SULL'APPLICAZIONE DELLA FUNZIONE ELLITTICA pu
ALLA TEORIA DEI POLIGONI DI PONCELET;

Nota di G. Vivanti, in Pavia.

Adunanza del 12 marzo 1893.

1. È noto che Jacobi ebbe pel primo l'idea di applicare le funzioni ellittiche alla teoria dei poligoni iscritti e circoscritti ad una conica. Dopo di lui, Cayley riprese, da un punto di vista analogo, lo studio di quella teoria; e, prima ancora che Weierstrass introducesse nella scienza la nuova funzione ellittica pu , fu condotto ad espressioni differenziali contenenti la radice quadrata d'un polinomio di 3° ordine, espressioni che egli considerò come i differenziali di una speciale trascendente da lui designata con II. Più tardi Simon e Halphen (*) intrapresero l'applicazione della funzione pu ai problemi di chiusura; ma il primo con speciale riguardo alla moltiplicazione delle funzioni ellittiche, il secondo da un punto di vista alquanto elevato ed in correlazione con altre teorie. Ci parve

(*) Simon, *Ganzzahlige Multiplication der elliptischen Functionen in Verbindung mit dem Schliessungsproblem* (Crelle's J., t. 81, p. 301-323); Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, t. II, cap. 10. — Per la bibliografia completa dell'argomento veggasi l'importante discorso del prof. Loria: *I poligoni di Poncelet* (Torino, 1889) come pure la sua *Rassegna di alcuni scritti sui poligoni di Poncelet* (Bibl. Math., t. III, 1889, p. 67-74).

quindi non inutile mostrare come, facendo uso della funzione pu e seguendo del resto in gran parte le tracce di Cayley (*), si giunga in modo semplicissimo ai risultati ottenuti da Jacobi, e come in modo altrettanto semplice possano trattarsi quei casi particolari a cui corrisponde una degenerazione delle funzioni ellittiche.

Ci occorre però mettere preventivamente sotto forma opportuna la formola d'addizione della funzione pu e quelle delle funzioni a cui essa si riduce nei casi di degenerazione.

2. Nelle *Formeln und Lehrsätze* di Schwarz (Art. 38, form. A, 5) troviamo la formola seguente:

$$(e_\mu - e_\nu) \sigma_\lambda a \sigma_\lambda b \sigma_\lambda c \sigma_\lambda d + (e_\nu - e_\lambda) \sigma_\mu a' \sigma_\mu b' \sigma_\mu c' \sigma_\mu d' \\ + (e_\lambda - e_\mu) \sigma_\nu a'' \sigma_\nu b'' \sigma_\nu c'' \sigma_\nu d'' = 0,$$

dove λ, μ, ν è una permutazione qualunque di 1, 2, 3, le a, b, c, d sono arbitrarie, e le a', b' , etc., sono legate a queste dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} 2a' &= a + b + c + d, & 2a'' &= a + b + c - d, \\ 2b' &= a + b - c - d, & 2b'' &= a + b - c + d, \\ 2c' &= a - b + c - d, & 2c'' &= a - b + c + d, \\ 2d' &= -a + b + c - d, & 2d'' &= a - b - c - d. \end{aligned}$$

Poniamo dapprima $a = u, b = v, c = u + v = w, d = 0$, indi $a = u, b = v, c = u - v = w, d = 0$; otteniamo nei due casi rispettivamente:

$$\begin{aligned} a' &= a'' = w, & b' &= b'' = 0, & c' &= c'' = u, & d' &= -d'' = v; \\ a' &= a'' = u, & b' &= b'' = v, & c' &= c'' = w, & d' &= d'' = 0. \end{aligned}$$

(*) V. specialmente la sua Memoria: *On the porism of the in-and-circumscribed polygon* (Philos. Trans., t. 151, 1861, p. 225-239; Opere complete, t. IV, p. 292-308).

