connoit si intimement les merveilles du ciel austral, veut bien jeter les yeux sur mon ouvrage. Je n'affirmerai pas positivement que le Canopo toscano de Vespuce (ein Canopus schwarz und wunderbarlich grofs, dit l'ancienne traduction allemande) est un des sacs de charbon, mais je Vous rappellerai un passage peu connu de *Pierre Martyr d'Anghiera* (*Oceanica* Dec. I. lib. IX. ed. Colon. 1574 p. 96.) „Interrogati a me nautæ qui *Vicentium Agnem Pinzonum* fuerant comitati an antarcticum viderint polum: stellam se nul- lam huic arcticae similem quae discerni circa punctum (polum?) possit, cognovisse inquirunt. Stellarum tamen aliam, ajunt, se prospexisse faciem densamque quandam ab horizonte vaporosam caliginem, quae oculos fere obtenebraret.“ Ces mots me paroissent offrir la plus ancienne description des coalbags. L'expédition de *Vincente Yañez Pinzon* est de 1499 et la rédaction du passage des Océaniques probablement de 1510. Le Père *Acosta* disserte plus tard sur la cause de ces

taches „qui ressemblent à la figure et portion de la lune éclipsee.“ On a de la peine à concevoir comment Mr. *de Zach* (*Bode*, *Jahrbuch* 1788 p. 167) a pu conclure de ce pas- sage que *Acosta* dont l'ouvrage a paru pour la première fois à Seville en 1590, ait parlé „de taches du soleil que l'on voit au Pérou et non en Europe.“ (Examen critique T. 4. p. 316—336). J'ai aussi trouvé dans le spirituel ouvrage d'Anghiera (*Dec. III. lib. I. p. 217*) la première indication des nuages de Magellan.“ *Assecuti sunt Portugallenses alte- rius poli gradum! quintum quinquagesimum amplius: ubi punctum (polum?) circumeunt quasdam nubeculas licet in- tueri, veluti in lactea via sparsos fulgores per universum coeli globum intra ejus spatii latitudinem.*“ On peut prouver que ce passage est de 1514 par conséquent antérieur de sept ans au voyage de *Pigafetta*, même antérieur au voyage d'*Andrea Corsali* à Cochin dans l'Inde. Ces notions ne sont pas sans intérêt pour l'histoire de l'astrognosie.

A. de Humboldt.

Ueber den Ausdruck einer Function ϕx , durch Cosinusse und Sinusse der Vielfachen von x .
Von Herrn Geheimen-Rath und Ritter *Bessel*.

1.

Wenn man

$$[1] \dots \phi x = A^0 + 2A' \cos x + 2A'' \cos 2x + 2A''' \cos 3x + \dots \\ + 2B' \sin x + 2B'' \sin 2x + 2B''' \sin 3x + \dots$$

$$2\pi A^0 = \int_{-\pi}^{\pi} \phi x dx, \quad 2\pi A' = \int_{-\pi}^{\pi} \phi x \cos x dx, \quad 2\pi A'' = \int_{-\pi}^{\pi} \phi x \cos 2x dx, \dots \\ 2\pi B' = \int_{-\pi}^{\pi} \phi x \sin x dx, \quad 2\pi B'' = \int_{-\pi}^{\pi} \phi x \sin 2x dx, \dots$$

Schreibt man unter den Integralzeichen, α statt x , so hat man also:

$$[2] \dots 2\pi \phi x = \int_{-\pi}^{\pi} \phi \alpha d\alpha + 2 \cos x \int_{-\pi}^{\pi} \phi \alpha \cos \alpha d\alpha + 2 \cos 2x \int_{-\pi}^{\pi} \phi \alpha \cos 2\alpha d\alpha + \dots \\ + 2 \sin x \int_{-\pi}^{\pi} \phi \alpha \sin \alpha d\alpha + 2 \sin 2x \int_{-\pi}^{\pi} \phi \alpha \sin 2\alpha d\alpha + \dots$$

