Intorno ad alcune forme di numeri primi.

(del prof. A. GENOCCHI, a Torino).

Provò il celebre DIRICHLET col mezzo delle serie e di considerazioni infinitesimali che la forma lineare $ax + b$, se a e b sono due numeri interi primi tra loro, contiene una infinità di numeri primi. Potendo esser utile, specialmente nella dottrina dei numeri, il considerare una medesima questione in diversi aspetti, dimostrerò qui alcuni casi particolari dello stesso teorema con un metodo più semplice e anzi elementare che condurrà insieme ad alcune proprietà notabili di certe funzioni.

1° Supposto k un numero intero e positivo, facciamo

$$(a + \sqrt{b})^k = A_k + B_k \sqrt{b}, \quad (1)$$

intendendo con A_k e B_k due funzioni intere di a e b .

Si avrà nello stesso tempo $(a - \sqrt{b})^k = A_k - B_k \sqrt{b}$, e quindi

$$A_k = \frac{(a + \sqrt{b})^k + (a - \sqrt{b})^k}{2}, \quad B_k = \frac{(a + \sqrt{b})^k - (a - \sqrt{b})^k}{2\sqrt{b}}; \quad (2)$$

di più, ponendo

$$r = a^2 - b, \quad z = 2(a + b), \quad (3)$$

si avrà

$$A_k^2 - bB_k^2 = r^k, \quad (4)$$

$$2(A_k^2 + bB_k^2) = z^k - kr^2 z^{k-2} + \frac{k(k-3)}{1.2} r^4 z^{k-4} - \dots \quad (5)$$

Siano a e b due numeri interi; saranno tali anche A_k e B_k ; e se A_k e bB_k hanno un fattor primo comune, esso per la (4) sarà divisore anche di r , e quindi per la (5) sarà parimente divisore di z ; dunque un tal fattore sarà

2 oppure dividerà insieme $a^2 + b$ e $a^2 - b$, per ciò anche $2a^2$ e $2b$, ossia a e b . Adunque se a e b sono primi fra loro, e l'uno pari, e l'altro impari, anche A_k e bB_k saranno primi tra loro, e l'uno pari, l'altro impari a causa di r impari e della equazione (4). Se a e b sono ambedue impari, A_k e B_k saranno pari poichè sono somme di termini della forma $ma^p b^q$, che è pari o impari come m , onde si potrà ad un tal termine sostituire m , ovvero supporre $a = b = 1$, il che darà $A_k = B_k = 2^{k-1}$ valori pari. Ma non avranno comune alcun fattore impari se a e b non ne hanno: noi supporremo sempre a e b primi fra loro.

2.° Se n è un numero intero e positivo si ha

$$\begin{aligned} \frac{t^n - u^n}{t - u} &= t^{n-1} + t^{n-2}u + t^{n-3}u^2 + \dots + tu^{n-2} + u^{n-1} \\ &= nu^{n-1} + (t-u) \left(\frac{t^{n-1} - u^{n-1}}{t-u} + u \frac{t^{n-2} - u^{n-2}}{t-u} + u^2 \frac{t^{n-3} - u^{n-3}}{t-u} + \dots + u^{n-2} \right) \\ &= nu^{n-1} + (t-u) (t^{n-2} + 2t^{n-3}u + 3t^{n-4}u^2 + \dots + (n-2)tu^{n-3} + (n-1)u^{n-2}); \end{aligned}$$

scambiando t con u e poi sommando le due equazioni si otterrà

$$\begin{aligned} \frac{t^n - u^n}{t - u} &= n \cdot \frac{t^{n-1} + u^{n-1}}{2} - V(t-u), \\ V &= (n-2) \frac{t^{n-2} - u^{n-2}}{2} + (n-4)tu \frac{t^{n-4} - u^{n-4}}{2} + (n-6)t^2u^2 \frac{t^{n-6} - u^{n-6}}{2} + \text{ecc.} \end{aligned}$$

