SULLE LEGGI PSICOFISICHE DI *FECHNER* E DI *PLATEAU*;
NOTA DEL PROF. A. STEFANINI ¹⁾.

Dalle esperienze che feci sulla misura dell'intensità del suono, e dalla discussione delle diverse leggi psicofisiche, che sono state proposte ²⁾, come dalla discussione delle esperienze che furon fatte dal Merkel per le sensazioni luminoso o per quelle di pressione ³⁾, io concludeva che, probabilmente, la legge proposta da Plateau, ed espressa da

$$E = c R^k$$

ove R è l'intensità dell'eccitazione, E l'intensità della sensazione, e c e k sono costanti, prendendo $k = \frac{1}{2}$, avrebbe potuto servire a rappresentare tutti i risultati ottenuti per le diverse sensazioni fin qui studiate.

In seguito a quei miei studi sopra detti, il Merkel completò le sue ricerche sulla psicofisica studiando le sensazioni sonore ⁴⁾; e dalla discussione delle mie e delle sue ricerche egli concluse, che di fatti la formula di Plateau è la più adatta a rappresentare tutti i risultati conosciuti; ma che non si può porre per tutte le sensazioni $k = \frac{1}{2}$, dovendo invece determinarsi caso per caso il valore più opportuno per l'esponente k ; ma egli osservava frattanto che per le sensazioni sonore si dovrebbe porre $k = 1$ e per quelle luminoso $k = \frac{1}{2}$; cioè sarebbe più specialmente per le sensazioni luminose, che varrebbe la legge di Plateau sotto la forma

$$E = c \sqrt{R}$$

da me proposta.

Da tutto ciò, richiamando anche le osservazioni che feci nel mio citato lavoro a proposito delle esperienze eseguite per

1) Dagli *Atti della R. Accad. Lucchese*, Vol. XXVI, pag. 201.

2) *Atti R. Acc. Lucc.* vol. XXV. pag. 305. *N. Cim.* 26, pag. 157, 1889.

3) J. Merkel, *Wundt's Phil. Stud.* V. p. 245, 1888.

4) J. Merkel, *Wundt's Phil. Stud.* V. p. 499, 1889.

stabilire la validità di questa o di quella legge psicofisica, si potrebbe concludere che, per tutte quante le sensazioni fin qui studiate, si dovesse affatto escludere la validità della legge logaritmica del Fechner.

Ora a proposito delle sensazioni luminose il Delboeuf ¹⁾ descrisse un'esperienza, con la quale sembrava che fosse invece dimostrata la validità della sola relazione

$$E = \log \frac{c + R}{c}$$

con $c = \frac{1}{2}$, e che non è altro che la legge logaritmica del Fechner alquanto modificata; dopo gli ultimi studi del Merkel io mi proposi perciò di applicare il metodo del Delboeuf alla verifica della legge di Plateau.

Quantunque, per la mancanza degli strumenti necessari, mi sia impossibile completare una tale ricerca, mi sembra che qualche conclusione possa trarsi anche da quanto ho potuto fin qui ottenere a questo proposito.

Il Delboeuf eseguì le sue esperienze sulle sensazioni luminose col metodo dei settori rotanti suggeritogli da Plateau. Egli cominciò col far ruotare attorno a un asse, e su un fondo perfettamente nero, tre settori concentrici *a, b, c* (fig. 1) e scelti

Fig. 1.

di larghezze tali, che l'intensità luminosa dell'anello prodotto dalla rotazione di *b* fosse intermedia fra quello degli anelli dovuti ai settori *a* e *c*. In queste esperienze l'intensità dell'eccitazione poteva evidentemente prendersi proporzionale alla larghezza del settore; l'intensità luminosa dell'anello corrispondente era giudicata dall'osservatore, il quale doveva

riconoscere se le tinte di quegli anelli erano o no perfettamente

1) Delboeuf, *Étude psychophysique*; *Mém. couronnés de l'Ac. Roy. de Belgique*, vol. XXIII, 1873.

graduate. Quando la graduazione era ottenuta, e si otteneva facendo variare opportunamente la larghezza del settore intermedio, il Delboeuf riconosceva che le larghezze dei tre settori eran prossimamente nel rapporto che si deduceva dalla legge da esso proposta.