Wenn ϕx eine periodische Function von x ist, eine sol- che deren Werthe durch die Veränderung von x in $x \pm 2\pi$, $x \pm 4\pi, \dots$ nicht geändert wird, so ist diese Entwicklung derselben, falls sie von $x = -\pi$ bis $x = \pi$ richtig ist, of- fenbar für alle Werthe von x richtig. Ihre Form schließt alle Functionen von x aus, welche zwischen $x = -\pi$ und $x = +\pi$ nicht immer endlich bleiben. Da sie die Eigenschaft hat, periodisch zu sein, so kann sie nicht-periodische Functionen nicht für alle Werthe von x darstellen, sondern höchstens nur für innerhalb gewisser Grenzen liegende. Es tritt dann die Frage hervor, ob ihre Anwendung auf solche

annimmt, diesen Ausdruck nach und nach mit:

$$dx, \quad \cos x dx, \quad \cos 2x dx, \quad \cos 3x dx, \dots \\ \sin x dx, \quad \sin 2x dx, \quad \sin 3x dx, \dots$$

multiplicirt, und von $x = -\pi$ bis $x = \pi$ integrirt, so er- hält man:

nicht-periodische Functionen überall statthaft ist, und inner- halb welcher Grenzen von x sie ϕx , und nicht eine davon verschiedene Gröfse ausdrückt.

Herr Prof. *Dirichlet* hat erwiesen *), daß die Entwic- lung [2], wie auch die Beschaffenheit der Function ϕx sein möge, vorausgesetzt daß sie zwischen $-\pi$ und π nicht un- endlich groß wird, für Werthe von x , welche größer sind als $-\pi$ und kleiner als π , im Allgemeinen zu dem Werthe

*) *Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik.*
Bd. IV. S. 157.

von φx convergirt, und nur für besondere Werthe von x , welche Unterbrechungen der Stetigkeit von φx entsprechen, zu anderen Grenzen. Die Strenge und Vollständigkeit dieses Beweises lassen nichts zu wünschen übrig. Ich kann also nicht die Absicht haben, mehr zu leisten, als der genannte scharfsinnige Geometer geleistet hat; ich kann nur wünschen, daß die Betrachtungen, worauf der neue Beweis der ausgesprochenen, wichtigen Eigenschaft der Entwicklung [2], dessen Darstellung meine Absicht ist, beruht, nicht minder evi-

$$2\pi \varphi_n x = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi x dx \left\{ 1 + 2 \cos(\alpha - x) + 2 \cos 2(\alpha - x) + \dots + 2 \cos n(\alpha - x) \right\},$$

oder, wenn man diese Reihe summirt:

$$2\pi \varphi_n x = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi x dx \cdot \frac{\sin(2n+1) \frac{\alpha-x}{2}}{\sin \frac{\alpha-x}{2}}$$

und, wenn man das Integral in zwei von 0 anfangende Integrale zerlegt.

$$2\pi \varphi_n x = \int_0^{\pi} \varphi x dx \frac{\sin(2n+1) \frac{\alpha-x}{2}}{\sin \frac{\alpha-x}{2}} + \int_0^{\pi} \varphi(-\alpha) dx \frac{\sin(2n+1) \frac{\alpha+x}{2}}{\sin \frac{\alpha+x}{2}}$$

Setzt man voraus, daß $2n+1$ der Cubus einer Zahl k ist, so wird dieser Ausdruck:

$$2\pi \varphi_n x = \int_0^{\pi} \varphi x dx \frac{\sin k^3 \frac{\alpha-x}{2}}{\sin \frac{\alpha-x}{2}} + \int_0^{\pi} \varphi(-\alpha) dx \frac{\sin k^3 \frac{\alpha+x}{2}}{\sin \frac{\alpha+x}{2}}$$

und, wenn man eine neue veränderliche Größe u einführt, welche für beide Integrale resp.

