SUR LA MULTIPLICATION
DES NOMBRES CONGRUENTS
LETTRE

ADRESSÉE A' MONSIEUR LE PRINCE DON BALTHASAR BONCOMPAGNI

PAR M. F. WOEPCKE

MEMBRE CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE PONTIFICALE DES *NUOVI LINCEI*

Monsieur le Prince ,

Faisant allusion à un théorème que j'ai énoncé, il y a quelque temps, vous m'avez fait l'honneur de m'adresser, dans votre dernière lettre, une question à laquelle je m'empresse de répondre.

Le théorème énoncé était celui-ci : étant donné un nombre congruent, on peut toujours trouver un autre nombre congruent tel que le *double* produit des deux nombres congruents soit de nouveau un nombre congruent.

Le problème que vous me proposez actuellement est le suivant :

Étant donné un nombre congruent, trouver un autre nombre congruent tel que le produit simple des deux nombres congruents soit de nouveau un nombre congruent.

Je dois entrer à ce sujet dans quelques développements que je diviserai en paragraphes.

1.

Je mentionnerai, tout à l'heure, une manière de résoudre le problème proposé au moyen des tables des triangles rectangles numériques et des nombres congruents, qui est peut-être la plus facile en pratique. Mais auparavant j'indiquerai des solutions directes pour quelques cas particuliers assez étendus. Je ferai abstraction, dans les considérations relatives à ces cas, des facteurs quadratiques des nombres congruents.

1°. Si le nombre congruent donné est formé au moyen de deux nombres a, b qui satisfont à la condition

$$2a^2 - b^2 = c^2,$$

on aura

$$ab(a^2 - b^2) \times ac(a^2 - c^2) = bc \cdot a^2 \cdot (b^2 c^2 - a^4),$$

2° Si a, b satisfont à la condition

$$2b^2 - a^2 = d^2,$$

on aura

$$ab(a^2 - b^2) \times bd(b^2 - d^2) = b^2 \cdot ad \cdot (b^4 - a^2 d^2).$$

3° Si le nombre donné est formé au moyen de deux nombres dont le rapport r satisfait à la condition

$$r^4 - 2r^2 - 8r + 9 = w^2$$

on aura

$$\left(r - \frac{1}{r}\right) \left\{ \frac{-(r-1)^2 \pm w}{2(r-1)} - \frac{2(r-1)}{-(r-1)^2 \pm w} \right\} = \frac{-r^2 + 3 \pm w}{2} - \frac{2}{-r^2 + 3 \pm w}$$

relation que l'on vérifie aisément au moyen de quelques transformations. Par conséquent un nombre congruent formé au moyen de deux nombres dont le rapport est $\frac{-(r-1)^2 \pm w}{2(r-1)}$, produira, lorsqu'on le multiplie par le nombre congruent proposé, un nombre congruent formé au moyen de deux nombres dont le rapport est $\frac{-r^2 + 3 \pm w}{2}$. J'ai à peine besoin d'ajouter que la forme $\lambda - \frac{1}{\lambda}$, où λ est un

nombre rationnel $\frac{p}{q}$, représente toujours un nombre congruent, parce que

$$\left(\frac{p}{q} - \frac{q}{p}\right) = \frac{1}{4p^2 q^2} \cdot 4pq(p^2 - q^2).$$

Exemple :

$$r = \frac{11}{3}, w = \frac{104}{9}; \quad \frac{-(r-1)^2 \pm w}{2(r-1)} = +\frac{5}{6}, -\frac{7}{2}; \quad \frac{-r^2 + 3 \pm w}{2} = +\frac{5}{9}, -\frac{11}{1};$$

$$\left(\frac{11}{3} - \frac{3}{11}\right) \left(\frac{5}{6} - \frac{6}{5}\right) = \left(\frac{5}{9} - \frac{9}{5}\right), \quad \left(\frac{11}{3} - \frac{3}{11}\right) \left(\frac{2}{7} - \frac{7}{2}\right) = \left(\frac{1}{11} - \frac{11}{1}\right).$$