Egli fece poi un'altra esperienza, che è quella cui ho accennato; ritagliò cioè un cartone in modo che la figura luminosa ottenuta facendolo ruotare su un fondo nero andasse degradando, in modo continuo e uniforme, dal bianco perfetto per un certo limite interno OA al nero assoluto per un altro limite esterno OD. A tale scopo egli condusse dal centro di rotazione un raggio OD (fig. 2), lo divise in parti uguali e stabili di contar su

Fig. 2.

di esso le sensazioni in modo che decrescessero uniformemente; l'eccitazione corrispondente a una qualunque di queste sensazioni, corrispondente al punto B, per esempio, sarà misurata dall'arco luminoso BC. Se a partire dal raggio stesso OD, e sempre da una stessa parte, si tracciano gli archi delle eccitazioni relative ai diversi punti di OD, le estremità di tali archi daranno una curva, che si può chiamare *curva delle eccitazioni*.

Per trovar l'equazione di tal curva, il Delboeuf osserva che nella relazione

$$(1) \quad E = \log \frac{c + R}{c}$$

la E è ora una funzione del raggio r che dal centro O va ad un punto qualunque B della OD, e che, per quanto si è convenuto, la E deve decrescere al crescere di r , e l'aumento di r come il decremento di E devono essere in progressione aritmetica, perchè si vuole che la sensazione luminosa decresca uniformemente lungo il raggio OD. Si può dunque porre:

$$E = f(r) = k' - m r,$$

Nel secondo membro della (1) bisogna sostituire ad R l'an-

golo ω che fa con OD la retta che da O va all'estremità C dell'arco di eccitazione BC. La (1) diviene dunque:

$$(2) \quad k' - mr = \log \frac{c + \omega}{c},$$

e le due costanti k' e m dipendono dai raggi OA del limite interno, e OD del limite esterno; limiti che si possono fissare a volontà.

Ora dalla (2) si ottiene:

$$\omega = ce^{k'} e^{-mr} - c,$$

che, ponendo $ce^{k'} = k$, diviene:

$$(3) \quad \omega = ke^{-mr} - c$$

Nel cartone ritagliato dal Delboeuf era

$$\omega = 360^\circ \text{ per } r = 14 \text{ mm, e}$$

$$\omega = 0^\circ \quad \gg \quad r = 154 \text{ mm.}$$

Sostituendo questi valori nella (3) e prendendo, come fece per altre considerazioni il Delboeuf, $c = \frac{1}{2}$, si trovano per le costanti i valori:

$$m = 0,47; \quad k = 695,7;$$

dunque l'equazione cercata della curva è

$$(4) \quad \omega = 695,7 e^{-0,47 r} - 0,5,$$

nella quale ω è un numero di gradi, ed r è misurato in mm.

Per stabilire la scala delle eccitazioni sarebbe stato più conveniente porre $\omega = 360^\circ$ per $r = 0$; ma il Delboeuf fu costretto a prendere $\omega = 360^\circ$ per un certo valore finito di r , per poter fissare il cartone sull'asse di rotazione; il cerchio interno di 14 mm. di raggio serviva infatti a fissare il cartone sull'asse ed era poi coperto con un pezzo di velluto nero, talchè il centro della figura luminosa era nero, e poi, a partire da $r = 14$ fino

a $r = 154$ mm. si doveva avere una degradazione continua ed uniforme d'intensità luminosa.

La forma della curva d'eccitazione così ottenuta è rappresentata dalla fig. 2.

Il Delboeuf trovò che la figura luminosa prodotta dalla rotazione di quel cartone sodisfaceva infatti alle condizioni sopra dette; e a maggior conferma della validità della relazione (1) riferisce di aver osservato, che ritagliando un altro cartone con altra curva, in modo che le eccitazioni decrescessero con continuità e proporzionalmente all'accrescimento del raggio OD, si aveva una figura luminosa che decomponevasi in due o tre zone indecise; l'interna grandissima di splendore uniforme, un'altra eccessivamente stretta verso l'orlo e oscurissima, e la terza intermedia, un po' meno stretta e che si confondeva con le altre due.