$$= k^3 \frac{\alpha-x}{2} \quad \text{und} \quad = k^3 \frac{\alpha+x}{2}$$

angenommen wird,

$$[3] \dots \pi \varphi_n x = \int_0^{k^3 \frac{\pi-x}{2}} \varphi \left(x + \frac{2u}{k^3} \right) \frac{\sin u du}{k^3 \sin \frac{u}{k^3}} + \int_0^{k^3 \frac{\pi+x}{2}} \varphi \left(x - \frac{2u}{k^3} \right) \frac{\sin u du}{k^3 \sin \frac{u}{k^3}}$$

Ich werde nun zuerst zeigen, daß, wenn x die Grenzen $\pm \pi \left(1 - \frac{1}{k} \right)$ nicht überschreitet, die oberen Grenzen beider Integrale, mit desto größerem Rechte, je größer k ist, mit $\frac{k}{2} \pi$ verwechselt werden können; und ferner, daß die Summe

dent erscheinen mögen, als die, worauf *Dirichlet* den seinigen gegründet hat. Jene scheinen mir wirklich, weniger im Wesentlichen, als in ihrer Anordnung, von diesen verschieden zu sein.

2.

Bezeichnet man die Summe aller Glieder der Entwicklung [2], bis zu $\cos nx$ und $\sin nx$ incl. genommen, durch $\varphi_n x$, so ist der Ausdruck dieser Summe:

der beiden so begrenzten Integrale, sich dem Werthe von φx im Allgemeinen, und einer anderen Grenze für besondere Werthe von x desto mehr nähert, je größer k ist. Beide Annäherungen sind von der Art, daß sie sich, wenn $k = \infty$ gesetzt wird, in Richtigkeit verwandeln.

3.

Die Verwechslung der oberen Grenzen beider Integrale [3] mit $\frac{k}{2} \pi$ ist erlaubt, wenn

$$\int_{\frac{k}{2} \pi}^{k^3 \frac{\pi-x}{2}} \varphi \left(x + \frac{2u}{k^3} \right) \frac{\sin u du}{k^3 \sin \frac{u}{k^3}} + \int_{\frac{k}{2} \pi}^{k^3 \frac{\pi+x}{2}} \varphi \left(x - \frac{2u}{k^3} \right) \frac{\sin u du}{k^3 \sin \frac{u}{k^3}}$$

für einen unendlich großen Werth von k verschwindet. Ich werde dieses von dem ersten Integrale zeigen; von dem zweiten gilt, mit sich von selbst ergebenden Abänderungen, alles was ich über das erste sagen werde. Verändert man die untere Gränze des ersten Integrals, welches ich durch ξ bezeichnen werde, in 0, so hat man $u + \frac{k}{2} \pi$ statt u , also da k von der Form $4m+1$ ist, $\cos u$ statt $\sin u$ zu schreiben und erhält dadurch,

$$\xi = \int_0^{l\pi} \varphi \left(x + \frac{\pi}{k} + \frac{2u}{k^3} \right) \frac{\cos u du}{k^3 \sin \left(\frac{\pi}{k} + \frac{u}{k^3} \right)}$$

wo l für

$$k^3 \frac{\pi-x}{2} - \frac{k}{2} \pi = \frac{k}{2} \left\{ k - k \frac{x}{\pi} - 1 \right\} \pi$$

geschrieben ist. Die Grenze $l\pi$ dieses Integrals ist ein Vielfaches von π , wenn x ein gerades Vielfaches von $\frac{\pi}{k}$ ist; ich werde dieses, um unnöthige Weitläufigkeit zu vermeiden, annehmen, und ξ in l Theile theilen, nämlich in die von 0 bis π , von π bis 2π , von 2π bis 3π , u. s. w. genommenen Integrale. Ich setze also

$$\xi = \sum \int_{h\pi}^{(h+1)\pi} \varphi \left(x + \frac{\pi}{k} + \frac{2u}{k^3} \right) \frac{\cos u du}{k^3 \sin \left(\frac{\pi}{k} + \frac{u}{k^3} \right)},$$

wo das Summenzeichen alle ganzen Zahlen h , von 0 bis $l-1$ betrifft; oder, indem ich die untere Grenze des Integrals in 0 verändere:

$$[4] \dots \xi = \sum (-1)^h \int_0^\pi \varphi \left(x + \frac{\pi}{k} + \frac{2h\pi}{k^3} + \frac{2u}{k^3} \right) \frac{\cos u \, du}{k^3 \sin \left(\frac{\pi}{k} + \frac{h\pi}{k^3} + \frac{u}{k^3} \right)}$$

wofür ich, um abzukürzen,

$$\xi = \sum (-1)^h \psi h$$

oder

$$[5] \dots \xi = \psi 0 - \psi 1 + \psi 2 - \dots + (-1)^{l-1} \psi(l-1)$$

schreiben werde.

Der Bogen, dessen Sinus in dem Ausdrücke von ψh vorkommt, ist für $h=0$ und $u=0$ so klein als er werden kann, nämlich $= \frac{\pi}{2k}$; er wächst mit h , und wenn h seine Grenze erreicht und $u=\pi$ gesetzt wird, ist er so groß als er werden kann, nämlich $= \frac{1}{2}(\pi-x)$. Da x , der Annahme gemäß, die Grenzen $\mp \pi \left(1 - \frac{1}{k}\right)$ nicht überschreitet, so kann er also nicht größer werden als $\pi \left(1 - \frac{1}{2k}\right)$. Der Sinus im Nenner von [4] ist also immer positiv und nicht kleiner als $\sin \frac{\pi}{2k}$. Das Integral in diesem Ausdrücke hat von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ und von $\frac{1}{2}\pi$ bis π entgegengesetzte Zeichen, und ist daher unter der Annahme, daß der Quotient

$$\frac{\varphi \left(x + \frac{\pi}{k} + \frac{2h\pi}{k^3} + \frac{2u}{k^3} \right)}{k^3 \sin \left(\frac{\pi}{2k} + \frac{h\pi}{k^3} + \frac{u}{k^3} \right)}$$

zwischen $u=0$ und $u=\pi$ entweder ununterbrochen wächst, oder ununterbrochen abnimmt, ohne Rücksicht auf sein Zeichen, kleiner als:

$$\frac{\varphi \left(x + \frac{\pi}{k} + \frac{2h\pi}{k^3} \right)}{k^3 \sin \left(\frac{\pi}{2k} + \frac{h\pi}{k^3} \right)} - \frac{\varphi \left(x + \frac{\pi}{k} + \frac{2(h+1)\pi}{k^3} \right)}{k^3 \sin \left(\frac{\pi}{2k} + \frac{(h+1)\pi}{k^3} \right)},$$

wofür ich, um abzukürzen, $f h - f(h+1)$ schreiben werde. Die einzelnen Theile von ξ sind also kleiner als resp. $f_0 - f_1$, $f_1 - f_2$, $f_2 - f_3$, u. s. w. Die Annahme, worauf dieses beruht, ist erlaubt, da k beliebig groß, also $\frac{u}{k^3}$ beliebig klein gesetzt werden kann; aus demselben Grunde ist es auch unnöthig, des Falles, in welchem die Function φ , zwischen h und $h+1$ ihre Zeichen ändert, als Ausnahme zu erwähnen.

Nehmen die Werthe von $f_0, f_1, f_2, \dots$ die bald abnehmen, bald wachsen können, zwischen zwei Grenzen n und n' von h , entweder ab oder zu, so daß ihr Abnehmen oder ihr

Zunehmen mit f_n anfängt und sich mit $f_{n'}$ endigt, so ist der sich über dieses Intervall erstreckende Theil von ξ , nämlich