Sia m un altro numero intero e positivo, e si faccia $t = (a + \sqrt{b})^m$, $u = (a - \sqrt{b})^m$; ne risulterà $tu = (a^2 - b)^m$, $t - u = 2\sqrt{b} \cdot B_m$, $t^n - u^n = 2\sqrt{b} \cdot B_{mn}$, $t^k - u^k = 2\sqrt{b} \cdot B_{km}$, $t^{n-1} + u^{n-1} = 2A_{mn-m}$, ritenute le supposizioni del numero precedente; quindi

$$\frac{B_{mn}}{B_m} = nA_{mn-m} - 2V\sqrt{b} \cdot B_m,$$

e V prenderà la forma $H\sqrt{b}$ con H numero intero, onde anche il quoziente $\frac{B_{mn}}{B_m}$ sarà un numero intero, ossia B_{mn} sarà divisibile per B_m . Per conseguenza anche B_{mn-m} sarà divisibile per B_m . Ma secondo la stessa eguaglianza il numero $\frac{B_{mn}}{B_m}$ non può aver comuni con B_m altri divisori che quelli di nA_{mn-m} : e d'altra parte B_{mn-m} che deve contenere tutti i divisori di B_m non può, pel n.° precedente, aver comune con A_{mn-m} alcun divisore impari, cosicchè

nessun divisore impari di B_m sarà comune ad A_{mn-m} : dunque $\frac{B_{mn}}{B_m}$ non potrà aver comuni con B_m altri divisori impari che quelli dell'esponente n .

3.° Sia p un divisore impari del numero intero B_k nel caso di $k=m$, e sia h il più piccolo valore di k che rende B_k divisibile per p : dico che h sarà un divisore di m . Imperocchè se h non eguaglia m sarà minore di m e se non divide m esattamente, sia q il quoziente e h' il resto della divisione, onde $m = hq + h'$: posto $B_m = Mp$, $B_h = Hp$, sarà eziandio $B_{hq} = H'p$ con M, H, H' interi poichè B_{hq} sarà divisibile per B_h (n.° 2°), e ne dedurremo

$$\left(\frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}\right)^m - 1 = \frac{2\sqrt{b}}{(a-\sqrt{b})^m} \cdot Mp, \quad \left(\frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}\right)^{hq} - 1 = \frac{2\sqrt{b}}{(a-\sqrt{b})^{hq}} \cdot H'p$$

e però

$$\left(\frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}\right)^{hq} \left[\left(\frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}\right)^{h'} - 1 \right] = \frac{2p\sqrt{b}}{(a-\sqrt{b})^{hq}} \left[\frac{M}{(a-\sqrt{b})^{h'}} - H' \right],$$

ossia

$$(a^2-b)^{hq} \cdot B_{h'} = p [M(a-\sqrt{b})^{hq} - H'(a-\sqrt{b})^m],$$

dal cui secondo membro dovendo sparire $\sqrt{b}$ come sparisce dal primo, risulterà che p è un divisore del primo membro. Ma se un divisor primo di p dividesse $(a^2-b)^{hq}$ dividerebbe a^2-b e quindi dividendo insieme r e B_m dividerebbe anche A_m per la (4), mentre A_m e B_m non hanno comune alcun fattore impari: dunque p sarebbe divisore di $B_{h'}$ e h' sarebbe $< h$, la qual cosa è contraria all'ipotesi.

Segue da ciò che se B_k è multiplo di p per due valori $k=m$ e $k=m'$ dell'indice, saranno m e m' multipli di h ; quindi anche il massimo comun divisore μ di m e m' sarà multiplo di h , e in conseguenza sarà multiplo di p anche B_μ .

4.° Secondo teoremi noti, chiamato p un numero primo impari, se b è un residuo quadratico di p , il numero B_{p-1} è divisibile per p , e se b è un non residuo quadratico di p , il numero B_{p+1} è divisibile per p : ciò qualunque numero intero sia a (*). Sia pertanto $\frac{B_{mn}}{B_n} = P$, e p un divisor primo impari di

(*) Mém. Acad. de Berlin, 1773, pag. 352; GAUSS, *Disquis. Arithm.* art. 123.

P che non divida n : sarà p un divisore di B_{mn} che non dividerà B_m (n.º 2º), e nel primo caso $p-1$, nel secondo $p+1$ avrà comune coll'indice mn un divisore che sarà estraneo all'indice m . Se dunque n sia un numero primo e m una sua potenza n^{i-1} , dovrà $p \pm 1$ aver per divisore $mn = n^i$, onde sarà $p \mp 1 = n^i z$, $p = n^i z \pm 1$. E così nel primo caso avremo trovato un numero primo della forma $n^i z + 1$, nel secondo un numero primo della forma $n^i z - 1$.