In ambi i casi la formola diviene, ricordando che $\sigma_1 0 = \sigma_2 0 = \sigma_3 0 = 1$:

$$(e_2 - e_3)\sigma_1 u \cdot \sigma_1 v \cdot \sigma_1 w + (e_3 - e_1)\sigma_2 u \cdot \sigma_2 v \cdot \sigma_2 w + (e_1 - e_2)\sigma_3 u \cdot \sigma_3 v \cdot \sigma_3 w = 0.$$

Ma si ha (Schwarz, op. cit., Art. 21):

$$\frac{\sigma_1 u}{\sigma u} = \sqrt{pu - e_1}, \quad \frac{\sigma_2 u}{\sigma u} = \sqrt{pu - e_2}, \quad \frac{\sigma_3 u}{\sigma u} = \sqrt{pu - e_3},$$

quindi la formola ottenuta si riduce alla seguente:

$$\begin{aligned} & (e_2 - e_3) \sqrt{(pu - e_1)(pv - e_1)(pw - e_1)} \\ & + (e_3 - e_1) \sqrt{(pu - e_2)(pv - e_2)(pw - e_2)} \\ & + (e_1 - e_2) \sqrt{(pu - e_3)(pv - e_3)(pw - e_3)} = 0, \end{aligned}$$

che è una relazione algebrica tra pu , pv e $p(u+v)$. Ponendo $pu = \xi$, $pv = \eta$, $pw = \zeta$, si ha:

$$\begin{aligned} (1) \quad & (e_2 - e_3) \sqrt{(\xi - e_1)(\eta - e_1)(\zeta - e_1)} + (e_3 - e_1) \sqrt{(\xi - e_2)(\eta - e_2)(\zeta - e_2)} \\ & + (e_1 - e_2) \sqrt{(\xi - e_3)(\eta - e_3)(\zeta - e_3)} = 0. \end{aligned}$$

3. Quando uno dei periodi diviene infinito, la pu si riduce (trascurando certe costanti di cui non c'importa) ad $\frac{1}{\sin^2 u}$. Ora si ha:

$$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v,$$

quindi, posto $u \pm v = w$:

$$(\cos w - \cos u \cos v)^2 = \sin^2 u \sin^2 v,$$

ossia:

$$0 = \sin^2 u \sin^2 v - \cos^2 u \cos^2 v + 2 \cos u \cos v \cos w$$

$$- \cos^2 w = 2 \cos u \cos v \cos w + \sin^2 u + \sin^2 v + \sin^2 w - 2,$$

Ponendo $\frac{1}{\sin^2 u} = \xi$, $\frac{1}{\sin^2 v} = \eta$, $\frac{1}{\sin^2 w} = \zeta$, la formola ottenuta diviene :

$$(2) \quad 2 \sqrt{\frac{(\xi-1)(\eta-1)(\zeta-1)}{\xi\eta\zeta}} + \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\eta} + \frac{1}{\zeta} - 2 = 0.$$

4. Infine quando ambi i periodi sono infiniti pu si riduce ad $\frac{1}{u^2}$.

Ora abbiamo, posto $w = u \pm v$:

$$(w - u)^2 = v^2,$$

ossia :

$$w^2 + u^2 - v^2 = 2wu,$$

e quadrando e riducendo :

$$u^4 + v^4 + w^4 - 2u^2v^2 - 2u^2w^2 - 2v^2w^2 = 0.$$

Posto $\frac{1}{u^2} = \xi$, $\frac{1}{v^2} = \eta$, $\frac{1}{w^2} = \zeta$, questa formola diviene :

$$(3) \quad \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\eta^2} + \frac{1}{\zeta^2} - 2 \left(\frac{1}{\xi\eta} + \frac{1}{\xi\zeta} + \frac{1}{\eta\zeta} \right) = 0.$$

5. Data una conica ed un punto interno ad essa, è noto che si può trasformarla proiettivamente in una circonferenza in modo che a quel punto corrisponda il centro di questa.