$$(-1)^n \psi n + (-1)^{n+1} \psi(n+1) + \dots + (-1)^{n'-1} \psi(n'-1),$$

kleiner als die Summe aller seiner Glieder, ohne Rücksicht auf ihre Zeichen genommen, und noch mehr kleiner als die Summe der, gleiches Zeichen besitzenden Größen $f_n - f(n+1)$, $f(n+1) - f(n+2), \dots, f(n'-1) - f_{n'}$, oder, ohne Rücksicht auf das Zeichen, kleiner als $f_n - f_{n'}$. Versteht man unter $m, m', \dots, m^{(i)}$ die Werthe von h , für welche jedes Abnehmen oder Zunehmen der Werthe von $f h$ anfängt oder sich endigt, so ist daher ξ kleiner als die Summe der, mit gleichem Zeichen genommenen Größen $f_0 - f_m, f_m - f_{m'}, f_{m'} - f_{m''}, \dots, f_{m^{(i)}} - f_l$. Da man aber nicht annehmen will, daß die Function φ stetig ist, so kann sie für $m, m', \dots$ zwei Werthe haben, weshalb im Allgemeinen unter $f_m, f_{m'}, \dots$ in zwei aufeinanderfolgenden dieser Unterschiede, verschiedene Werthe zu verstehen sind.

Die Größen $f_0, f_m, f_{m'}, \dots, f_l$ haben die Nenner

$$k^3 \sin \frac{\pi}{2k}, \quad k^3 \sin \left(\frac{\pi}{2k} + \frac{m\pi}{k^3} \right), \dots, k^3 \sin \frac{\pi-x}{2}.$$

Der erste derselben ist von der Ordnung von kk ; der letzte kann von derselben Ordnung sein, und ist es wirklich, wenn x entweder $= -\pi \left(1 - \frac{1}{k}\right)$, oder dieser Grenze so nahe ist, daß seine Entfernung von $-\pi$, obgleich sie größer ist, als $\frac{\pi}{k}$, noch als eine Größe derselben Ordnung angesehen werden kann; die übrigen sind im Allgemeinen von der Ordnung von k^3 und nie von einer niedrigeren als kk . ξ ist also kleiner als die angegebene Summe von $i+1$ Größen, deren keine die Ordnung von $\frac{1}{kk}$ überschreitet; welche Summe diese

Ordnung gleichfalls nicht überschreitet, da die Anzahl ihrer Glieder ($i+1$) von der Beschaffenheit der Function φx und von der Größe von x abhängt, nicht aber durch Vergrößerung von k vermehrt wird, also als ein beliebig kleiner Theil von k angesehen werden kann. Die Grenze von ξ , und damit ξ selbst, wird also desto kleiner, je größer k ist und verschwindet für $k=\infty$. Ich bemerke noch, daß die Betrachtung, woraus dieses hervorgegangen ist, nicht minder zu demselben Ziele führt, wenn im Ausdrücke von ξ , am Anfange des gegenwärtigen §'s, unter dem Functionenzeichen φ , statt x eine andere Größe geschrieben wird.

Uebrigens verschwindet ξ völlig, wenn $x = \pi \left(1 - \frac{1}{k}\right)$ angenommen wird, denn dann erreicht das bis $\frac{kk}{2}\pi$ genommene erste Integral des Ausdruckes [3] seine obere Grenze; derselbe

Fall tritt für das zweite Integral dieses Ausdruckes ein, wenn $x = -\pi\left(1 - \frac{1}{k}\right)$ ist.

4.

Indem hierdurch klar geworden ist, daß die oberen Grenzen der beiden Integrale des Ausdruckes [3], wenn k eine unendlich große Zahl bedeutet, mit $\frac{kk}{2}\pi$ verwechselt werden können, ist er auf

$$[6] \dots \pi \varphi_n x = \int_0^{\frac{kk}{2}\pi} \left\{ \varphi\left(x + \frac{2u}{k^3}\right) + \varphi\left(x - \frac{2u}{k^3}\right) \right\} \frac{\sin u du}{k^3 \sin \frac{u}{k^3}}$$

zurückgeführt worden. Diese Zurückführung ist so lange statthaft, als x die Grenzen $\mp \pi\left(1 - \frac{1}{k}\right)$ nicht überschreitet, oder unendlich wenig von $\mp \pi$ entfernt bleibt.