Nel caso di $i=1$, sarà $B_m = B_1 = 1$, $B_{mn} = B_n$, $P = B_n$. Il numero n può anche essere $= 2$.

5.º Se k è impari, avremo dalle (2)

$$\left. \begin{aligned} A_k &= a^k + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} a^{k-1} b + \dots + k a b^{\frac{k-1}{2}}, \\ B_k &= k a^{k-1} + \frac{k(k-1)(k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{k-3} b + \dots + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} a^2 b^{\frac{k-3}{2}} + b^{\frac{k-1}{2}}; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

dalla seconda delle quali è chiaro che se b è primo ad a , e a è multiplo di n , sarà B_k primo ad n . Quindi preso a multiplo di n , fatto $b=1$, e chiamato p un divisor primo impari di P come nel n.º precedente, avremo $p = n^i z + 1$, poichè b sarà residuo quadratico di p , e p non sarà divisore di n , essendo B_{mn} e perciò P primo ad n .

Ciò vale per n numero primo impari e anche per $n=2$.

Supponendo invece $b=-1$, a pari e multiplo di n , potremo trovare un numero primo p della forma $n^i z - 1$, quando n sia della forma $4K+3$. Poichè i numeri m e mn saranno l'uno della forma $4K+1$ e l'altro della forma $4K+3$, ed essendo $B_k = C a^2 + (-1)^{\frac{k-1}{2}}$, anche i numeri B_m e B_{mn} saranno l'uno della forma $4K+1$ e l'altro della forma $4K+3$, onde il quoziente $\frac{B_{mn}}{B_m}$ ossia P sarà della forma $4K+3$ e avrà qualche divisore primo p della stessa forma: questo numero primo essendo diverso da n e avendo -1 per non residuo quadratico sarà $= n^i z - 1$.

6.º Supponiamo anche $b=\pm 2$. Se a e k sono impari, abbiamo, separando i multipli di 8,

$$B_k = k \pm \frac{k(k-1)(k-2)}{2 \cdot 3} \cdot 2a + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot 4 + 8C,$$

almeno per $k > 6$. Ne segue che quando k abbia la forma $8K+1$, anche

B_k sarà della stessa forma. Se k è della forma $8K-1$, avremo

$$B_k = -1 \pm \left(\frac{-1. -2. -3}{3} \right) a + \left(\frac{-1. -2. -3. -4. -5}{2. 3. 4. 5} \right) \cdot 4 + 8C' = 8C'' \pm 2a - 5,$$

e quindi B_k sarà della forma $8K-3$, se nel caso di $b=2$ prenderemo a della forma $4K-1$, e nel caso di $b=-2$ prenderemo a della forma $4K+1$. Supposto n della forma $8K-1$, e $m=n^{i-1}$, uno dei numeri m e mn avrà la forma $8K+1$ e l'altro la forma $8K-1$; per ciò uno dei numeri B_m e B_{mn} avrà la forma $8K+1$, e l'altro la forma $8K-3$, onde il quoziente P sarà della forma $8K-3$, e avrà almeno un divisore primo p d'una delle forme $8K \pm 3$, che sarà diverso da n essendo n della forma $8K-1$. Nel caso di $b=2$, sarà b non residuo di p , e ne risulterà $p=n^i z - 1$. Sarà lo stesso nel caso di $b=-2$, se p ha la forma $8K-3$; se invece p ha la forma $8K+3$, sarà b residuo di p e si avrà $p=n^i z + 1$, ma in questo caso P ammetterà eziandio un divisor primo della forma $8K-1$, di cui b sarà non residuo e che sarà diverso da n se prendasi a multiplo di n , e chiamandolo p si avrà ancora $p=n^i z - 1$.