4° Si le nombre donné est formé au moyen de deux nombres dont le rapport r satisfait à la condition

$$9r^4 - 20r^3 - 2r^2 + 20r + 9 = w^2,$$

on aura

$$\left(r - \frac{1}{r}\right) \left\{ \frac{r^2 - 4r - 1 \pm w}{2(r-1)(2r+1)} - \frac{2(r-1)(2r+1)}{r^2 - 4r - 1 \pm w} \right\} = \frac{2(2r+1)}{-3r^2 + 2r + 3 \pm w} - \frac{-3r^2 + 2r + 3 \pm w}{2(2r+1)}$$

relation aisée à vérifier. Par conséquent, si on multiplie le nombre congruent

proposé, par un nombre congruent formé au moyen de deux nombres dont le rapport est $\frac{r^2 - 4r - 1 \pm w}{2(r-1)(2r+1)}$, on obtiendra un nombre congruent formé au moyen de deux nombres dont le rapport est $\frac{2(2r+1)}{-3r^2 + 2r + 3 \pm w}$.

Exemple :

$$r = -\frac{7}{9}, \quad w = \frac{20}{9}; \quad \frac{r^2 - 4r - 1 \pm w}{2(r-1)(2r+1)} = +\frac{5}{2}, +\frac{1}{4}; \quad \frac{2(2r+1)}{-3r^2 + 2r + 3 \pm w} = -\frac{3}{5}, +\frac{3}{4};$$

$$\left(\frac{9}{7} - \frac{7}{9}\right)\left(\frac{5}{2} - \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{5}{3} - \frac{3}{5}\right); \quad \left(\frac{9}{7} - \frac{7}{9}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{4}{1}\right) = \left(\frac{3}{7} - \frac{7}{3}\right).$$

Dans les exemples précédents les rapports $\frac{11}{3}, \frac{5}{9}, \frac{1}{11}, \frac{9}{7}, \frac{5}{3}, \frac{3}{7}$ sont de la forme $\frac{2m+1}{2n+1}$, tandis que nous avons supposé, dans l'origine, que le nombre congruent est formé avec deux nombres dont l'un est pair et l'autre impair. Mais deux nombres a et b donnent toujours lieu au même nombre congruent (au facteur quadratique 4 près) que $a+b$ et $a-b$. On peut donc remplacer le rapport $\frac{2m+1}{2n+1}$ par le rapport $\frac{m+n+1}{m-n}$, dont le numérateur est toujours pair si le dénominateur est impair, et réciproquement.

Remplaçant d'une manière semblable, dans les expressions générales ci-dessus trouvées, le rapport $\frac{a}{b}$ par le rapport $\frac{a+b}{a-b}$ ou $\frac{a-b}{a+b}$, on obtient

$$\frac{\{- (r-1)^2 \pm w\} + \{2(r-1)\}}{\{- (r-1)^2 \pm w\} - \{2(r-1)\}} = \frac{-r^2 + 3 \pm w}{2}$$

$$\frac{\{r^2 - 4r - 1 \pm w\} - \{2(r-1)(2r+1)\}}{\{r^2 - 4r - 1 \pm w\} + \{2(r-1)(2r+1)\}} = \frac{2(2r+1)}{-3r^2 + 2r + 3 \pm w}.$$

Il résulte de là que la solution qui correspond, dans chacun des deux cas 3° et 4°, au signe positif de w , donne lieu aux mêmes nombres congruents primitifs que la solution qui correspond au signe négatif, et que les deux solutions se distinguent proprement en ceci, qu'elles résolvent respectivement les deux problèmes de multiplier ou de diviser un nombre congruent donné par un autre nombre congruent tel qu'il en résulte de nouveau un nombre congruent. Mais ces deux problèmes ne sont pas essentiellement différents l'un de l'autre; car si l'on a $k : K = K_1$, on aura aussi

$$k : K = \frac{1}{K^2} \cdot K_1,$$

ce qui est un nombre congruent dérivé de K_1 .