Da selbst an der Grenze dieses Integrals, $\frac{u}{k^3}$ unendlich klein ($= \frac{\pi}{3k}$) ist, so ist $\frac{k^3}{u} \sin \frac{u}{k^3}$ nur in der Ordnung von $\frac{1}{kk}$ von 1 verschieden und kann daher damit verwechselt werden,

$$U = \int_0^\pi \frac{\sin u du}{u} + \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin u du}{u} + \dots + \int_{(h-1)\pi}^{h\pi} \frac{\sin u du}{u} + \int_{h\pi}^{h\pi+v} \frac{\sin u du}{u}$$

oder

$$U = \int_0^\pi \frac{\sin u du}{u} - \int_0^\pi \frac{\sin u du}{\pi+u} + \int_0^\pi \frac{\sin u du}{2\pi+u} - \dots + (-1)^h \int_0^v \frac{\sin u du}{h\pi+u},$$

in welchem Ausdrucke jedes folgende seiner Glieder offenbar kleiner ist, als das vorhergehende, und, da ihre Zeichen ab-

$$\int \varphi\left(x + \frac{2u}{k^3}\right) \frac{\sin u du}{u} = U \varphi\left(x + \frac{2u}{k^3}\right) - \int U d\varphi\left(x + \frac{2u}{k^3}\right)$$

und, wenn man sich erinnert, daß der Werth von U , für $u = \infty$, $= \frac{1}{2}\pi$ ist,

$$\int_0^{\frac{kk}{2}\pi} \varphi\left(x + \frac{2u}{k^3}\right) \frac{\sin u du}{u} = \frac{1}{2}\pi \varphi\left(x + \frac{\pi}{k}\right) - \int_0^{\frac{kk}{2}\pi} U d\varphi\left(x + \frac{2u}{k^3}\right)$$

Indem aber U positiv ist und die Function φ , in dem in Betracht kommenden unendlich kleinen Zwischenraume zwischen x und $x + \frac{\pi}{k}$, entweder nur wächst, oder nur abnimmt, so hat das in diesem Ausdrucke vorkommende Integral das Zeichen von $\varphi\left(x + \frac{\pi}{k}\right) - \varphi x$ und ist kleiner als das Product

$$\int_0^{\frac{kk}{2}\pi} \varphi\left(x + \frac{2u}{k^3}\right) \frac{\sin u du}{u} = \frac{1}{2}\pi \left\{ \varphi\left(x + \frac{\pi}{k}\right) - \alpha \left[\varphi\left(x + \frac{\pi}{k}\right) - \varphi x \right] \right\}$$

welche GröÙe offenbar zwischen $\frac{1}{2}\pi \varphi x$ und $\frac{1}{2}\pi \varphi\left(x + \frac{\pi}{k}\right)$ liegt und durch $\frac{1}{2}\pi \varphi(x + \varepsilon)$ bezeichnet werden soll, wo also ε eine unendlich kleine GröÙe bedeutet. Das zweite Integral von [7] erhält eben so den Ausdruck $\frac{1}{2}\pi \varphi(x - \varepsilon)$. Man hat also

den, oder man kann den Ausdruck:

$$[7] \dots \pi \varphi_n x = \int_0^{\frac{kk}{2}\pi} \left\{ \varphi\left(x + \frac{2u}{k^3}\right) + \varphi\left(x - \frac{2u}{k^3}\right) \right\} \frac{\sin u du}{u}$$

schreiben. Da die beiden, in diesem Ausdrucke vorkommenden Argumente der Function φ , sich, selbst an der Grenze des Integrals, nur um die unendlich kleine GröÙe $\frac{\pi}{k}$ von x entfernen, so geht daraus hervor, daß alle entfernter liegende Werthe derselben keinen Einfluß auf $\varphi_n x$ haben, und daß diese GröÙe allein durch das Verhalten der Function φ in dem unendlich kleinen Zwischenraume zwischen $x - \frac{\pi}{k}$ und $x + \frac{\pi}{k}$ bestimmt wird.