Se k è della forma $8K+3$, avremo $B_k = 3 \pm 2a + 8C'$, che sarà della forma $8K-3$ se nel caso di $b=2$ prenderemo a della forma $4K+1$, e nel caso di $b=-2$ prenderemo a della forma $4K-1$. Se infine k è della forma $8K-3$, avremo $B_k = -3 \mp 4. 5a - 5. 4 + 8C'$, che per a impari è sempre della stessa forma $8K-3$. Quindi supposto n d'una delle forme $8K \pm 3$, i numeri m e mn saranno l'uno della forma di n , e l'altro della forma $8K+1$; B_m e B_{mn} saranno l'uno della forma $8K+1$, l'altro della forma $8K-3$, onde (preso a multiplo di n) si giungerà ancora alle medesime conclusioni di poc' anzi.

Convien notare che anche quando facciamo b negativo noi supponiamo positivi i valori di B_k perchè prendendo a abbastanza grande si può sempre rendere il primo termine ka^{k-1} del polinomio B_k superiore al complesso di tutti gli altri termini.

7.º Le precedenti proposizioni possono servire ad una dimostrazione del teorema di FERMAT sulla possibilità di risolvere con numeri interi l'equazione

$$2n = x^2 + y^2 + z^2$$

ogniqualevolta n sia un numero primo $8K-1$. Imperocchè abbiamo provato che è possibile trovar un numero primo $8K \pm 3$ compreso nella formola $p = n^i z - 1$: dovendo z esser pari, faremo $z = 2s$, e avremo $1 + p = 2ns$,

donde coi simboli di LEGENDRE trarremo $\left(\frac{-p}{n}\right) = 1$, e quindi per legge di reciprocazione trarremo $\left(\frac{n}{p}\right) = -1$ nel caso di $p = 8K - 3$, e $\left(\frac{n}{p}\right) = +1$ nel caso di $p = 8K + 3$; inoltre nel primo caso è $\left(\frac{-2}{p}\right) = -1$, e nel secondo $\left(\frac{-2}{p}\right) = +1$: dunque in ambedue i casi $\left(\frac{-2n}{p}\right) = 1$, sicchè potrà rendersi divisibile per p la formola $1 + 2nt^2$, e chiamato r il quoziente si avrà $1 + 2nt^2 = pr = r(2ns - 1)$, ossia $2nt^2 + r - 2nrs = -1$.

Potendosi, dato n , determinare valori interi di r, s, t , che soddisfacciano a questa equazione, ciò basta, come avvertì il DIRICHLET (*), per dedurne che $2n$ si può trasformare nell'espressione ternaria $x^2 + y^2 + z^2$.

8.° Sia n un numero primo impari qualsivoglia, b uno de' suoi non residui quadratici: si avrà $b^{\frac{n-1}{2}} \equiv -1 \pmod{n}$, e quindi $B_n = Cn - 1$ per la seconda delle (6): dunque B_n non sarà divisibile per n e avrà qualche divisore primo di cui b sarà non residuo, poichè ogni divisore primo di B_n del quale b sia residuo quadratico deve avere la forma $nz + 1$ (n.° 4°) e quindi se tutti i divisori primi di B_n avessero b per residuo quadratico sarebbero tutti della forma $nz + 1$ e B_n loro prodotto avrebbe pure la stessa forma. Chiamato dunque p un divisore primo di B_n avente b per non residuo quadratico, sarà $p = nz - 1$; e così viene dimostrata l'esistenza di numeri primi di questa forma che inoltre debbano avere per non residuo il numero b scelto ad arbitrio fra i non residui di n .

9.° Si ha dalla (4)

$$A_{mn} + B_{mn}\sqrt{b} = (a + \sqrt{b})^{mn} = (A_m + B_m\sqrt{b})^n$$

e quindi se n è impari

$$A_{mn} = A_m^n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} A_m^{n-2} B_m^2 b + \dots + n A_m B_m^{n-1} b^{\frac{n-1}{2}},$$

$$B_{mn} = n A_m^{n-1} + \dots + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} A_m^2 B_m^{n-2} b^{\frac{n-3}{2}} + B_m^n b^{\frac{n-1}{2}}:$$

(*) G. Crelle tom. XI. pag. 228.

donde supposto n un numero primo, risulta

$$A_{mn} \equiv A_m^n \equiv A_m, \quad B_{mn} \equiv B_m^n b^{\frac{n-1}{2}} \equiv B_m \left(\frac{b}{n} \right) \pmod{n}. \quad (7)$$

