**X. Bemerkung über das Wärmeleitungsvermögen des Quecksilbers;
von Hermann Herwig.**

Vor einigen Jahren habe ich¹⁾ eine Untersuchung über das Wärmeleitungsvermögen des Quecksilbers veröffentlicht, an welcher kürzlich Hr. H. F. Weber²⁾, soweit es den rechnenden Theil meiner Arbeit betrifft, einige Ausstellungen gemacht hat. Dieselben sind zwar im Princip berechtigt, haben aber zum Theil für die Anwendung, worauf es in dem vorliegenden Falle doch allein ankommt, nach meinem Dafürhalten keine eigentliche Bedeutung und sind anderntheils durch die mangelhafte Berechnung, welche Hr. Weber an Stelle der meinen einführt, ungenügend beleuchtet. Ich erlaube mir deshalb, da namentlich der letztere Theil der Sache allgemeineres Interesse bieten dürfte, hier kurz darauf zurückzukommen.

Ich hatte für die Wärmeleitung in einem auch nach aussen abgebenden Stabe die Differentialgleichung benutzt:

$$\frac{1}{1 + \alpha t} \cdot \frac{d^2 t}{dx^2} = Bt$$

worin $B = \frac{p h r}{q}$, ferner h = äusserer Wärmeleitungsfähigkeit, r = innerer Wärmeleitungswiderstand für 0° , p = Umfang und q = Querschnitt des Stabes und t = Temperatur an der um x vom Anfang des Stabes entfernten Stelle war, wenn jetzt der Einfachheit wegen die Umgebungstemperatur = 0° gedacht wird.

In dieser Gleichung hält Hr. Weber mit Recht die vorausgesetzte Abhängigkeit des Wärmeleitungswiderstandes von der Temperatur (mit dem Temperaturcoefficienten α) theoretisch für nicht ausreichend berücksichtigt. Es müsste

1) Herwig, Pogg. Ann. **151**. p. 177. 1874.

2) Weber, Untersuchung über die Wärmeleitung in Flüssigkeiten. Züricher Vierteljahrsschrift 1879, Heft 4.

in meiner Schreibweise die Differentialgleichung eigentlich lauten:

$$\frac{1}{1 + \alpha t} \cdot \frac{d^2 t}{dx^2} - \frac{\alpha}{(1 + \alpha t)^2} \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 = Bt.$$

Die Vernachlässigung des mit α multiplicirten Gliedes, die allerdings wohl hätte unterbleiben können, war indessen praktisch für meinen damaligen Zweck von keiner besonderen Bedeutung und konnte somit als erlaubt erscheinen. Ich suchte das Verhältniss des α zum Temperaturcoëfficienten für den galvanischen Widerstand des Quecksilbers und konnte schon nach den ersten Versuchen wissen, dass α sicher noch nicht die Hälfte des letztern Coëfficienten, also 0,0005, und wahrscheinlich noch entschieden weniger betragen würde. Die gemachte Abkürzung änderte somit an der ganzen Berechnung und Besprechung der Versuche nichts mit alleiniger Ausnahme des bloß hypothetisch gedachten Falles, dass die Coëfficienten für beide Widerstände übereinstimmen sollten. Bei dieser in der damaligen Tabelle V ausgeführten Berechnung hätten in der letzten Colonne die Werthe von 7,23 bis 7,52 statt von 7,00 bis 7,52 steigen müssen, wenn ganz exact gerechnet wäre.

Die Auflösung der obigen exacten Differentialgleichung nach demselben Verfahren¹⁾, welches ich in der früheren Abhandlung einschlug, ergibt nämlich folgendes.

Zunächst gewinnt man (mit Berücksichtigung der Grenzbedingung):

$$\frac{dt}{dx} = - (1 + \alpha t) \sqrt{B} \cdot \sqrt{\frac{2t}{\alpha} - \frac{2}{\alpha^2} \log(1 + \alpha t)}$$

und dann aus:

1) Vermuthlich ist die Meinung des Berichterstatters über meine Abhandlung in den „Fortschritten der Physik i. J. 1874“ p. 779, dass bei diesem Verfahren einmal mit und einmal ohne Berücksichtigung der Abhängigkeit des Wärmeleitungswiderstandes von der Temperatur integrirt sei, nur dadurch entstanden, dass ich von der abgekürzten Differentialgleichung ausging. Andernfalls würde diese Meinung ein Missverstehen des physikalischen Problems voraussetzen.

$$- \frac{1}{1 + \alpha T} \left(\frac{dt}{dx} \right)_T = \int_0^x B t dx$$

$$\frac{m X \sqrt{B}}{T} = \frac{1}{T} \sqrt{\frac{2T}{\alpha} - \frac{2}{\alpha^2} \log(1 + \alpha T)}$$

wenn T die Anfangstemperatur, X die Länge des Stabes und $m = \int_0^x t dx$ die Mitteltemperatur des Stabes ist.

