

u. s. w. Man kann diese Gleichungen leicht verallgemeinern. Es sind nämlich in dem Werthe von $\cos n z$ zwei Theile zu unterscheiden. Der erste Theil ist $\alpha^n \cos n x$, der zweite Theil hat den Factor $n \alpha^{n-1} \beta$, gestaltet sich im Uebrigen aber verschiedenartig, je nachdem n eine gerade oder un-

gerade Zahl ist. Werden die mit $\alpha^{n-1} \beta$ multiplicirten Glieder nach den zunehmenden Vielfachen von x und von y geordnet, so hat man in dem Falle, das n eine der Zahlen 2, 4, 6 ... ist, den Werth:

$$\cos n z = \alpha^n \cos n x + n \alpha^{n-1} \beta \left(1 - 2 \sum_{k=0}^{k=n-2} [\cos k x - \cos (k+1) x \cos y] \right),$$

in welchen nach einander zu setzen ist: $k = 0, k = 2 \dots k = n-2$. Dagegen hat man in dem Falle, dass n eine der Zahlen 3, 5, 7 ... ist, den folgenden Werth:

$$\cos n z = \alpha^n \cos n x + n \alpha^{n-1} \beta \left(\cos y - 2 \sum_{k=1}^{k=n-2} [\cos k x - \cos (k+1) x \cos y] \right),$$

in welchen nach einander zu setzen ist: $k = 1, k = 3 \dots k = n - 2$. Hiermit habe ich den allgemeinen Werth von $\cos n z$ aus den oben aufzeichneten besonderen Werthen von $\cos n z$ abgeleitet.

Setzt man diese Werthe von $\cos n z$ in die nach den Cosinus der Vielfachen von z entwickelte Störungfunction ein, so geht die unter 2. erhaltene Entwicklung über in die folgende:

$$\begin{aligned} \Omega: m m_1 x &= \sum_{n=0} (-\alpha)^n \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{r^{2i+n}}{r_1^{2i+n+1}} \cos n x - \sum_{n=1} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{r^{2i+n}}{r_1^{2i+n+1}} \cos y \\ &+ \sum_{n=2} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{r^{2i+n}}{r_1^{2i+n+1}} \left(1 - 2 \sum_{k=0}^{n-2} [\cos k x - \cos (k+1) x \cos y] \right) \\ &+ \sum_{n=3} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{r^{2i+n}}{r_1^{2i+n+1}} 2 \sum_{k=1}^{n-2} [\cos k x - \cos (k+1) x \cos y] . \end{aligned}$$

In den ersten Theil des Werthes von Ω sind anstatt n die sämtlichen ganzen Zahlen von $n = 0$ bis $n = \infty$ zu setzen, in den zweiten Theil nur die ungeraden Zahlen von $n = 1$ bis $n = \infty$, in den dritten Theil nur die geraden Zahlen von $n = 2$ bis $n = \infty$, in den vierten Theil nur die ungeraden Zahlen von $n = 3$ bis $n = \infty$. Ferner sind in den dritten Theil anstatt k die geraden Zahlen von $k = 0$ bis $k = n - 2$, in den vierten Theil anstatt k die ungeraden Zahlen von $k = 1$ bis $k = n - 2$ zu setzen. Dies ist diejenige Entwicklung der Störungfunction, welche in die Störungsgleichungen eingeführt werden muss, wenn in der Bestimmung der Störungen der Winkel berücksichtigt werden soll, welchen die Bahnen des gestörten und des störenden Planeten mit einander bilden.

5.