Se b è non residuo quadratico di n , sarà dunque $B_{mn} \equiv -B_m \pmod{n}$; e poichè abbiain già trovato $B_n \equiv -1$, facendo successivamente $m=n, n^2, n^3, \dots$ ne trarremo di mano in mano $B_{nn} \equiv -B_n \equiv 1$, $B_{nnn} \equiv -B_{nn} \equiv -1$, ecc. talchè supposto $m=n^{i-1}$, avremo sempre $B_{mn} \equiv -B_m \equiv \pm 1 \pmod{n}$, e dei due numeri B_m, B_{mn} l'uno avrà la forma $Cn+1$, l'altro avrà la forma $Cn-1$. Pertanto il quoziente P avrà sempre la forma $Cn-1$, non sarà divisibile per n , e dovrà avere qualche divisor primo p di cui b sarà non residuo, essendo della forma $nz+1$ tutti i divisori primi di B_{mn} de' quali b è residuo quadratico (n.º 4º) e della stessa forma tutti i prodotti formati con questi. Avrem dunque $p=n^t z-1$; e sarà così dimostrata l'esistenza di siffatti numeri primi p , aggiunta la condizione che b sia non residuo quadratico tanto di n quanto di p .

10.º Abbiamo

$$A_2 + B_2 \sqrt{b} = (a + \sqrt{b})^2, \\ A_{2m} + B_{2m} \sqrt{b} = (a + \sqrt{b})^{2m} = (A_m + B_m \sqrt{b})^2,$$

donde

$$A_2 = a^2 + b, \quad B_2 = 2a, \quad A_{2m} = A_m^2 + b B_m^2, \quad B_{2m} = 2A_m B_m.$$

Quindi $B_2, B_4, B_6, \dots$ sono tutti numeri pari.

Preso $a=2, b=-1$, risulterà $A_2=3, B_2=-4, A_{2m}=A_m^2-B_m^2$: saranno numeri impari $A_4, A_8, A_{16}, \dots$; di più l'equazione $B_{2m}=2A_m B_m$ darà B_4 multiplo di 8, B_8 multiplo di 16, ecc. Si troverà A_4 negativo, A_8 negativo, A_{16} positivo. Sia generalmente A_{2m} positivo, cioè $A_m^2 > B_m^2$, e facciamo $A_m = k B_m$, onde $k^2 > 1$: avremo $A_{2m} = (k^2 - 1) B_m^2, B_{2m} = 2k B_m^2$, e fatto $A_{2m} = k' B_{m2}$, ne trarremo $k' = \frac{1}{2} k - \frac{1}{2k}$, talchè k' sarà positivo se k è positivo, negativo se k è negativo, ma in entrambi i casi sarà quanto al valor assoluto $k' < \frac{1}{2} k$. Similmente fatto $A_{4m} = k'' B_{4m}$, si avrà in valor assoluto $k'' < \frac{1}{2} k'$, e però $k'' < \frac{1}{4} k$; fatto $A_{8m} = k''' B_{8m}$, si avrà $k''' < \frac{1}{2} k'' < \frac{1}{8} k$, e così in progresso finchè i coefficienti $k, k', k'', \dots$ resteranno numericamente superiori all'unità. Ma continuando la serie $k, \frac{1}{2} k, \frac{1}{4} k, \frac{1}{8} k, \dots$ si troverà infine un termine numericamente minore di 1; dunque un tal termine si troverà

anche nella serie $k, k', k'', \dots$, e supponendo che sia $k^{(i)}$, fatto $m' = 2^i m$, si avrà numericamente $A_{m'} < B_{m'}$, e sarà negativo $A_{2m'}$. Adunque nella serie $A_2, A_4, A_8, \dots$ si troveranno termini negativi il cui indice sia maggiore di qualsiasi numero dato.