5°. Désignant par x, y les cathètes, et par z l'hypoténuse d'un triangle rectangle numérique, si le nombre congruent proposé k est le double d'un nombre congruent de la forme $2xy$, le produit de k par le nombre congruent $x^2 - y^2$ sera un nombre congruent; si $k = 2zx$, $k.zy$ et $k.(z^2 + x^2)$ seront des nombres congruents; si $k = 2zy$, $k.zx$ et $k.(z^2 + y^2)$ seront des nombres congruents; si $k = 2(x^2 - y^2)$, $k.2xy$ sera un nombre congruent. C'est ainsi que les produits 30. 161, 910. 65, 910. 8194, 110. 65, 110. 17561, 14. 6 seront des nombres congruents.

2.

Il est évident que le problème proposé aura toujours une solution lorsque le nombre congruent donné k peut être considéré comme le double de la cathète d'un triangle rectangle numérique dont l'autre cathète est un nombre congruent. Cela résulte immédiatement de ce que le double produit des deux cathètes d'un triangle rectangle numérique est toujours un nombre congruent.

Mais il est aisé de voir, en outre, que cette nouvelle forme du problème est équivalente à la première; parce que, toutes les fois que k multiplié par un nombre congruent K est égal à un troisième nombre congruent, on pourra considérer k comme le double de la cathète d'un triangle rectangle numérique dont l'autre cathète est un nombre congruent.

En effet, si

$$1) \quad k \cdot K = \frac{p^2}{q^2} \cdot 4\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2),$$

on ne saurait décomposer le second membre en deux facteurs d'une manière plus générale qu'en le posant égal à

$$2 \frac{r}{s} \cdot \frac{p}{q} 2\alpha\beta \times \frac{s}{r} \cdot \frac{p}{q} (\alpha^2 - \beta^2);$$

on pourra donc faire

$$k = 2 \frac{r}{s} \cdot \frac{p}{q} 2\alpha\beta, \quad K = \frac{s}{r} \cdot \frac{p}{q} (\alpha^2 - \beta^2);$$

or, en posant

$$rp = p', \quad sq = q'$$

on aura

$$2 \cdot \frac{p'}{q'} 2\alpha\beta = k, \quad \frac{p'}{q'} (\alpha^2 - \beta^2) = \frac{r^2}{s^2} K;$$

mais, si K est un nombre congruent, $\frac{r^2}{s^2} K$ est pareillement un nombre congruent; de sorte que, si l'équation 1) a lieu, k est égal au double de la cathète d'un

triangle rectangle numérique dont l'autre cathète est un nombre congruent.

Appliquant cela aux six premiers nombres congruents suivant l'ordre, on obtient, au moyen des tables des triangles rectangles et des nombres congruents que j'ai jointes à une note publiée dans les *Annali di matematica pura ed applicata* (T. III. N° 4. Nota sopra la teorica dei numeri congrui), les solutions suivantes : $5. 6 = 30$, $5. 14 = 70$, $6. 14 = 2^2. 21$, $6. 390 = 6^2. 65$, $7. 30 = 210$, $7. 390 = 2730$, $13. 330 = 4290$, $14. 39 = 546$, $15. 119 = 1785$, etc. etc.

3.

Si l'on veut résoudre par les tables le problème inverse, c'est-à-dire si, ayant trouvé, au moyen des tables, deux nombres congruents K et K_1 qui satisfont avec le nombre congruent donné k à l'équation

$$k \cdot K = K_1,$$

on désire trouver un triangle rectangle numérique dont une cathète soit la moitié de k tandis que l'autre cathète est un nombre congruent: il faut d'abord savoir comment on mettra K_1 sous la forme

$$\frac{p^2}{q^2} \cdot 4\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2).$$

C'est ce qui est indiqué par la colonne à laquelle le nombre K_1 appartient, et je vais énumérer une à une les manières de déterminer p , q , α et β , surtout parce que je pense que cette indication peut être utile aussi pour d'autres questions.