Wenn der Winkel $\mathcal{J}$ in Betracht kommt, welchen die Ebenen der Bahnen der beiden einander störenden Planeten mit einander bilden, so ist auch die Breite des gestörten Planeten zu bestimmen. Für den inneren Planeten ist $\sin B = \sin i \sin u$, für den äusseren $\sin B_1 = \sin i_1 \sin u_1$, wo i und i_1 die Winkel sind, welche die Ebenen der Bahnen mit der unveränderlichen Ebene des Systems der drei Körper bilden. Zum Behuf der Längebestimmung sind die Werthe der Veränderlichen $u + \cos i \vartheta$ und $u_1 + \cos i_1 \vartheta$ bestimmt worden. Es kommen daher bei der Bestimmung der Breite die Werthe der weiteren Veränderlichen i, i_1, ϑ in Frage. Man hat zu diesem Behuf die folgenden Störungsgleichungen:

$$\begin{aligned} m n m_0 n_1 \vartheta' &= c \sin u \sin u_1 \frac{d\Omega}{ds} \\ m n m_0 n_1 i' &= c \sin i \cos u \sin u_1 \frac{d\Omega}{ds} \\ m n m_0 n_1 i_1' &= c \sin i_1 \sin u \cos u_1 \frac{d\Omega}{ds} \end{aligned}$$

wo $\cos z = -s$ gesetzt ist, vergl. Nr. 2291 S. 175-76, mit Rücksicht auf Nr. 2510 unter 2. In den vorliegenden Gleichungen ist c eine Integrationsbeständige, und zur Abkürzung $m_0 = \frac{m_1}{1+m+m_1}$ gesetzt. Die Bedeutung der Veränderlichen n und n_1 folgt aus den Gleichungen:

$$u' + \cos i \vartheta' = \frac{n}{r^2}, \quad u_1' + \cos i_1 \vartheta' = \frac{n_1}{r_1^2}.$$

Denn es sind $u' + \cos i \vartheta'$ und $u_1' + \cos i_1 \vartheta'$ die Winkelgeschwindigkeiten der Leitstrahlen r und r_1 in der jeweiligen Ebene der Bahn. Demzufolge sind die Veränderlichen

$n = r^2(u' + \cos i \vartheta')$ und $n_1 = r_1^2(u_1' + \cos i_1 \vartheta')$ gleichbedeutend mit den Flächengeschwindigkeiten der Leitstrahlen r und r_1 in der Ebene der Bahn.

In der Gleichung $u = \varpi + v$ ist u der Winkel, welchen der Leitstrahl r mit der Knotenlinie bildet, und v die wahre Anomalie, folglich ϖ der Winkel, welchen der Leitstrahl des Perihels mit der Knotenlinie bildet. Setzt man die Werthe $u = \varpi + v$ und $u_1 = \varpi_1 + v_1$ in die vorliegenden Gleichungen ein, so gehen dieselben mit Rücksicht auf die bekannten Gleichungen:

$$v' = \frac{p^2}{r^2}, \quad v_1' = \lambda \frac{p_1^2}{r_1^2}$$

über in:

$$\varpi' + \cos i \vartheta' = \frac{n - p^2}{r^2}, \quad \varpi_1' + \cos i_1 \vartheta' = \frac{n_1 - \lambda p_1^2}{r_1^2}$$

Es folgt hieraus, dass die Differenzen $n - p^2$ und $n_1 - \lambda p_1^2$ Störungsglieder sind, dass also, so lange nur die Störungen der ersten Ordnung in Betracht kommen, in den zur Bestimmung von ϑ, i, i_1 gegebenen Störungsgleichungen $n = p^2$ und $n_1 = \lambda p_1^2$ gesetzt werden darf.

Die hier zu integrierenden Störungsgleichungen enthalten die partielle Derivirte $\frac{d\Omega}{ds}$. Die Entwicklung von $\frac{d\Omega}{ds}$ kann nicht unmittelbar aus der Entwicklung von Ω abgeleitet werden, weil die letztere nicht nach den Potenzen von s , sondern nach den Cosinus der Vielfachen von z fortschreitet. Um die Entwicklung von $\frac{d\Omega}{ds}$ zu erhalten, bilde man aus dem anfänglichen Werthe der Störungfunction die partielle Derivirte:

$$\frac{d\Omega}{ds} = \frac{x m m_1 \varrho}{r_1} \left(\frac{1}{(1 + 2 \varrho \cos z + \varrho^2)^{3/2}} - 1 \right),$$