Di qui si deduce l'esistenza di numeri primi della forma $2^i z - 1$, essendo i un numero dato qualsivoglia. Poichè indicata con m una potenza di 2 eguale o superiore a 2^{i-1} tale che A_m sia negativo, si avrà il quoziente $P = \frac{B_{2m}}{B_m} = 2 A_m$, che sarà negativo; ma fatto $m = 2m'$, si avrà $-A_m = B_{m'}^2 - A_{m'}^2$, e saranno $A_{m'}$ impari, $B_{m'}$ divisibile almeno per 4, onde $-A_m$ sarà un numero positivo della forma $8K-1$, e $-P$ un numero positivo della forma $2(8K-1)$: dunque P ammetterà per divisore qualche numero primo della forma $4K+3$, e chiamatolo p si avrà $p = 2mz - 1$ (n.º 4º), essendo $b = -1$ non residuo di p . Il numero p avrà la forma voluta perchè $2m$ sarà eguale o multiplo di 2^i . Così tali numeri primi si troveranno fra i divisori della formola

$$\frac{(2 + \sqrt{-1})^k - (2 - \sqrt{-1})^k}{2\sqrt{-1}}$$

supponendo k una potenza del 2.

11.º Consideriamo finalmente un numero m composto di fattori primi differenti, e rappresentiamo con n_1 , uno qualsiasi di tali fattori, con $n_2, n_3, n_4, \dots$ uno qualsiasi dei loro prodotti a due a due, a tre a tre, a quattro a quattro, ecc.; poniamo inoltre $\frac{m}{n_1} = m_1, \frac{m}{n_2} = m_2, \frac{m}{n_3} = m_3$, ecc. Si faccia $b = 1$, e si prenda a multiplo di tutti i fattori primi n_1 . Sarà B_m multiplo di tutti i valori di B_{m_i} corrispondenti ai diversi valori di n_i , e chiamato M il minimo multiplo comune di tali valori di B_{m_i} sarà $\frac{B_m}{M}$ un numero intero che indicheremo con P : sarà P come B_m primo ad a e perciò a tutti i numeri n_i ; e $\frac{B_m}{B_{m_i}}$ che è multiplo di P non potendo aver comune con B_{m_i} altro divisore impari che n_i (n.º 2º) poichè $m = m_i n_i$, non avrà comune con B_{m_i} alcun divisore impari. Sia p un divisore primo impari di P : sarà p un divisore di B_m che non dividerà B_{m_i} e quindi non dividerà B_k qualunque sia k dei divisori di m , escluso m , poichè k sarà multiplo d'alcuno dei valori di m_i . Ma essendo $b = 1$ residuo di p , anche B_{p-1} sarà multiplo di p : dunque $p - 1$ sarà multiplo di m (n.º 3º) e si avrà $p = mz + 1$.

Adunque per ogni numero m , pari o impari, primo o composto, è dimostrata l'esistenza di numeri primi della forma $mz+1$. Occorrono altri principj pei numeri primi della forma $mz-1$, se m è un numero composto di fattori primi differenti.

12.° Dinotiamo generalmente con $f(x)^k$ la frazione $\frac{x^k-1}{x-1}$, e ritenuto il significato di m, m_i, n_i dato nel n.° precedente poniamo

$$X = f(x)^m \cdot \frac{\Pi f(x)^{m_2} \cdot \Pi f(x)^{m_4} \cdot \Pi f(x)^{m_6} \dots}{\Pi f(x)^{m_1} \cdot \Pi f(x)^{m_3} \cdot \Pi f(x)^{m_5} \dots}.$$

ove i segni Π indicano moltiplicazioni stese a tutti i valori di m_1, m_2 , ecc.: sarà $X=0$ l'equazione avente per radici le radici primitive dell'equazione $x^m-1=0$. Ora presi a e b primi fra loro, formate le quantità B_{m_i} , chiamato M il minimo multiplo comune di tali quantità, e fatto $\frac{B_m}{M}=P$, potremo dedurre

P da X ponendo $x = \frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}$. Poichè avremo

$$P = B_m \cdot \frac{\Pi B_{m_2} \cdot \Pi B_{m_4} \cdot \Pi B_{m_6} \dots}{\Pi B_{m_1} \cdot \Pi B_{m_3} \cdot \Pi B_{m_5} \dots}, \quad (8)$$

e insieme $f(x)^k = \frac{B_k}{(a-\sqrt{b})^{k-1}}$, e quindi

$$X = \frac{P}{(a-\sqrt{b})^k}$$

per un conveniente valore di λ formato dalla somma algebrica di tutti i valori di $k-1$. Distinguendo in λ la parte derivante dal termine k e la parte derivante dal termine -1 , e chiamando s il numero dei fattori primi diversi di m , avremo per la seconda parte