1° Si $K_1 = 2xy \cdot \frac{\mu^2}{\nu^2}$, on a

$$p = \mu, \quad q = \nu, \quad \alpha = a, \quad \beta = b$$

où les nombres a et b sont ceux au moyen desquels est formé le triangle rectangle x, y, z , de sorte que $x = a^2 - b^2$, $y = 2ab$, $z = a^2 + b^2$.

2° Si $K_1 = zx \cdot \frac{\mu^2}{\nu^2}$, on a

$$p = \mu, \quad q = 2\nu y, \quad \alpha = z, \quad \beta = x.$$

3° Si $K_1 = zy \cdot \frac{\mu^2}{\nu^2}$, on a

$$p = \mu, \quad q = 2\nu x, \quad \alpha = z, \quad \beta = y.$$

4° Si $K_1 = \pm (x^2 - y^2) \frac{\mu^2}{\nu^2}$, on a

$$p = \mu, \quad q = 4\nu xyz, \quad \alpha = z^2, \quad \beta = \pm (x^2 - y^2).$$

5° Si $K_1 = (z^2 + x^2) \frac{\mu^2}{y^2}$, on a

$$p = \mu, \quad q = 4\nu xy z, \quad \alpha = z^2 + x^2, \quad \beta = y^2.$$

6° Si $K_1 = (z^2 + y^2) \frac{\mu^2}{y^2}$, on a

$$p = \mu, \quad q = 4\nu xy z, \quad \alpha = z^2 + y^2, \quad \beta = x^2.$$

7° Si $K_1 = \left[\left(\frac{z+x}{2} \right)^2 + (z-x)^2 \right] \frac{\mu^2}{y^2}$, on a

$$p = \mu, \quad q = 2\nu y \left[\left(\frac{z+x}{2} \right)^2 - (z-x)^2 \right], \quad \alpha = \left(\frac{z+x}{2} \right)^2 + (z-x)^2, \quad \beta = y^2.$$

8° Si $K_1 = \left[(z+x)^2 + \left(\frac{z-x}{2} \right)^2 \right] \frac{\mu^2}{y^2}$, on a

$$p = \mu, \quad q = 2\nu y \left[(z+x)^2 - \left(\frac{z-x}{2} \right)^2 \right], \quad \alpha = (z+x)^2 + \left(\frac{z-x}{2} \right)^2, \quad \beta = y^2.$$

9° Si $K_1 = [2z^2 - (x+y-2z)^2] \frac{\mu^2}{y^2}$, on a

$$p = \mu, \quad q = 8\nu (x-y)(x+y-z) z [(x+y-z)^4 - z^4], \quad \alpha = [(x+y-z)^2 + z^2]^2, \\ \beta = (x-y)^2 [2z^2 - (x+y-2z)^2].$$

10° Si $K_1 = [(x+y+2z)^2 - 2z^2] \frac{\mu^2}{y^2}$, on a

$$p = \mu, \quad q = 8\nu (x-y)(x+y+z) z [(x+y+z)^4 - z^4], \quad \alpha = [(x+y+z)^2 + z^2]^2, \\ \beta = (x-y)^2 [(x+y+2z)^2 - 2z^2].$$

11° Si $K_1 = \mp [(x-y-2z)^2 - 2z^2] \frac{\mu^2}{y^2}$, on a

$$p = \mu, \quad q = 8\nu (x+y)(x-y-z) z [(x-y-z)^4 - z^4], \quad \alpha = [(x-y-z)^2 + z^2]^2, \\ \beta = \mp (x+y)^2 [(x-y-2z)^2 - 2z^2].$$

12° Si $K_1 = \mp [(x-y+2z)^2 - 2z^2] \frac{\mu^2}{y^2}$, on a

$$p = \mu, \quad q = 8\nu (x+y)(x-y+z) z [(x-y+z)^4 - z^4], \quad \alpha = [(x-y+z)^2 + z^2]^2, \\ \beta = \mp (x+y)^2 [(x-y+2z)^2 - 2z^2].$$

Cela fait, on aura

$$2 \left(\frac{k}{4\alpha\beta} \cdot 2\alpha\beta \right) = k, \quad \frac{k}{4\alpha\beta} \cdot (\alpha^2 - \beta^2) = \frac{q^2 k^2}{16p^2 \alpha^2 \beta^2} \cdot K.$$

4.