wo dann die unter 2. gegebene Entwicklung der Wurzel-

grösse $(1 + 2 \rho \cos z + \rho^2)^{-n}$ nach den Cosinus der Vielfachen von z für den Fall $n = \frac{3}{2}$ einzusetzen ist. Man gelangt durch diese Substitution zu der folgenden Gleichung:

$$\frac{d\Omega}{ds} = \frac{x m m_1}{r_1} \frac{r}{r_1} \left(\sum_{i=0} E_i^{(0)} \frac{r^{2i}}{r_1^{2i}} - \sum_{i=0} E_i^{(1)} \frac{r^{2i+1}}{r_1^{2i+1}} \cos z + \sum_{i=0} E_i^{(2)} \frac{r^{2i+2}}{r_1^{2i+2}} \cos 2z - \sum_{i=0} E_i^{(3)} \frac{r^{2i+3}}{r_1^{2i+3}} \cos 3z + \sum_{i=0} E_i^{(4)} \frac{r^{2i+4}}{r_1^{2i+4}} \cos 4z - \dots \right).$$

Die Coefficienten $E_i^{(0)}$ sind positive Zahlenwerthe, und ergeben sich aus den Gleichungen:

$$E_i^{(0)} = b_i b_i, \quad E_i^{(n)} = 2 b_i b_{i+n}.$$

Die letztere Gleichung ist ungültig für den Fall $n = 0$, wo man sich der ersteren Gleichung zu bedienen hat. Die erstere Gleichung verliert ihre Gültigkeit für den Fall $i = 0$, denn es ist $E_0^{(0)} = 0$. Die Factoren b_i und b_{i+n} sind gleichbedeutend mit den Coefficienten der binomischen Entwicklung:

$$(1 + \rho)^{-3/2} = b_0 - b_1 \rho + b_2 \rho^2 - b_3 \rho^3 + b_4 \rho^4 - \dots$$

Man kann übrigens die Coefficienten b_i und b_{i+n} auch aus jenen Coefficienten c_i und c_{i+n} herleiten, welche der binomischen Entwicklung von $(1 + \rho)^{-1/2}$ entnommen sind. Denn es ist bekanntlich:

$$c_i = \frac{1/2 \cdot 3/2 \cdot \dots \cdot (1/2 + i - 1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot i}, \\ b_i = \frac{3/2 \cdot 5/2 \cdot \dots \cdot (3/2 + i - 1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot i}, \\ b_{i-1} = \frac{3/2 \cdot 5/2 \cdot \dots \cdot (3/2 + i - 2)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (i - 1)}.$$

Es bestehen daher die Gleichungen:

$$b_{i-1} = 2 i c_i \text{ und } b_i = (2 i + 1) c_i,$$

und es versteht sich, dass man in derselben anstatt i auch $i + n$ schreiben darf. Man kann demzufolge auch die Coefficienten $E_i^{(n)}$ aus jenen Coefficienten $D_i^{(n)}$ herleiten, welche in die Entwicklung von Ω eingeführt worden sind.

Wenn man in die Entwicklung von Ω an die Stelle der Coefficienten $D_i^{(n)}$ die Coefficienten $E_i^{(n)}$ setzt, und die so geänderte Entwicklung von Ω mit $\rho = \frac{r}{r_1}$ multiplicirt, so hat man die Entwicklung der partiellen Derivirten $\frac{d\Omega}{ds}$. Bezeichnet man die Entwicklung von Ω ,

nachdem man in derselben $E_i^{(n)}$ anstatt $D_i^{(n)}$ geschrieben hat, mit Ω_1 , so besteht die einfache Gleichung:

$$\frac{d\Omega}{ds} = \frac{r}{r_1} \Omega_1.$$

Die Störungsgleichungen, welche zur Bestimmung von Knoten und Neigung gegeben sind, lassen sich vermittelst der Flächenintegrale vereinfachen. Es bestehen die beiden Flächenintegrale:

$$m n \sin \mathcal{F} = c \sin i_1, \\ m_0 n_1 \sin \mathcal{F} = c \sin i,$$

in welchen $\sin \mathcal{F} = \sin(i + i_1)$ gesetzt werden kann, vgl. Nr. 2510 unter 3. Ich habe in diesen Untersuchungen vorausgesetzt, der störende Planet beschreibe eine ungestörte Ellipse, es sei also die Masse des gestörten Planeten neben der des störenden unmerklich. Unter dieser Voraussetzung fällt die unveränderliche Ebene der drei Körper, welche als Ebene der XY angenommen ist, mit derjenigen Ebene zusammen, in welcher der störende Planet seine Bahn beschreibt. Handelt es sich um die Störungen des inneren Planeten, so ist also $i_1 = 0$ zu setzen, folglich $\mathcal{F} = i$, und aus dem zweiten Flächenintegral folgt dann $m_0 n_1 = c$. Zur Bestimmung von Knoten und Neigung bestehen dann die beiden Gleichungen:

$$m n \vartheta' = \sin u \sin u_1 \frac{d\Omega}{ds}, \\ m n i' = \sin i \cos u \sin u_1 \frac{d\Omega}{ds},$$

wo noch $n = p_0^2$ gesetzt werden kann. Handelt es sich um die Störungen des äusseren Planeten, so ist $i = 0$ zu setzen, folglich $i_1 = \mathcal{F}$, und aus dem ersten Flächenintegral folgt dann $m n = c$. Zur Bestimmung von Knoten und Neigung hat man in diesem Falle die Gleichungen:

$$m_0 n_1 \vartheta' = \sin u_1 \sin u \frac{d\Omega}{ds}, \\ m_0 n_1 i_1' = \sin i_1 \cos u_1 \sin u \frac{d\Omega}{ds},$$

wo noch $n_1 = \lambda p_{01}^2$ gesetzt werden kann.

Es sollen alle Störungen bestimmt werden, deren Grad niedriger ist als der fünfte. Für den inneren Planeten hat man zur Bestimmung der Breite die Gleichung:

$$\sin B = \sin i \sin u,$$

und aus der Längebestimmung ist der Werth der Veränderlichen:

$$u + \cos i \vartheta = \varpi + \cos i \vartheta + v = w$$

bekannt. Man kann daher die vorige Gleichung umschreiben in:

$$\sin B = \sin i \sin (w - \cos i \vartheta).$$

In dem Werthe von $\sin B$ sollen die Störungen des fünften Grades nicht mehr in Betracht kommen. Der Factor $\sin i$ ist als eine Grösse des ersten Grades anzusehen. Es folgt hieraus, dass zum Behuf der Breitebestimmung in dem Werthe

von ϑ auch die Glieder des vierten Grades vernachlässigt werden können. Von den mit $\beta = \sin^2 \frac{1}{2} \mathcal{F}$ multiplicirten Störungen des Knotens dürfen daher ebensowohl die säc-
laren als die periodischen vernachlässigt werden. Von den mit β multiplicirten Störungen des Knotens sind nur die mit der Zeit multiplicirten zu berücksichtigen, weil dieselben als Störungen des dritten Grades angesehen werden müssen.

$$\frac{d\Omega}{ds} : \alpha m m_1 = \sum_{n=0} (-\alpha)^n \sum_{i=0} E_i^{(n)} \frac{r^{2i+n+1}}{r_1^{2i+n+2}} \cdot \cos n x - \sum_{n=1} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} E_i^{(n)} \frac{r^{2i+n+1}}{r_1^{2i+n+2}} \cdot \cos y \\ + \sum_{n=3} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} E_i^{(n)} \frac{r^{2i+n+1}}{r_1^{2i+n+2}} \cdot 2 \cos x ,$$

wo in den ersten Theil anstatt n die sämtlichen ganzen Zahlen von 0 bis ∞ zu setzen sind, in den zweiten und in den dritten Theil anstatt n nur die ungeraden Zahlen, und zwar in den zweiten Theil die von 1 bis ∞ , in den dritten Theil die von 3 bis ∞ . Es kommen von den mit