$$- \left[1 - \frac{s}{1} + \frac{s(s-1)}{1 \cdot 2} - \frac{s(s-1)(s-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \right] = -(1-1)^s = 0,$$

e la prima parte sarà espressa da

$$\begin{aligned} m - \sum m_1 + \sum m_2 - \sum m_3 + \dots &= m - \sum \frac{m}{n_1} + \sum \frac{m}{n_2} - \sum \frac{m}{n_3} + \dots \\ &= m \Pi \left(1 - \frac{1}{n_1} \right), \end{aligned}$$

numero che dinota quanti sono i numeri inferiori ad m e primi ad m . Adunque λ si ridurrà a questo numero; e tale essendo pure il grado del polinomio X rispetto ad x , basterà sostituire in questo polinomio il valore di $x = \frac{a + \sqrt{b}}{a - \sqrt{b}}$, e fare sparire i denominatori: allora X sarà trasformato in P .

Si supponga $b = -h^2$, indicato con h un numero intero; e sia ρ il modulo, ϕ l'argomento dell'espressione immaginaria $a + h\sqrt{-1}$, onde $a \pm h\sqrt{-1} = \rho e^{\pm \phi \sqrt{-1}}$, e $x = \frac{a + \sqrt{b}}{a - \sqrt{b}} = e^{2\phi \sqrt{-1}}$. Rappresentando inoltre con u uno qualsivoglia degl'interi inferiori e primi ad m , e stendendo la moltiplicazione a tutti i valori di u , potremo scrivere

$$X = \Pi \left(x - e^{-\frac{2u\pi}{m} \sqrt{-1}} \right);$$

ma sarà

$$x - e^{-\frac{2u\pi}{m} \sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1} \cdot e^{\left(\phi - \frac{u\pi}{m}\right) \sqrt{-1}} \operatorname{sen} \left(\phi + \frac{u\pi}{m} \right);$$

quindi

$$X = 2^\lambda (\sqrt{-1})^\lambda \cdot e^{\left(\lambda\phi - \frac{\pi \sum u}{m}\right) \sqrt{-1}} \cdot \Pi \operatorname{sen} \left(\phi + \frac{u\pi}{m} \right),$$

che si riduce a

$$X = 2^\lambda e^{\lambda\phi \sqrt{-1}} \cdot \Pi \operatorname{sen} \left(\phi + \frac{u\pi}{m} \right)$$

perchè

$$\sum u = \frac{1}{2} \lambda m, \quad e^{-\frac{1}{2} \lambda \pi \sqrt{-1}} = (-\sqrt{-1})^\lambda, \quad (\sqrt{-1})^\lambda (-\sqrt{-1})^\lambda = 1.$$

Essendo

$$P = X(a - \sqrt{b})^\lambda = X \cdot \rho^\lambda e^{-\lambda\phi \sqrt{-1}},$$

ne risulta

$$P = 2^\lambda \rho^\lambda \cdot \Pi \operatorname{sen} \left(\phi + \frac{u\pi}{m} \right).$$

Il maggior valore di u sarà $m-1$, e quindi se l'arco ϕ sia maggiore di $\frac{\pi}{m}$ e minore di $\frac{2\pi}{m}$, l'arco $\phi + \frac{m-1}{m} \pi$ sarà compreso tra π e 2π e avrà

un seno negativo, mentre tutti gli altri archi $\phi + \frac{u\pi}{m}$ saranno minori di π e avranno seni positivi, il che darà P negativo. Ma avendosi $\tan \phi = \frac{h}{a}$, infiniti valori razionali e irrazionali di a e h soddisfaranno alla condizione $\frac{\pi}{m} < \phi < \frac{2\pi}{m}$, cosicchè in infiniti modi, anche supposti a e h interi, si potrà render P negativo.