An Stelle dieser exacten Formel gibt Hr. Weber eine andere an, indem er zwar von der richtigen Differentialgleichung ausgeht (nur wird $\frac{1}{k_0(1-\alpha t)}$ statt $r(1+\alpha t)$ eingeführt), im Laufe des Integrirens aber wiederholt ähnliche Vernachlässigungen, wie ich sie gleich bei Aufstellung der Differentialgleichung machte, begeht, allerdings theilweise mit zufälliger Compensation derselben. Die Formel des Hrn. Weber lautet in meiner Schreibweise:

$$\frac{m X \sqrt{B}}{T} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \alpha T}$$

Löst man in der exacten Formel $\log(1 + \alpha T)$ in eine Reihe auf, so ist richtig:

$$\frac{m X \sqrt{B}}{T} = \sqrt{1 - \frac{2}{3} \alpha T + \frac{2}{4} \alpha^2 T^2 - \frac{2}{5} \alpha^3 T^3 \dots}$$

Nun glaubt aber Hr. Weber, dass α den grossen Werth 0,0055 habe, und wendet seine Formeln überhaupt auf meine Versuche an, d. h. bis zu $T = 140$ oder bis zu $\alpha T = 0,77$, woraus sich das Unexacte an dem positiven Theil dieser Ausstellung des Hrn. Weber ergibt. Aehnlich verhält sich die Sache, wenn man mit Hrn. Weber in der Differentialgleichung $\frac{1}{k_0(1-\alpha t)}$ statt, wie oben, $r(1+\alpha t)$ setzt; man erhält dann streng richtig in meiner Schreibweise:

$$\frac{m X \sqrt{B}}{T} = \sqrt{1 - \frac{2}{3} \alpha T}.$$

Hiernach liegt die Möglichkeit nahe, dass infolge derselben unexakten Rechnungsweise auch das bedeutsame Re-

sultat, welches Hr. Weber im Anschlusse an eine zweite Ausstellung positiv hinzugefügt hat, unrichtig sei. Es lässt sich indessen zeigen, dass hier eine in gewissem Sinne völlige Compensation der mannichfaltigen Vernachlässigungen in der Rechnung stattgefunden und somit das Resultat des Hrn. Weber eine gewisse Berechtigung hat; hauptsächlich aus diesem Grunde habe ich mir die gegenwärtige Veröffentlichung erlaubt.

Diese zweite Ausstellung des Hrn. Weber betrifft den Umstand, dass ich die äussere Wärmeleitungsfähigkeit innerhalb meiner Versuche constant vorausgesetzt habe. Das ist allerdings nicht streng richtig, diese Grösse wächst vielmehr mit steigender Temperatur. Wieviel das Wachsthum indessen beträgt, darüber lauten die Angaben ausserordentlich verschieden. Ich hatte bei meiner Untersuchung die zwei Jahre früher veröffentlichten Erkaltingsversuche des Hrn. Narr¹⁾ im Sinne, welche nur eine äusserst geringfügige, vielleicht sogar grösstentheils noch auf kleinen Fehlerquellen der Beobachtung basirende Veränderlichkeit²⁾ ergeben hatten. Dazu kam, dass die Annahme eines merklichen Wachsthums der äussern Wärmeleitungsfähigkeit bei meinen Versuchen, welche die Constanz des obigen Ausdruckes $\frac{mX\sqrt{B}}{T}$ bewiesen hatten, zugleich ein Wachsen des innern Leistungsvermögens mit steigender Temperatur involviren würde, wie es ja auch Hr. Weber angibt. Und ein solches erwartete ich, die gegenseitigen Beziehungen der Wärmeleitung und der galvanischen Leitung untersuchend, allerdings überhaupt nicht, dachte vielmehr nur an eine mögliche Abnahme der Wärmeleitung mit steigender Temperatur. Ich erkenne jedoch jetzt gern an, dass das zu einer nicht exacten Formulirung meines damaligen Schlussresultates geführt hat, und dass letzteres richtig so lauten muss, dass das innere Wärmeleistungsvermögen des reinen Quecksilbers zwischen 40° und 160° keinenfalls mit wachsender Temperatur

1) Narr, Pogg. Ann. **142**. p. 123. 1871.