Si on peut trouver deux nombres congruents K et K_1 qui satisfont, avec un nombre congruent donné k , à l'équation $k.K = K_1$, on pourra donc toujours assigner un triangle rectangle formé au moyen de deux nombres entiers α et β , et tel que

$$2(\lambda.2\alpha\beta) = k \quad , \quad \lambda(\alpha^2 - \beta^2) = K'$$

où λ est un nombre rationnel entier ou fractionnaire, et K' un nombre congruent dérivé de K .

Mais de ces deux dernières équations on tire immédiatement

$$(\lambda k)^2 = (2\lambda\alpha)^2.(2\lambda\beta)^2 \quad , \quad 4\lambda K' = (2\lambda\alpha)^2 - (2\lambda\beta)^2.$$

Il suit de là que $+(2\lambda\alpha)^2$ et $-(2\lambda\beta)^2$ sont les racines de l'équation

$$\rho^2 - 4\lambda K' \rho = (\lambda k)^2$$

et que $+(2\lambda\beta)^2$ et $-(2\lambda\alpha)^2$ sont les racines de l'équation

$$\rho^2 + 4\lambda K' \rho = (\lambda k)^2,$$

ou que l'on peut satisfaire simultanément aux deux équations indéterminées du quatrième degré

$$\sigma^4 + 4\lambda K' \sigma^2 = (\lambda k)^2 \quad , \quad \sigma_1^4 - 4\lambda K' \sigma_1^2 = (\lambda k)^2$$

en faisant $\sigma = 2\lambda\beta$ et $\sigma_1 = 2\lambda\alpha$.

Réciproquement, si l'une ou l'autre de ces deux équations a lieu, on aura respectivement

$$k K' = + \frac{1}{(4\lambda\sigma^2)^2} \cdot 4 \cdot \lambda k \cdot \sigma^2 [(\lambda k)^2 - (\sigma^2)^2]$$

$$k K' = - \frac{1}{(4\lambda\sigma_1^2)^2} \cdot 4 \cdot \lambda k \cdot \sigma_1^2 [(\lambda k)^2 - (\sigma_1^2)^2]$$

c'est à dire kK' , et par conséquent aussi kK , égal à un nombre congruent.

Ceci est donc une autre forme du problème proposé.

Je fais observer à cette occasion que l'on peut toujours satisfaire par des nombres entiers aux deux équations simultanées

$$\sigma^4 + \varphi \sigma^2 = \psi^2 \quad , \quad \sigma_1^4 - \varphi \sigma_1^2 = \psi^2$$

soit en posant

$$\sigma = b \quad , \quad \sigma_1 = a \quad , \quad \varphi = a^2 - b^2 \quad , \quad \psi = ab,$$

soit en posant

$$\sigma = a - b \quad , \quad \sigma_1 = a + b \quad , \quad \varphi = 4ab \quad , \quad \psi = a^2 - b^2.$$

Étant donné un nombre congruent $k = 4ab(a^2 - b^2)$, on peut toujours assigner deux, quatre, six, et en général un nombre pair quelconque de nombres congruents, dont le produit, multiplié par k , donne de nouveau un nombre congruent.

En effet, au moyen des deux nombres constitutifs a , b du nombre congruent donné, formons successivement les quantités suivantes :

$$x = a^2 - b^2, \quad y = 2ab$$

$$x_1 = x^2 - y^2, \quad y_1 = 2xy$$

$$x_2 = x_1^2 - y_1^2, \quad y_2 = 2x_1 y_1$$

$$x_3 = x_2^2 - y_2^2, \quad y_3 = 2x_2 y_2$$

$$x_4 = x_3^2 - y_3^2, \quad y_4 = 2x_3 y_3$$

et ainsi de suite.