Se si ha un quadrangolo $MNPQ$ iscritto nella conica, e se A è il vertice del triangolo diagonale che si trova nell'interno della conica stessa, trasformando questa in una circonferenza di raggio 1 per modo che al punto A corrisponda il centro A' , i punti M' , N' , P' , Q' corrispondenti rispettivamente ad M , N , P , Q si troveranno alle estremità di due diametri. Se quindi si prendono come assi coordinati le bisettrici degli angoli formati dai due diametri, le coordinate dei 4 punti M' , N' , P' , Q' saranno $\pm X'$, $\pm Y'$, essendo $X'^2 + Y'^2 = 1$. Applicando ora alla circonferenza la trasformazione

immaginaria $x'' = \frac{iy'}{x'}$, $y'' = \frac{1}{x'}$, che la lascia invariata, i 4 punti considerati si trasformeranno in 4 punti imaginari di coordinate $\pm X'' = \pm i \frac{Y'}{X'}$, $\pm Y'' = \pm \frac{1}{X'}$ (*).

Poniamo $X'' = ir$, $Y'' = s$, dove le r , s sono quantità reali e positive legate dalla relazione $s^2 - r^2 = 1$. Pei quattro punti imaginari considerati passano infinite coniche avanti per assi gli assi coordinati; le loro equazioni hanno la forma:

$$e_1 x^2 + e_2 y^2 = e_3,$$

dove le e_1 , e_2 , e_3 sono legate dalla relazione:

$$-e_1 r^2 + e_2 s^2 = e_3.$$

Di qui si ha:

$$r^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_2}, \quad s^2 = \frac{e_1 - e_3}{e_1 - e_2},$$

e quindi o $e_1 > e_2 > e_3$, o $e_1 < e_2 < e_3$. Noi considereremo particolarmente quella fra le coniche per cui $e_1 > e_2 > e_3$ ed inoltre $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, e ne indicheremo l'equazione colla notazione abbreviata $V = 0$. Le due curve:

$$U \equiv x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

$$V \equiv e_1 x^2 + e_2 y^2 - e_3 = 0,$$

(*) Allo stesso risultato si giunge più direttamente se i punti M , N , P , Q sono tutti imaginari a due a due coniugati. Infatti anche in questo caso il triangolo diagonale è reale, e perciò può effettuarsi allo stesso modo di prima la trasformazione della conica in una circonferenza. Le coordinate dei punti M' , N' , P' , Q' saranno ancora $\pm X'$, $\pm Y'$; ma poichè questi punti devono essere due a due coniugati, una delle due coordinate, p. es. Y' , dovrà essere reale, e l'altra X' puramente imaginaria.

Nel caso in cui due soli dei 4 punti M , N , P , Q sono reali, il metodo che noi vogliamo sviluppare non è più applicabile. Però mediante considerazioni ben note può stabilirsi la generalità dei risultati a cui giungeremo.

determinano un fascio di coniche:

$$(4) \quad \lambda U - V = 0,$$

i cui punti di base sono i 4 punti $(\pm ir, \pm s)$; i parametri delle curve U, V sono rispettivamente ∞ e 0.

6. Se $AX + BY = 1$ è una retta qualunque, esistono nel fascio (4) due coniche:

$$(5) \quad \xi U - V \equiv (\xi - e_1)x^2 + (\xi - e_2)y^2 - (\xi - e_3) = 0,$$

$$\eta U - V \equiv (\eta - e_1)x^2 + (\eta - e_2)y^2 - (\eta - e_3) = 0$$

ad essa tangenti. La tangente alla conica (5) nel punto (x, y) ha l'equazione:

$$(\xi - e_1)xX + (\xi - e_2)yY - (\xi - e_3) = 0;$$

perchè essa coincida colla retta considerata, dev'essere:

$$A = \frac{(\xi - e_1)x}{\xi - e_3}, \quad B = \frac{(\xi - e_2)y}{\xi - e_3}.$$

Di qui e dalla (5) si ottiene:

$$(6) \quad \frac{A^2}{\xi - e_1} + \frac{B^2}{\xi - e_2} = \frac{1}{\xi - e_3};$$

e analogamente:

$$\frac{A^2}{\eta - e_1} + \frac{B^2}{\eta - e_2} = \frac{1}{\eta - e_3}.$$

Risolvendo si ricava:

$$(7) \quad A^2 = \frac{(\xi - e_1)(\eta - e_1)}{(\xi - e_3)(\eta - e_3)} \cdot \frac{e_2 - e_3}{e_2 - e_1}, \quad B^2 = \frac{(\xi - e_2)(\eta - e_2)}{(\xi - e_3)(\eta - e_3)} \cdot \frac{e_1 - e_3}{e_1 - e_2}$$