Bezeichnet man durch U das unbestimmte Integral

$$\int_0^u \frac{\sin u du}{u},$$

so ist dieses U für jeden positiven Werth von u positiv. Setzt man nämlich $h\pi + \nu$ für diesen Werth, wo ν seinen Ueberschuß über das nächst-kleinere Vielfache bedeutet, so hat man

wechseln, die Summe aller positiv (wie das erste Glied) ist. Integriert man nun theilweise, so erhält man

$$\frac{\pi}{2} \left\{ \varphi\left(x + \frac{\pi}{k}\right) - \varphi x \right\};$$

oder es ist das Product dieser GröÙe, in einen eigentlichen, positiven Bruch α multiplicirt. Man hat also

$$\varphi_n x = \frac{1}{2} \left\{ \varphi(x + \varepsilon) + \varphi(x - \varepsilon) \right\} \dots \dots \dots (8)$$

Dieses ist die Form, auf welche Herr *Dirichlet* den Ausdruck der, hier durch $\varphi_n x$ bezeichneten, Grenze der Reihe [2] gebracht hat. Sie ist geeignet, diese Grenze in allen Fällen

anzugeben: indem man ihr desto näher kommt, je kleiner man ε annimmt, so folgt unmittelbar aus [8], daß im Allgemeinen $\varphi x_n = \varphi x$ ist; für diejenigen besonderen Werthe von x aber, bei welchen die Stetigkeit der Function φ unterbrochen ist, und auf deren beiden Seiten sie verschiedenen Gesetzen folgt, ist die Grenze von $\varphi(x - \varepsilon)$ der dem einen Gesetze, die von $\varphi(x + \varepsilon)$ der dem anderen entsprechende Werth von φx , $\varphi_n x$ also die halbe Summe beider Werthe.

Obgleich, streng genommen, die Reihe [2] selbst für die Werthe von x , für welche die eben erwähnten Unterbrechungen der Stetigkeit stattfinden, zu einer bestimmten, und zwar der angegebenen Grenze convergirt, so darf dieses jedoch nicht so verstanden werden, daß diese Grenze wirklich, z. B. durch Zahlenberechnung der Reihe [2], erreicht werden könnte. Denn da schon eine unendlich kleine Aenderung von x hinreicht, von dem Werthe von φx , welcher zu dem Gesetze der Function auf der einen Seite von x gehört, zu dem der anderen Seite entsprechenden, zu führen, und da unendlich kleine Aenderungen in der Rechnung nicht unterschieden

$$\int_0^{\frac{kk}{2}(2k-1)\pi} \varphi\left(-\pi + \frac{\pi}{k} + \frac{2u}{k^3}\right) \frac{\sin u du}{k^3 \sin \frac{u}{k^3}} = \int_0^{\frac{kk}{2}\pi} \varphi\left(-\pi + \frac{\pi}{k} + \frac{2u}{k^3}\right) \frac{\sin u du}{k^3 \sin \frac{u}{k^3}}$$

ist, und auch bemerkt, daß ebensowohl

$$\int_0^{\frac{kk}{2}(2k-1)\pi} \varphi\left(-\pi + \frac{2u}{k^3}\right) \frac{\sin u du}{k^3 \sin \frac{u}{k^3}} = \int_0^{\frac{kk}{2}\pi} \varphi\left(-\pi + \frac{2u}{k^3}\right) \frac{\sin u du}{k^3 \sin \frac{u}{k^3}}$$

angenommen werden kann. Vergleicht man dieses mit dem Ausdrucke [9], so wird er

$$\pi \varphi_n(-\pi) = \int_0^{\frac{kk}{2}\pi} \varphi\left(-\pi + \frac{2u}{k^3}\right) \frac{\sin u du}{k^3 \sin \frac{u}{k^3}} + \int_{\frac{kk}{2}(2k-1)\pi}^{\frac{kk}{2}\pi} \varphi\left(-\pi + \frac{2u}{k^3}\right) \frac{\sin u du}{k^3 \sin \frac{u}{k^3}}$$

