

3.

Von dem Krümmungs-Schwerpunkte ebener Curven.

(Von Hrn. Prof. Steiner zu Berlin.)

(Auszug aus einer am 5. April 1838 in der hiesigen Akad. d. Wissensch. gehaltenen Vorlesung.)

Bei Untersuchungen über Maximum und Minimum in Rücksicht geometrischer Gegenstände wurde ich auf nachstehende Aufgaben geführt:

a. „Wenn aus einem beliebigen Punkte P in der Ebene einer gegebenen und stetig convexen Curve \mathfrak{B} auf alle Tangenten der letzteren Perpendikel gefällt werden, so liegen die Fußpunkte in irgend einer Curve V ; denjenigen Punkt S zu finden, dessen Fußpunkten-Curve v den kleinsten Inhalt hat?“

b. „Wenn die gegebene Curve \mathfrak{B} in ihrer Ebene auf einer festen Geraden G so lange rollt, bis sie sich ganz umgedreht hat, so beschreibt jeder mit ihr verbundene Punkt P irgend eine Curve W ; denjenigen Punkt S anzugeben, welcher die Curve w vom kleinsten Inhalte beschreibt?“ Und

c. „Die analoge Frage, wenn die Curve \mathfrak{B} auf einer festen Curve U so lange rollt, bis ihr ganzer Umfang die letztere berührt hat.“

Es zeigte sich, daß den beiden ersten Aufgaben ein und derselbe bestimmte Punkt S genügt, und daß überhaupt das Gesetz Statt findet: daß für irgend einen Punkt P die Curve W allemal gerade doppelt so großen Inhalt hat, als die Curve V . Jener ausgezeichnete Punkt S aber, welcher die Curven (v und w) vom kleinsten Inhalte erzeugt, hat in Bezug auf die gegebene Curve \mathfrak{B} die merkwürdige Eigenschaft: „daß er ihr Schwerpunkt ist, wenn die Gewichte ihrer einzelnen Punkte (die sie in unendlich kleine gleiche Elemente theilen) sich verhalten, wie die respectiven Krümmungen, oder wie die umgekehrten Werthe der zugehörigen Krümmungsradien.“ Deshalb ist der Punkt S „Krümmungs-Schwerpunkt“ der Curve \mathfrak{B} genannt worden. Von ihm und von dem Inhalte der ihm entsprechenden Curve v oder w hängt der Inhalt der jedem anderen Punkte P entsprechenden Curve V oder W ab, und zwar nach dem Gesetz: „daß Punkten, welche gleich weit von S entfernt sind, Curven von

gleichem Inhalte entsprechen; und dafs die Inhalts-Zunahme dem Quadrate jener Entfernung proportional ist."

Bei der dritten Aufgabe (γ) ist zwar derjenige Punct \mathfrak{S} , welcher die Curve w vom kleinsten Inhalte beschreibt, im Allgemeinen von dem vorigen (S) verschieden, indessen hängt er doch wesentlich von diesem ab, und seine Eigenschaft ist der des letztern ganz analog.

Ist die gegebene Curve \mathfrak{B} nicht geschlossen, oder wird nur ein beliebiger Bogen AB derselben berücksichtigt, so dafs nur auf die Tangenten dieses Bogens Perpendikel gefällt werden, oder nur dieser Bogen auf der Basis rollt: so giebt es gleichwohl einen bestimmten Punct R , welchem die kleinste Figur v oder w entspricht, und derselbe hängt wesentlich von dem, dem Bogen AB entsprechenden Puncte S oder \mathfrak{S} ab (auferdem noch von der Sehne AB und bestimmten Winkeln). Auch ist dann eben so der Inhalt der jedem anderen Puncte P entsprechenden Figur V oder W von dem Abstände des Punctes P von R abhängig, nämlich die Inhalts-Zunahme $V-v$ oder $W-w$, ist allemal gleich dem Quadrate dieses Abstandes multiplicirt in einen constanten Coefficienten. Dadurch wird die Quadratur aller solchen Curven V oder W auf die von v oder w zurückgeführt. Wiewohl man sich vielfach mit dergleichen Curven beschäftigt hat, so findet doch, meines Wissens, dieses einfache Gesetz sich nirgends aufgestellt. Trotz dem ist der Beweis desselben, so wie der zuvor angedeuteten Sätze, keinesweges schwierig; sondern es kam vielmehr nur auf das Auffinden der Sätze selbst an*). Jetzt werden sie sich auf verschiedene Arten leicht beweisen lassen. Hier geschieht es auf geometrischem Wege, durch blofs elementare Betrachtungen, und zwar ohne Voraussetzung der erforderlichen, anderweitig bekannten Hülfsätze. Nämlich die Betrachtung nimmt, der Hauptsache nach, folgenden Gang.