Se in luogo di una retta qualunque si prende in particolare la

retta $\alpha X + \beta Y = 1$, dove $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, ossia la tangente al cerchio U nel punto (α, β) , e si indica con ζ il parametro dell'altra conica del fascio tangente a quella retta, si otterranno le espressioni di α^2, β^2 ponendo nelle (7) $\xi = \infty, \eta = \zeta$; si avrà cioè:

$$(8) \quad \alpha^2 = \frac{\zeta - e_1}{\zeta - e_3} \frac{e_2 - e_3}{e_2 - e_1}, \quad \beta^2 = \frac{\zeta - e_2}{\zeta - e_3} \frac{e_1 - e_3}{e_1 - e_2}.$$

Infine, se la retta $AX + BY = 1$ passa pel punto (α, β) , sarà $A\alpha + B\beta = 1$, cioè:

$$\begin{aligned} & \pm \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_2} \sqrt{\frac{(\zeta - e_1)(\eta - e_1)(\zeta - e_1)}{(\xi - e_3)(\eta - e_3)(\zeta - e_3)}} \\ & \pm \frac{e_3 - e_1}{e_1 - e_2} \sqrt{\frac{(\xi - e_2)(\eta - e_2)(\zeta - e_2)}{(\xi - e_3)(\eta - e_3)(\zeta - e_3)}} - 1 = 0. \end{aligned}$$

Per determinare i segni consideriamo il caso limite $\xi = \infty, \eta = \zeta$. La formola si riduce a:

$$\varepsilon_1 \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_2} \frac{\zeta - e_1}{\zeta - e_3} + \varepsilon_2 \frac{e_3 - e_1}{e_1 - e_2} \frac{\zeta - e_2}{\zeta - e_3} - 1 = 0,$$

dove $\varepsilon_1 = \pm 1, \varepsilon_2 = \pm 1$. Dev'essere quindi:

$$\varepsilon_1(e_2 - e_3) + \varepsilon_2(e_3 - e_1) = e_1 - e_2, \quad \varepsilon_1 e_1(e_2 - e_3) + \varepsilon_2 e_2(e_3 - e_1) = e_3(e_1 - e_2),$$

donde si ricava $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$. La formola precedente può dunque scriversi così:

$$(9) \quad (e_2 - e_3) \sqrt{(\xi - e_1)(\eta - e_1)(\zeta - e_1)} + (e_3 - e_1) \sqrt{(\xi - e_2)(\eta - e_2)(\zeta - e_2)} \\ + (e_1 - e_2) \sqrt{(\xi - e_3)(\eta - e_3)(\zeta - e_3)} = 0,$$

dove s'intende che $\sqrt{H}$ denoti in generale $+\sqrt{H}$ e $+i\sqrt{-H}$ secondochè H è positivo o negativo (*).

7. Il confronto della (9) colla (1) fa vedere che, se si pone $\xi = pu, \eta = pv$, si ha $\zeta = p(u \pm v)$. Chiamiamo *argomento* d'una

(*) Può dimostrarsi che le quantità sotto i radicali della (9) sono tutte negative.

conica $\xi U - V$ il valore di u per cui $\xi = pu$, e diciamo per brevità argomento d'un punto della circonferenza U quello della conica del fascio che tocca la tangente in quel punto alla circonferenza. Allora il risultato a cui siamo giunti può enunciarsi dicendo, che:

Se u, v sono gli argomenti delle coniche tangenti ad una corda, $u + v$ ed $u - v$ sono quelli degli estremi della corda stessa. Od anche:

Se u_1, u_2 sono gli argomenti di due punti della circonferenza U , $\frac{u_1 + u_2}{2}$ ed $\frac{u_2 - u_1}{2}$ sono quelli delle coniche tangenti alla congiungente di quei due punti.