Il est évident que toutes ces quantités, à partir de x_1 et y_1 , seront des nombres congruents; car

$$\left(\frac{x_{n-1}^4 + y_{n-1}^4}{2x_{n-1}y_{n-1}[x_{n-2}^2 + y_{n-2}^2]} \right)^2 \mp x_n = \left(\frac{x_{n-1}^4 \mp 2x_{n-1}^2 y_{n-1}^2 - y_{n-1}^4}{2x_{n-1}y_{n-1}[x_{n-2}^2 + y_{n-2}^2]} \right)^2$$

$$(x_{n-2}^2 + y_{n-2}^2)^2 \mp y_n = (x_{n-1} \mp y_{n-1})^2.$$

Mais on a

$$(2xy) \cdot x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2} \cdot y_3$$

$$(2xy) \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{1}{4} \cdot y_5$$

$$(2xy) \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 = \frac{1}{8} \cdot y_7$$

et généralement

$$(2xy) \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_{2m} = \frac{1}{(2^m)^2} \cdot y_{2m+1}.$$

Exemple: étant donné k ou $2xy = 24$, de sorte que $a = 2$, $b = 1$; on aura

$$x_1 = 7, \quad x_2 = 527, \quad x_3 = 164833, \quad x_4 = 98248054847.$$

On trouve en effet

$$\left(\frac{625}{2} \right)^2 \mp 24 \cdot 7 \cdot 527 = \left(\frac{863}{2} \right)^2, \quad \left(\frac{191}{2} \right)^2$$

$$\left(\frac{152587890625}{4} \right)^2 \mp 24 \cdot 7 \cdot 527 \cdot 164833 \cdot 98248054847 = \left(\frac{214997290751}{4} \right)^2, \quad \left(\frac{18501181057}{4} \right)^2.$$

6.

Je terminerai par une observation relative à l'addition et à la soustraction des nombres congruents.

Si l'on a un nombre congruent donné k , le problème de trouver un autre nombre congruent tel que la somme ou la différence des deux nombres soit de nouveau un nombre congruent, se résout immédiatement au moyen des triangles rectangles numériques. Car si

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= z^2, \\ \text{on aura} \quad k + \frac{x^2}{y^2} k &= \frac{z^2}{y^2} k, & k + \frac{y^2}{x^2} k &= \frac{z^2}{x^2} k \\ k - \frac{x^2}{z^2} k &= \frac{y^2}{z^2} k, & k - \frac{y^2}{z^2} k &= \frac{x^2}{z^2} k \\ \frac{z^2}{x^2} k - k &= \frac{y^2}{x^2} k, & \frac{z^2}{y^2} k - k &= \frac{x^2}{y^2} k. \end{aligned}$$

On pourra, sans doute, considérer aussi pour ces problèmes des cas particuliers qui offriront plus ou moins d'intérêt. On a, par exemple,

$$(x^2 - y^2) + (z^2 + y^2) = z^2 + x^2, \quad (y^2 - x^2) + (z^2 + x^2) = z^2 + y^2;$$

et en prenant la somme algébrique des quatre formes de nombres congruents, désignées dans la note ci-dessus citée par les numéros 8. 9. 10. 11., de la manière suivante

$$[2z^2 - (x + y - 2z)^2] + [(x + y + 2z)^2 - 2z^2] - [(x - y - 2z)^2 - 2z^2] + [(x - y + 2z)^2 - 2z^2]$$

on obtient $16xz$, ce qui est un nombre congruent.

Voilà, Monsieur le Prince, ce que je peux vous écrire à la hâte au sujet du problème que vous m'avez proposé. Mais j'espère, si d'autres occupations m'en laissent le loisir, encore mieux approfondir cette intéressante question.

Veuillez, je vous prie, agréer l'expression de la haute considération avec laquelle j'ai l'honneur d'être

Paris,
ce 20 Mars 1862.

Votre très-humble et très-obéissant serviteur
Woepcke.