Zuerst werden aus einem einfachen Fundamentalsatze die wesentlichsten Eigenschaften des Puncts der mittleren Entfernung oder des Schwerpunkts eines Systems gegebener Puncte entwickelt. Sodann wendet sich die Betrachtung zu den Fußpunkten-Vielecken V in Bezug auf ein gegebenes Vieleck \mathfrak{B} , wobei die wichtigsten Resultate auf jene Eigenschaften

*) Die obigen Aufgaben habe ich bereits in Bd. XIV. S. 88 d. Journ. zur Lösung vorgelegt und dabei zugleich einige der eben erwähnten Resultate angedeutet; sie blieben aber, wie es scheint, unbeantwortet.

des Schwerpunktes sich stützen. Diese Resultate gelten zugleich auch für die Fußpunten-Curven V in Bezug auf eine gegebene Curve \mathfrak{B} ; was unmittelbar folgt, wenn man jenes Vieleck \mathfrak{B} in eine Curve übergehen läßt, d. h. wenn man die Zahl der Seiten unendlich groß und jede Seite unendlich klein werden läßt. Nun wird weiter das Vieleck \mathfrak{B} auf einer festen Geraden rollend fortbewegt und dabei die von den mit ihm verbundenen Punkten beschriebenen Figuren W berücksichtigt: so zeigt sich, daß auch hierbei die Hauptresultate sich gleicherweise auf die Eigenschaft des Schwerpunktes gründen, und daß dieselben bestehen bleiben, wenn das rollende Vieleck in eine Curve \mathfrak{B} übergeht. Endlich läßt man das Vieleck \mathfrak{B} auf einem festen Vielecke \mathfrak{U} rollen, wobei sich wiederum analoge Resultate ergeben, die auch fortbestehen, wenn die Vielecke in Curven \mathfrak{B} und \mathfrak{U} übergehen *). In diesem letzten Falle gelangt man zu den allgemeinsten Resultaten (§. XXXIV.); sie umfassen gewissermaßen alle vorhergehenden und gestatten außerdem noch zahlreiche andere specielle Folgerungen (§. XXXV.); auch folgt daraus unmittelbar die Quadratur vieler Curven, wie z. B. der verschiedenen Arten Cykloiden, des Raumes zwischen parallelen Curven, u. s. w.

Beiläufig bemerke ich noch, daß der gegenwärtigen Untersuchung eine andere zur Seite steht, welche sich mit den folgenden Aufgaben, und Dem, was unmittelbar damit zusammenhängt, beschäftigt, nämlich:

α . In der Ebene einer gegebenen Curve \mathfrak{B} denjenigen Punct M zu bestimmen, dessen Fußpunten-Curve v , in Rücksicht auf jene, unter allen die kürzeste ist?

β . Wenn in der Ebene eine gegebene Curve \mathfrak{B} auf einer festen Geraden G rollt, denjenigen, mit ihr verbundenen Punct M anzugeben, welcher die kürzeste Curve w beschreibt? Und

γ . Dasselbe, wenn die Curve \mathfrak{B} auf einer festen Curve \mathfrak{U} rollt?