8. Dalla prima delle (8) si ha, posto $\alpha = \sin \varphi$:

$$\zeta = \frac{e_3(e_1 - e_2) \sin^2 \varphi + e_1(e_2 - e_3)}{(e_1 - e_2) \sin^2 \varphi + (e_2 - e_3)}.$$

Quest'espressione prende il valore massimo e_1 per $\varphi = 0$ e per $\varphi = \pi$, ed il valore minimo e_2 per $\varphi = \frac{\pi}{2}$ e per $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. Posto $\zeta = pu$, u prenderà sempre valori della forma $\omega + iv$, dove v è reale (*), e noi potremo indifferentemente concepire iv come oscillante tra 0 ad ω' , oppure come crescente continuamente in modo da percorrere l'intervallo da 0 a $4\omega'$ mentre φ percorre l'intera circonferenza. Noi ci atterremo a questo secondo concetto. È chiaro allora che u prende valori congruenti soltanto in punti diametralmente opposti. Inoltre, se u_1, u_2 sono gli argomenti di due punti della circonferenza, degli argomenti delle due coniche tangenti alla retta che congiunge quei due punti il primo $\frac{u_1 + u_2}{2}$ avrà la forma $\omega + iv$, il secondo $\frac{u_2 - u_1}{2}$ avrà la forma iv . Le coniche tangenti alle corde della circonferenza U possono quindi dividersi in due fa-

(*) È noto che $p(u + iv)$ è reale soltanto quando una delle u, v è eguale ad un semiperiodo o ad un periodo.

miglie; quelle della prima famiglia hanno argomenti della forma $\omega + iv$, quelli della seconda hanno argomenti puramente imaginari.

9. Dopo ciò consideriamo 3 punti P_1, P_2, P_3 della circonferenza U , e sieno u_1, u_2, u_3 i loro argomenti. Perchè la conica della prima famiglia tangente a $P_1 P_2$ coincida con quella tangente a $P_2 P_3$, dev'essere $\frac{u_1 + u_2}{2} \equiv \frac{u_2 + u_3}{2}$, quindi o $u_1 = u_3$ o $u_1 = u_3 + 4n\omega'$.

In ambi i casi P_3 coincide con P_1 .

Se quindi una delle coniche tangenti a $P_1 P_2$ coincide con una di quelle tangenti a $P_2 P_3$, e P_3 è diverso da P_1 , ciò non può aver luogo se non per le coniche della seconda famiglia. Si ha allora, indicando con w l'argomento della conica:

$$w \equiv \frac{u_2 - u_1}{2}, \quad w \equiv \frac{u_3 - u_2}{2}.$$

Se la conica tocca pure le corde $P_3 P_4, P_4 P_5, \dots, P_{n-1} P_n$, si ha:

$$w \equiv \frac{u_4 - u_3}{2} \equiv \frac{u_5 - u_4}{2} \equiv \dots \equiv \frac{u_n - u_{n-1}}{2},$$

e infine perchè essa tocchi anche la corda di chiusura $P_n P_1$, dev'essere:

$$w \equiv \frac{u_1 - u_n}{2}.$$

Ne segue $nw \equiv 0$; cioè l'argomento della conica dev'essere l'ennesima parte d'un periodo. E poichè in questa condizione non figura u_1 , si ha immediatamente il teorema di Poncelet, può asserirsi cioè che, se esiste un poligono di n lati iscritto nella circonferenza U e circoscritto alla conica considerata, ne esistono infiniti.

10. Veniamo ora al primo caso di degenerazione, quello cioè in cui due punti di base M, N del fascio di coniche coincidono in uno solo. Allora, se P e Q sono reali, e se C è il polo della retta PQ , trasformiamo la conica data nella circonferenza di raggio 1 per

modo che al punto A d'intersezione delle CM , PQ corrisponda il centro A' della circonferenza. Per tale trasformazione i punti P' , Q' si troveranno agli estremi di un diametro, che prenderemo come asse x , e il punto M' all'estremità di un raggio normale a questo diametro.—Se invece P e Q sono imaginari coniugati, trasformando la conica in modo che a PQ corrisponda la retta all'infinito, P' e Q' saranno i 2 punti ciclici; preso poi il raggio che va ad M' come asse y , ed applicando la trasformazione $x' = \frac{ix}{y}$, $y' = \frac{1}{y}$, i punti ciclici si trasformeranno negli estremi del diametro posto sull'asse x . In ambi i casi adunque noi possiamo prendere come punti base del fascio il punto $(0, 1)$ contato due volte e i punti $(1, 0)$, $(-1, 0)$. Come conica V assumeremo l'insieme delle due rette che congiungono il primo di questi punti cogli altri due. La sua equazione è:

$$V \equiv x^2 - (y - 1)^2 = 0.$$

Se la conica :

$$(10) \quad \xi U - V \equiv (\xi - 1)x^2 + (\xi + 1)y^2 - 2y - (\xi - 1) = 0$$

è tangente alla retta $AX + BY = 1$, dovrà essere :

$$\frac{A}{x(\xi - 1)} = \frac{B}{y(\xi + 1) - 1} = \frac{1}{y + \xi - 1},$$

donde si ricava, ponendo $\Delta = \xi - (B - 1)$:

$$x(\xi - 1) = \frac{A\xi^2}{\Delta}, \quad y = \frac{B\xi - (B - 1)}{\Delta},$$

e quindi :

$$y(\xi + 1) - 1 = \frac{B\xi^2}{\Delta}, \quad y + \xi - 1 = \frac{\xi^2}{\Delta}.$$

La (10) può scriversi così :

$$(\xi - 1)x^2 + [y(\xi + 1) - 1]y - (y + \xi - 1) = 0;$$

introducendovi i valori trovati si ottiene :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\Delta^2} \left[\frac{A^2 \xi^2}{\xi - 1} + B \xi^2 [B \xi - (B - 1)] - \Delta \xi^2 \right] \\ &= \frac{1}{\Delta^2} \left[\frac{A^2 \xi^2}{\xi - 1} + \xi^2 [(B^2 - 1) \xi - (B - 1)^2] \right], \end{aligned}$$

ossia :

$$\frac{\xi^2}{\xi - 1} \frac{A^2}{B - 1} + B(\xi - 1) = -(\xi + 1).$$

Se η è il parametro della seconda conica tangente alla retta considerata, si ha analogamente :

$$\frac{\eta^2}{\eta - 1} \frac{A^2}{B - 1} + B(\eta - 1) = -(\eta + 1),$$

e risolvendo il sistema formato dalle due equazioni :

$$\frac{A^2}{B - 1} = \frac{2(\xi - 1)(\eta - 1)}{\xi + \eta - 2\xi\eta}, \quad B = \frac{\xi + \eta}{\xi + \eta - 2\xi\eta},$$

quindi :

$$A = \frac{2\sqrt{\xi\eta(\xi - 1)(\eta - 1)}}{\xi + \eta - 2\xi\eta}$$

Anche in questo caso le α , β si ottengono dalle A , B ponendo $\xi = \infty$, $\eta = \zeta$; si ha così :

$$\alpha = \frac{2\sqrt{\zeta(\zeta - 1)}}{1 - 2\zeta}, \quad \beta = \frac{1}{1 - 2\zeta},$$

e introducendo le espressioni trovate nella $A\alpha + B\beta = 1$:

$$\pm 4\sqrt{\xi\eta\zeta(\xi - 1)(\eta - 1)(\zeta - 1)} + (\xi + \eta) = (1 - 2\zeta)(\xi + \eta - 2\xi\eta).$$

Considerando il caso limite $\xi = \infty$, $\eta = \zeta$, si vede che la radice deve prendersi col segno più. Dopo ciò la formola trovata può scriversi :

$$\frac{2\sqrt{(\xi - 1)(\eta - 1)(\zeta - 1)}}{\xi\eta\zeta} + \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\eta} + \frac{1}{\zeta} - 2 = 0.$$

Il confronto colla (2) mostra che ponendo :

$$\xi = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 u}, \quad \eta = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 v}$$

si ha :

$$\zeta = \frac{1}{\operatorname{sen}^2(u \pm v)}.$$

Omettiamo le considerazioni che possono dedursi da questi risultati, e che sono analoghe a quelle esposte nel caso generale.