2) l. c. p. 143.

abnimmt. Das eigentlich von mir gesuchte Verhältniss zwischen Wärmeleitung und galvanischer Leitung erscheint dadurch, wie man sieht, nicht in einem wesentlich andern Lichte, und das halte ich noch immer für die wichtigste Seite der ganzen Frage.

Hr. Weber leitet nun unter Berücksichtigung eines Wachstums der äussern Wärmeleitungsfähigkeit die bedeutende Beziehung ab, dass der Temperaturcoefficient dieses Wachstumes infolge meiner Versuchsergebnisse gleich dem doppelten Temperaturcoefficienten für die innere Wärmeleitung sei, führt jedoch seine Rechnung in der oben ange deuteten unexacten Weise durch, die auch betreffs des Resultates Zweifel erwecken muss. Statt dessen soll hier mit Hülfe des schon oben angewandten Verfahrens streng gerechnet werden, unter Voraussetzung eines linearen Wachstums beider Vermögen mit der Temperatur. Dann ist mit den positiven Temperaturcoefficienten α und β in der obigen Schreibweise:

$$(1 + \alpha t) \frac{d^2 t}{dx^2} + \alpha \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 = B t (1 + \beta t).$$

Daraus erhält man zunächst:

$$\frac{dt}{dx} = - \frac{t \sqrt{B}}{1 + \alpha t} \sqrt{1 + \frac{2}{3} (\alpha + \beta) t + \frac{\alpha \beta}{2} t^2}$$

und weiter:

$$- (1 + \alpha T) \left(\frac{dt}{dx} \right)_T = m X B + \int_0^x \beta B t^2 dx.$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \int_0^x \beta B t^2 dx &= - \beta \sqrt{B} \int_T^0 \frac{t (1 + \alpha t) dt}{\sqrt{1 + \frac{2}{3} (\alpha + \beta) t + \frac{\alpha \beta}{2} t^2}} = \\ &= \frac{\beta T - 2}{\beta} R \sqrt{B} + \frac{2 \sqrt{B}}{\beta} + \frac{2 \alpha - \beta}{3 \beta \sqrt{\frac{\alpha \beta}{2}}} \cdot \sqrt{B} \log \frac{\frac{2}{3} (\alpha + \beta) + T \alpha \beta + R \sqrt{2 \alpha \beta}}{\frac{2}{3} (\alpha + \beta) + \sqrt{2 \alpha \beta}} \end{aligned}$$

wenn:

$$R = \sqrt{1 + \frac{2}{3} (\alpha + \beta) T + \frac{\alpha \beta}{2} T^2}$$

gesetzt wird.

Folglich unter Einführung von $z = \frac{\beta}{\alpha}$:

$$R = \sqrt{1 + \frac{2}{3} (z + 1) \alpha T + \frac{z}{2} \alpha^2 T^2}$$

und:

$$\frac{m X \sqrt{B}}{T} = \frac{2}{z \alpha T} (R - 1) - \frac{2 - z}{3 \sqrt{2z}} \cdot \frac{2}{z \alpha T} \log \left\{ 1 + \frac{z \alpha T + R \sqrt{2z} - \sqrt{2z}}{\frac{2}{3} (z + 1) + \sqrt{2z}} \right\}.$$

Jeder Werth von z , welcher die rechte Seite dieser Gleichung für ein beliebiges T zu 1 macht, steht mit meinen Versuchen im Einklang. Ein einzelner derartiger Werth ist nun in der That $z = 2$.

Nach Hrn. Weber's roher Annäherungsrechnung würde das der einzige zweifellose Werth sein, da sein entsprechendes Resultat lautet:

$$\frac{m X \sqrt{B}}{T} = \frac{1}{1 + \frac{1}{6} (\beta - 2\alpha) T} = \frac{1}{1 + \frac{1}{6} (z - 2) \alpha T}.$$

Es liegt hier also immerhin eine sehr beachtenswerthe Beziehung vor, obschon die Sache nach dem Vorstehenden nicht ganz frei von Bedenken sein dürfte.

Ob aber die grossen von Hrn. Weber angeführten Zahlen für β und α ohne weiteres anzunehmen sind, wage ich nicht zu entscheiden. In Betreff des β haben andere Autoren erheblich weniger gefunden, womit dann auch wohl α viel kleiner werden würde. Der grosse von Hrn. Weber für α direct gefundene Werth könnte doch vielleicht durch noch nicht ganz vermiedene Strömungen bei seinen Versuchen bedingt sein.

Darmstadt, 16. Januar 1880.