Schreibt man in dem letzten Integrale dieses Ausdruckes $u + k^3\pi$ für u , so verwandelt es sich in

$$\int_{-\frac{kk}{2}\pi}^0 \varphi\left(\pi + \frac{2u}{k^3}\right) \frac{\sin u du}{k^3 \sin \frac{u}{k^3}}$$

und setzt man darin u für $-u$, in:

$$\int_0^{\frac{kk}{2}\pi} \varphi\left(\pi - \frac{2u}{k^3}\right) \frac{\sin u du}{k^3 \sin \frac{u}{k^3}}$$

Man erhält also

$$\pi \varphi_n(-\pi) = \int_0^{\frac{kk}{2}\pi} \left\{ \varphi\left(-\pi + \frac{2u}{k^3}\right) + \varphi\left(\pi - \frac{2u}{k^3}\right) \right\} \frac{\sin u du}{k^3 \sin \frac{u}{k^3}}$$

woraus, wie im vorigen §, folgt:

$$[10] \dots \varphi_n(-\pi) = \frac{1}{2} [\varphi(-\pi + \varepsilon) + \varphi(\pi - \varepsilon)] = \varphi_n \pi$$

Hieraus geht hervor, daß die Reihe [2] für $x = \pi$ oder $x = -\pi$, sich der halben Summe von $\varphi \pi$ und $\varphi(-\pi)$ nähert.

werden können, so muß diese den Werth der Reihe [2] in einem sehr kleinen Intervalle unbestimmt lassen.

5.

Um die Bedeutung der Reihe [2] vollständig kennen zu lernen, muß man noch die Grenze aufsuchen, welcher sie sich nähert, wenn x nicht etwa unendlich wenig größer als $-\pi$, oder kleiner als π ist, sondern wenn es diese Grenzen selbst erreicht. Da sie die Periode 2π besitzt, so ist $\varphi_n \pi = \varphi_n(-\pi)$, so wie allgemein $\varphi_n x = \varphi_n(x \pm 2\pi) = \varphi_n(x \pm 4\pi) = \dots$. Zu ihrer Kenntniß für alle Werthe von x ist daher nur noch nöthig, daß sie über eine volle Periode ausgedehnt werde, woran allein noch $\varphi_n \pi$, oder $\varphi_n(-\pi)$ fehlt.

Dem Ausdrucke [3] zufolge ist, wenn $x = -\pi$ gesetzt wird.

$$\pi \varphi_n(-\pi) = \int_0^{k^3\pi} \varphi\left(-\pi + \frac{2u}{k^3}\right) \frac{\sin u du}{k^3 \sin \frac{u}{k^3}} \dots [9]$$

Ich habe aber im 3ten §. gezeigt, daß

$$\int_0^{\frac{kk}{2}\pi} \varphi\left(-\pi + \frac{2u}{k^3}\right) \frac{\sin u du}{k^3 \sin \frac{u}{k^3}} = \int_0^{\frac{kk}{2}\pi} \varphi\left(-\pi + \frac{2u}{k^3}\right) \frac{\sin u du}{k^3 \sin \frac{u}{k^3}}$$

Sie stellt also die Function φx , von $x = -\pi$ bis $x = \pi$ inclusive dar, wenn diese Function für $x = \pi$ und $x = -\pi$ gleiche Werthe hat, wie z. B. der Fall der geraden, stetigen Functionen ist; wenn $\varphi \pi$ und $\varphi(-\pi)$ verschieden sind, so stellt sie die Functionen φx nur zwischen $x = -\pi$ und $x = \pi$ exclusive dar.

Das jetzt vollständig erkannte Verhalten der Reihe [2] zu der Function φx , aus welcher sie abgeleitet worden ist, läßt sich folgendermaßen aussprechen:

1. die Reihe convergirt immer zu einer bestimmten Grenze;
2. diese Grenze ist im Allgemeinen φx selbst; wenn aber einem Werthe von x zwei Werthe der Function zukommen, die halbe Summe beider; und dieses gilt
3. in dem ganzen Umfange der Werthe von x , für welchen die Eigenschaft der Reihe, ihre Werthe in der Periode 2π wieder hervorzubringen, seine Gültigkeit nicht unmöglich macht.

Bessel