Quest'ultima esperienza sarebbe, come dice il Delboeuf, una conferma negativa della legge logaritmica del Fechner.

Volendo applicare il metodo del Delboeuf alla verificazione della legge di Plateau, ritagliai anch'io un cartone, ma secondo la curva che si ottiene applicando invece della (1) la formula:

$$E = c\sqrt{R};$$

curva, la cui equazione si ottiene facilmente come appresso.

La (2) del Delboeuf si tramuta, applicando la legge di Plateau, nell'altra:

$$(5) \quad k - mr = \sqrt{\omega}$$

nella quale, continuando a servirsi delle limitazioni poste dal Delboeuf, deve essere

$$\begin{aligned} \omega &= 360^\circ \text{ per } r = 14 \text{ mm} \\ \omega &= 0 \quad \gg \quad r = 154 \gg \end{aligned}$$

Portando questi valori successivamente nella (5), si trovano per le costanti m e k i valori

$$\begin{aligned} m &= 0,13528 \\ k &= 20,833 \end{aligned}$$

onde l'equazione cercata della curva è

$$(6) \quad \omega = (20,833 - 0,13528 r)^2,$$

Nella seguente tabella son riportati i valori degli archi ω per diversi valori di r , tanto per la curva del Delboeuf rappresentata dalla (4) quanto per quella che chiamerò di Plateau espressa dalla (5).

r in mm.	ω in gradi	
	DELBOEUF	PLATEAU
144	0,30	1,82
134	0,79	7,29
124	1,56	16,40
114	2,79	29,16
104	4,76	45,56
94	7,91	65,61
84	12,96	89,30
74	21,03	116,64
64	33,91	146,45
54	54,57	182,25
44	87,59	220,—
34	140,4	262,44
24	224,9	306,25
14	360,0	360,0

La fig. 3 rappresenta, in proporzione ridotta, la forma della curva di Plateau data dalla (6).

Ritagliati pertanto due cartoncini bianchi, uno secondo la curva del Delboeuf, l'altro secondo quella di Plateau, li adattai successivamente all'asse di una ruota, che si poteva far girare colla velocità di 25 giri al secondo. Interessando che i dischi fossero illuminati uniformemente, e si staccassero su un fondo perfettamente nero, disposi l'apparecchio nella camera oscura del Liceo, e abbassate tutte le tende, per mezzo di un portaluca L (fig. 4) facevo arrivare i raggi su uno specchio concavo S, poi da questo su un altro convesso S₁, disponendo le cose in modo che, per mezzo di opportuni diaframmi neri M, N, P, la luce riflessa da S, cadesse soltanto sul cartone C e fosse impedita di arrivare per alcun'altra maniera all'occhio dell'osservatore, posto in O lungo l'asse di rotazione.

Ripetendo le esperienze con illuminazioni d'intensità diverse, adoprando cioè ora la luce solare diretta, rinviata entro la camera oscura mediante lo specchio L, ora quella diffusa dalle nubi ricevuta direttamente dallo specchio S, ebbi modo di constatare che la figura luminosa prodotta dalla rotazione del cartoncino ritagliato secondo la curva di Plateau non la cedeva in

Fig. 3.

Fig. 4.

nulla, per uniformità di degradazione nella tinta, a quella ottenuta col cartone del Delboeuf; e anzi mi parve che fosse assai migliore di quest'ultima, la quale si oscurava troppo rapidamente a poca distanza dal centro; talchè non mi sembra che si possa accettare la conclusione del Delboeuf, che cioè ogni altra curva all'infuori di quella corrispondente alla formula da esso proposta, dia luogo a una serie di anelli distinti che si succedono con maggiore o minore continuità nella degradazione delle tinte. La figura luminosa ottenuta colla curva di Plateau non presenta affatto di tali anelli, ed è, a mio giudizio, più uniforme dell'altra.