Zu dem gleichen Ergebniss führt die Betrachtung der Störungen des äusseren Planeten, und man kann leicht nachweisen, dass in der zur Bestimmung des Knotens gegebenen Störungsgleichung die Entwicklung von $\frac{d\Omega}{ds}$ in der folgenden Form zu schreiben ist:

$\beta = \sin^2 \frac{\mathcal{F}}{2}$ multiplicirten Gliedern der Entwicklung von $\frac{d\Omega}{ds}$ nur diejenigen in Betracht, welche entweder den Factor $\cos y$ oder den Factor $\cos x$ haben. Die Glieder der Derivirten ϑ sind nämlich sämtlich mit

$$\sin u \sin u_1 = \frac{1}{2} (\cos (u - u_1) - \cos (u + u_1)) = \frac{1}{2} (\cos x - \cos y)$$

multiplicirt, und in Verbindung mit diesem Factor führen von den mit β multiplicirten nur die in die vorliegende Entwicklung von $\frac{d\Omega}{ds}$ aufgenommenen Glieder zu Störungsgliedern, welche sich als beständige Grössen darstellen, und

daher zu Störungen, welche mit der Zeit multiplicirt sind. Man setze zu diesem Behuf:

$\sin u \sin u_1 \cos x = \frac{1}{4}$, $\sin u \sin u_1 \cos y = -\frac{1}{4}$, ferner $r = p_0$ und $r_1 = p_1$, und man hat in die zur Bestimmung des Knotens gegebene Störungsgleichung die folgende Entwicklung einzusetzen:

$$\sin u \sin u_1 \frac{d\Omega}{ds} : \alpha m m_1 = \sin u \sin u_1 \sum_{n=0} (-\alpha)^n \sum_{i=0} E_i^{(n)} \frac{r^{2i+n+1}}{r_1^{2i+n+2}} \cdot \cos n x + \frac{1}{4} \sum_{n=1} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} E_i^{(n)} \frac{p_0^{2i+n+1}}{p_1^{2i+n+2}} \\ + \frac{1}{2} \sum_{n=3} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} E_i^{(n)} \frac{p_0^{2i+n+1}}{p_1^{2i+n+2}}$$

In der zur Bestimmung des Winkels $\mathcal{F}$ gegebenen Störungsgleichung ist die partielle Derivirte $\frac{d\Omega}{ds}$ mit $\sin \mathcal{F}$ multiplicirt, welcher Factor als eine Grösse des ersten Grades zu betrachten ist. Die erwähnte Störungsgleichung enthält nur Sinus-Glieder. Es folgt hieraus, dass in derselben beständige Glieder nicht vorhanden sind, dass es

also in dem Werthe von $\mathcal{F}$ keine der Zeit proportionalen Glieder giebt. Folglich darf man hier die sämtlichen mit $\beta = \sin^2 \frac{\mathcal{F}}{2}$ multiplicirten Glieder von $\frac{d\Omega}{ds}$ streichen, und behält die einfachere Entwicklung:

$$\frac{d\Omega}{ds} = \frac{\alpha m m_1 r}{r_1} \sum_{n=0} (-1)^n \sum_{i=0} E_i^{(n)} \frac{r^{2i+n}}{r_1^{2i+n}} \cos n x .$$

Karlsruhe im Februar 1896.

Aug. Weiler.

Ten New Variable Stars.

By Edward C. Pickering.

The following list of new variable stars includes, as described below, three whose variability was discovered or suspected elsewhere and has been confirmed at this Observatory. The successive columns give the name of the constellation, the designation in the Durchmusterung Catalogues, the approximate right ascension and declination for

1900, the number of plates examined, the magnitude when brightest and when faintest as derived from the photographic charts, and the authority for the variation, the letters H. C. O. indicating that the variation was found at this Observatory.