11. Finalmente quando tre dei punti M, N, P, Q , per esempio i tre primi, coincidono, possiamo trasformare la conica nella circonferenza in modo che alla retta MQ corrisponda un diametro $M'Q'$ che prenderemo come asse y . Quale conica V assumeremo la coppia di rette costituita dalla $M'Q'$ e dalla tangente alla circonferenza U nel punto M' ; la sua equazione è :

$$V \equiv 2x(y - 1) = 0.$$

Se la conica :

$$(11) \quad \xi U - V \equiv \xi x^2 + \xi y^2 - 2xy + 2x - \xi = 0$$

tocca la retta $AX + BY = 1$, deve essere :

$$\frac{A}{\xi x - y + 1} = \frac{B}{\xi y - x} = \frac{1}{\xi - x},$$

da cui, ponendo $\Delta = \xi^2 + A\xi + (B - 1)$:

$$x = \frac{A\xi^2 + (B - 1)\xi}{\Delta}, \quad y = \frac{B\xi^2 + A\xi + (B - 1)}{\Delta},$$

e quindi :

$$\xi x - y + 1 = \frac{A\xi^3}{\Delta}, \quad \xi y - x = \frac{B\xi^3}{\Delta}, \quad \xi - x = \frac{\xi^3}{\Delta}.$$

La (11) può scriversi :

$$x(\xi x - y + 1) + y(\xi y - x) - (\xi - x) = 0;$$

essa diviene, in virtù delle espressioni trovate :

$$\frac{\xi^3}{\Delta^2} \{ A[A\xi^2 + (B-1)\xi] + B[B\xi^2 + A\xi + (B-1)] - [\xi^2 + A\xi + (B-1)] \},$$

ossia :

$$\left(\frac{A^2}{B-1} + B + 1 \right) \xi^2 + 2A\xi + (B-1) = 0.$$

Analogamente, se η è la seconda conica tangente alla stessa retta :

$$\left(\frac{A^2}{B-1} + B + 1 \right) \eta^2 + 2A\eta + (B-1) = 0.$$

Moltiplicando le due equazioni per η^2 , ξ^2 oppure per η , ξ , sottraendo e dividendo per $\xi - \eta$, si ottiene nei due casi :

$$-2A\xi\eta - (B-1)(\xi + \eta) = 0, \quad \left(\frac{A^2}{B-1} + B + 1 \right) \xi\eta - (B-1) = 0.$$

Dalla prima si ha :

$$A = -(B-1) \frac{\xi + \eta}{2\xi\eta};$$

dopo ciò la seconda diviene :

$$(B-1) \left(\frac{(\xi + \eta)^2}{4\xi\eta} - 1 \right) + (B+1)\xi\eta = 0.$$

Se ne ricava :

$$B = \frac{(\xi - \eta)^2 - 4\xi^2\eta^2}{(\xi - \eta)^2 + 4\xi^2\eta^2},$$

e quindi :

$$A = \frac{4\xi\eta(\xi + \eta)}{(\xi - \eta)^2 + 4\xi^2\eta^2}.$$

Dalle A , B si ottengono nel modo solito le α , β , cioè :

$$\alpha = \frac{4\xi}{1 + 4\xi^2}, \quad \beta = \frac{1 - 4\xi^2}{1 + 4\xi^2}.$$

Infine introducendo le espressioni trovate nella $A\alpha + B\beta = 1$, si ha :

$$16\xi\eta\zeta(\xi + \eta) + (1 - 4\zeta^2)[(\xi - \eta)^2 - 4\xi^2\eta^2] \\ - (1 + 4\zeta^2)[(\xi - \eta)^2 + 4\xi^2\eta^2] = 0,$$

ossia sviluppando, riducendo e dividendo per $-8\xi^2\eta^2\zeta^2$:

$$\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\eta^2} + \frac{1}{\zeta^2} - 2\left(\frac{1}{\xi\eta} + \frac{1}{\xi\zeta} + \frac{1}{\eta\zeta}\right) = 0.$$

Dal confronto colla (3) risulta che, posto $\xi = \frac{1}{u^2}$, $\eta = \frac{1}{v^2}$,

si ha $\zeta = \frac{1}{(u \pm v)^2}$.

Nel caso ora considerato non esistono poligoni di Poncelet.

Pavia, 3 marzo 1893.

G. VIVANTI.