# 20.

# Über eine neue mechanische Erzeugung der Flächen zweiter Ordnung und Classe.

(Von dem Herrn Professor Dr. *Plücker* zu Bonn.)

---

1. **N**eben die bekannte *Monge*sche Erzeugung eines einschaligen Hyperboloïds durch die Bewegung einer geraden Linie, die in allen ihren Lagen drei gegebene gerade Linien schneidet, habe ich in meinem Systeme der Geometrie des Raums folgende zweite, gleich einfache Erzeugung der Fläche gestellt *).

***Wenn in einer Ebene zwei gerade Linien und ein Punct, durch welchen nach allen Richtungen gerade Linien gehen, gegeben sind, so können die beiden gegebenen geraden Linien in irgend eine andere gegenseitige Lage gebracht werden, ohne dafs auf ihnen die Puncte, in welchen sie von den übrigen geraden Linien geschnitten werden, eine andere Lage annähmen: alsdann verwandelt sich, wenn die beiden gegebenen geraden Linien nicht mehr in derselben Ebene liegen, diese Ebene im Allgemeinen in ein einschaliges Hyperboloïd, und jene beiden geraden Linien gehören der einen, die übrigen der andern Erzeugung dieser Fläche an.***

Die Erzeugung der Fläche läfst sich auch leicht auf mechanischem Wege zur Anschauung bringen. Man nehme zu diesem Ende zwei dünne Stäbe $AZ$ und $A'Z'$ (Taf. III. Fig. 2.), befestige in möglichst vielen beliebigen Puncten $L, M, N, O, P, Q, \ldots$ des ersten Stabes die Fäden $LL', MM', NN', OO', PP', QQ', \ldots$ und führe dieselben durch Durchbohrungen des zweiten Stabes, welche in den Puncten $M', N', O', P', Q', \ldots$ so angebracht sind, dafs alle Fäden, wenn sie durch Gewichte gespannt werden, in demselben Puncte $\Omega$ sich schneiden. Ändert man alsdann die Lage des zweiten Stabes gegen den ersten durch beliebige Verschiebung und Drehung desselben im Raume, so bilden die Fäden, nach der Lagen-Änderung, im Allgemeinen ein einschaliges Hyperboloïd. Die beiden Stäbe vertreten zwei Linien von der einen Erzeu-

---

*) Vergl. den 5ten Paragraphen der Discussion der Flächen zweiter Ordnung und Classe. *Discussion der Gleichungsform*

$$tu = \mu v w$$

*in der zwiefachen Coordinaten-Bestimmung.* S. 99—134.

gung, die Fäden die Linien von der andern, und jede gerade Linie, welche drei Fäden schneidet, schneidet alle, und ist eine neue Linie von der ersten Erzeugung. Jeder neuen Lagen-Änderung entspricht ein neues Hyperboloïd; welches auch in ein Paraboloïd übergehen kann. Bleiben die beiden Stäbe (Fig. 2. und 3.) nach der Lagen-Änderung in derselben Ebene, so umhüllen die Fäden im Allgemeinen einen Kegelschnitt, der überdies von den beiden Stäben berührt wird. Man kann auch umgekehrt, von einem gegebenen Hyperboloïde ausgehend, irgend zwei Linien von der einen Erzeugung für die beiden Stäbe, und die Linien von der andern Erzeugung für die Fäden nehmen. Durch continuirliche Bewegung des einen Stabes gegen den andern gestaltet sich das gegebene Hyperboloïd continuirlich in andere Hyperboloïde um, die zuletzt, wenn die beiden Stäbe in dieselbe Ebene gelangen, in einen Kegelschnitt übergehen und die, wenn insbesondere zwei sich entsprechende Puncte $N$ und $N'$ der beiden Stäbe in einen Punct zusammenfallen, in das System dieses und eines zweiten Punctes $\Omega$ ausarten.

2. Das in dem Vorstehenden betrachtete einschalige Hyperboloïd stellt sich als Fläche zweiter ***Classe*** dar und kann daher auch in einen ***Kegelschnitt*** und in ein System von ***zwei Puncten*** ausarten. Die besprochene Erzeugung ist aber nicht mehr auf Kegelflächen anwendbar. Neben dieser Erzeugung *mufs* das Princip der Reciprocität eine zweite liefern, bei welcher das einschalige Hyperboloïd als Fläche zweiter Ordnung sich darstellt, und kann daher auch in eine ***Kegelfläche*** und ein System von ***zwei Ebenen*** ausarten. Diese zweite Erzeugung verliert ihre Anwendbarkeit bei Kegelschnitten. Während die geraden Linien, welche das Hyperboloïd bilden, in dem Vorstehenden durch zwei Puncte, die sie verbinden, bestimmt werden, stellen sie sich in dem Nachstehenden als die Durchschnitts-Linie zweier Ebenen dar:

***Wenn zwei gerade Linien A und A′ gegeben sind, welche durch einen gegebenen Punct C gehen, so lassen sich durch diese beiden geraden Linien unendlich viele Systeme zweier Ebenen legen, deren Durchschnitts-Linie F in eine durch den Punct C gehende gegebene Ebene B fällt, und auch selbst durch C geht. Bringt man die beiden Linien A und A′ in irgend eine andere gegenseitige Lage, während die durch jede derselben gehenden und mit ihr als fest verbunden betrachteten Ebenen sich gleichzeitig mit fortbewegen, so verwandelt sich der geometrische Ort für die Linie F, der ursprünglich die Ebene B war, in eine geradlinige Fläche von der zweiten Ordnung. Während die Linie F in ihren ver-***

***schiedenen Lagen der einen Erzeugung angehört, gehören die Linien A und A', in ihrer neuen Lage, der andern Erzeugung an.***

3. Die ***Monge***sche Erzeugung der Fläche verdoppelt sich nicht durch das Princip der Reciprocität. Dieses Princip führt nur auf die ursprüngliche Construction wieder zurück; denn es ist in geometrischer Beziehung offenbar gleichbedeutend, eine gerade Linie den Bedingungen zu unterwerfen, dafs sie einmal jede von drei gegebenen geraden Linien schneidet, das anderemal mit jeder von drei gegebenen geraden Linien in derselben Ebene liegt. Indem wir hiernach das nach ***Monge*** erzeugte einschalige Hyperboloïd in gleicher Art als Fläche zweiter ***Ordnung*** und Fläche zweiter ***Classe*** betrachten müssen, erkennen wir von vornherein als nothwendige Folge, dafs die fragliche Erzeugung sich weder auf Kegelflächen, noch auf Kegelschnitte übertragen lassen könne.