13.° Sia m impari, e si prenda h impari, a multiplo di 4 e di tutti i fattori primi di m . Saranno impari tutti i valori di m_1, m_2 , ecc., e così nella espressione (8) tutti gl'indici saranno impari. Ma dalle (6) avremo $B_k \equiv b^{\frac{k-1}{2}}$ (mod. 8), e quindi dalla (8) dedurremo $P \equiv b^{\frac{\lambda}{2}} \equiv (-h^2)^{\frac{\lambda}{2}}$ (mod. 8): ora entrando in m almeno due fattori primi differenti il numero λ sarà divisibile per 4; dunque sarà $P \equiv h^{\lambda} \equiv 1$ (mod. 8). Supposto inoltre P negativo, ne segue che $-P$ sarà un numero intero positivo della forma $8K-1$, e avrà qualche divisor primo p della forma $4K+3$. Sarà B_m primo ad m e a b ossia ad h ; quindi p non sarà divisore di m nè di h , ed essendo della forma $4K+3$, sarà $b \equiv -h^2$ uno de' suoi non residui, onde P sarà divisore di B_{p+1} . Da ciò ragionando come al n.° 11° si concluderà che $p+1$ sarà divisibile per m , e così $p \equiv mz-1$, e il numero z sarà multiplo di 4 perchè p ha la forma $4K+3$.

14.° Se m è pari ma divisibile soltanto per 2 ovvero per 4, basta ancora la data dimostrazione, poichè essendo z multiplo di 4, la forma $mz-1$, dimostrata nel caso di m impari, comprende le due $2mz'-1$ e $4mz''-1$. Per gli altri casi, intenderemo che $n_1, n_2, n_3, \dots$ rappresentino i fattori primi impari di m e i loro prodotti, e ritenuto $\frac{m}{n_1} = m_1, \frac{m}{n_2} = m_2, \frac{m}{n_3} = m_3, \dots$ dovremo nella formola (8) per tener conto del fattore 2 sostituire a ΠB_{m_i} il prodotto $B_{\frac{1}{2}m} \cdot \Pi B_{m_i}$, e generalmente a ΠB_{m_i} il prodotto $\Pi B_{\frac{1}{2}m_i} \cdot \Pi B_{m_i}$. Ma si ha (n.° 10°) $B_{2k} = 2A_k B_k$, onde $B_k = \frac{B_{2k}}{2A_k}$: fatte queste sostituzioni, e ommesso il fattor 2 che avrèbbe per esponente

$$1 - \frac{s-1}{2} + \frac{(s-1)(s-2)}{4 \cdot 2} - \dots = (1-1)^{s-1} = 0,$$

si otterrà

$$P = A_{\frac{1}{2}m} \cdot \frac{\prod A_{\frac{1}{2}m_2} \cdot \prod A_{\frac{1}{2}m_4} \cdot \prod A_{\frac{1}{2}m_6} \dots}{\prod A_{\frac{1}{2}m_4} \cdot \prod A_{\frac{1}{2}m_8} \cdot \prod A_{\frac{1}{2}m_{10}} \dots}.$$

Ora $A_k = a^k + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} a^{k-1} b + \text{ecc.}$; quindi prendendo a impari, b multiplo

di 4, e però b di 16, avremo $A_k \equiv a^k \pmod{16}$. Adunque $P \equiv a^{\frac{1}{2}\lambda} \pmod{16}$, essendo $\lambda = m - \sum m_1 + \sum m_2 - \dots$; ma supponendosi m divisibile per 8, e per qualche fattore impari, sarà λ multiplo di 16, e $\frac{1}{2}\lambda$ di 8; dunque $P \equiv 1 \pmod{16}$. Pertanto se P è negativo sarà $-P$ un numero positivo della forma $16K-1$, e avrà qualche divisor primo p della forma $4K+3$, che sarà diverso da tutti i valori di n_1 , se si prenderà a multiplo di tutti questi, e che avrà b per non residuo quadratico. Dal che si concluderà come dianzi $p = mz - 1$.

Trovato un numero primo p della forma $mz + 1$ o della forma $mz - 1$, se ne troverà un altro p' , se in luogo di a si metterà $a' = ap$, indi un altro p'' se in luogo di a' si metterà $a'' = a'p'$, e così via via: laonde se ne troveranno infiniti.

Alcune proprietà delle funzioni B_k sono state dimostrate da LAGRANGE e LEGENDRE (*).

(*) LAGRANGE, *Miscell. Taurin.*, t. IV e *Additions à l'Alg. d'Euler* p. 606; LEGENDRE, *Théorie des nombres*, n° 443.