Alle esperienze del Delboeuf eseguite con alcuni settori

soltanto fu rimproverato di non poter eliminare gli effetti perturbatori del contrasto; e questa causa perturbatrice esiste certamente anche nel caso delle curve continue sopra indicate, se bene debba avere minore influenza; ad ogni modo, agendo essa ugualmente nei due casi, mi sembra che l'esperienza eseguita possa invocarsi per concludere, che se non si può ritenere come decisiva conferma della legge di Plateau, si deve almeno riconoscere che la prima esperienza del Delboeuf non può servire a escludere la validità di ogni relazione diversa da quella del Fechner.

Per completare queste ricerche avrei voluto eseguire delle misure fotometriche sulle figure luminose ottenute con le due curve, per giudicare se l'intensità luminosa, misurata col fotometro a diverse distanze dal centro di rotazione, diminuisce o no uniformemente; ma per questo mi sarebbe prima di tutto occorso un fotometro di Glan, e poi avrei dovuto modificare alquanto le disposizioni sperimentali, per potere eseguire comodamente le misure stesse. Questa modificazione l'avrei fatta consistere nel far ruotare un cartone nero davanti a un foglio di carta velina, illuminato direttamente dalla luce diffusa, ritagliando il cartone nero in modo che colla sua rotazione si potesse ottenere lo stesso effetto che si ha dalla rotazione del cartone bianco di Delboeuf o di Plateau sul fondo nero; ma non potendo contare sull'uso del fotometro di Glan, desistetti dal fare altre ricerche in questa direzione.

Mi era venuto anche in mente di fissare con la fotografia l'aspetto delle figure luminose ottenute coi due cartoni, per poter poi anche più comodamente eseguire sulle negative le misure fotometriche anzi dette, quando avessi avuto possibilità di servirmi del fotometro Glan; ma non mi fermai molto su questo proposito, perchè mi pareva che non potesse aversi la certezza che le misure fatte sulle fotografie dovessero corrispondere a quelle eseguite direttamente; perchè altra poteva essere l'azione chimica, altra quella fisiologica della luce. Tuttavia, dopo conosciuti i recenti lavori del Wiener ¹⁾ e dell'Acworth ²⁾ sull'azione

1) O. Wiener. *Wied. Ann.* 40, p. 203, 1890.

2) Acworth. *Wied. Ann.* 42, p. 371, 1891.

chimica della luce, mi decisi a far quelle fotografie, se non altro per riconoscere quale differenza vi fosse stata fra le apparenze delle figure luminose fissate colla fotografia, e di quelle osservate direttamente. Le due fotografie che presento all'onorevole Accademia, sono le stampe ottenute dalle negative che nel luglio p. p. furon prese, con un'eccellente macchina fotografica, dal distinto fotografo sig. De Giuli ¹⁾.

I cartoncini rotanti eran disposti come dianzi ho indicato, ed erano illuminati dai raggi solari rinviati sui cartoni stessi per mezzo degli specchi L, S, S₁. La durata dell'esposizione fu di due minuti primi per ciascuna, e fu presa ogni precauzione perchè per tutto quel tempo la velocità di rotazione restasse costante e perchè fosse la stessa (22 giri al secondo) nei due casi.

L'aspetto delle fotografie così ottenute è in tutto simile a quello che si osserva direttamente durante la rotazione dei rispettivi cartoncini; ed anche dall'esame di queste si può concludere, che la degradazione nell'intensità luminosa è più uniforme nella figura ottenuta colla curva di Plateau, che con quella del Delboeuf.

Lucca, Novembre 1891.

1) La regione centrale nelle fotografie ottenute non è uniformemente nera, nè circolare, a motivo dell'ombra portata dal disco metallico, coperto di foglio nero, che serviva a fissare il cartone sull'asse, e dovuta all'incidenza quasi radente della luce.

A questa Nota dovevano essere unite le riproduzioni di queste figure in fototipia; ma ciò non è ora possibile, essendosi rotta una delle negative durante le operazioni necessarie a quella riproduzione.