Auch hier findet sich: *daß ein und derselbe Punct M den beiden ersten Aufgaben zugleich genügt*; oder noch mehr, es findet sich das allgemeine Gesetz: „*daß die irgend einem Puncte P entsprechende Fuß-*

*) Zu diesem Gange der Betrachtung gaben die beiden speciellen Sätze von Querret, Sturm und Lhuillier den ersten Anlaß, welche in Bd. I. S. 51 dieses Journals sich angeführt finden, und welche zunächst den daselbst (so wie Bd. II. S. 265.) bewiesenen allgemeinen Satz zur Folge hatten, als dessen weitere Entwicklung die vorliegende Abhandlung zum Theil anzusehen ist.

puncten-Curve V (α) gerade eben so lang ist, als die von ihm beim Rollen (β) beschriebene Curve W ." Dies führt zur Vergleichung der Länge vieler, anscheinend sehr verschiedener Curvenpaare und gewährt dadurch einige interessante Sätze.

Für alle drei Aufgaben läßt sich die charakteristische Eigenschaft des Punctes M auf geometrischem Wege angeben.

Durch diese Untersuchung gelangt man auch unmittelbar zur Rectification einer bestimmten Reihe von Curven.

Vom Puncte der mittlern Entfernung.

§. I.

Fundamentalsatz. „Zieht man aus drei beliebigen Puncten A , M , B (Fig. 1.) einer Geraden AB drei parallele Strahlen $AC = a$, $MN = m$, $BD = b$ in beliebiger Richtung nach einer andern Geraden X , so ist, wenn man $AM = b_1$ und $BM = a_1$ setzt:

$$1. \quad aa_1 + bb_1 = (a_1 + b_1)m.$$

Denn zieht man die Gerade BC , welche MN in E schneidet, so ist wegen der parallelen Strahlen:

$$ME : a = a_1 : a_1 + b_1 \quad \text{und} \quad NE : b = b_1 : a_1 + b_1,$$

woraus, da $ME + EN = MN = m$ ist, jene Gleichung (1) folgt.

Hiebei ist noch zu bemerken:

a) Der Satz findet Statt, mögen die Puncte A , M , B auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der Geraden X liegen. Nur sind im letztern Falle Strahlen, die auf verschiedenen Seiten von X liegen, als entgegengesetzt, die einen als positiv, die andern als negativ zu betrachten. Dieser Gegensatz kann entweder in der Gleichung (1) durch die Zeichen $+$ und $-$ angezeigt, oder unmittelbar in der Figur berücksichtigt werden. Hier soll fortan dieses Letztere geschehn, und also auch im Falle der (Fig. 2.), statt der jenen Zeichen gemäßen Gleichung $bb_1 - aa_1 = (a_1 + b_1)m$, ebenfalls die obige Gleichung (1) geschrieben werden.

b) Geht insbesondere die Gerade X durch den Punct M , so hat man:

$$2. \quad aa_1 + bb_1 = 0.$$

c) Der Satz ist von dem Winkel unabhängig, welchen die Strahlen a, m, b mit der Geraden X bilden. Der Einfachheit wegen soll daher dieser Winkel fortan ein rechter sein. Bei einigen spätern Sätzen ist übrigens nur dieser Fall allein zulässig; andere Sätze hingegen würden einen beliebigen Winkel gestatten, und dadurch etwas allgemeiner werden; was indessen unerheblich ist.

§. II.

Sind α und β zwei beliebige gleichartige Größen oder Zahlen, und ist :

$$3. \quad \alpha : \beta = a_1 : b_1,$$

so folgt aus jener Gleichung (1) :

$$4. \quad \alpha a + \beta b = (\alpha + \beta)m.$$

Werden daher die Punkte A und B als fest, und die Größen α und β als ihnen zugeordnete gegebene positive Coefficienten betrachtet, so ergeben sich aus der Gleichung (4) nachfolgende Sätze :

a) Sind in einer Ebene zwei feste Punkte A und B nebst zugehörigen Coefficienten α und β gegeben, und sind a und b die Abstände der beiden Punkte von einer beliebigen Geraden X , so ist die Summe $(\alpha a + \beta b)$ stets gleich dem Producte $(\alpha + \beta)m$ aus der Summe $(\alpha + \beta)$ der Coefficienten in den Abstand m eines dritten bestimmten Punktes M von jener Geraden X . Dieser dritte Punkt M liegt in der Geraden, die A und B verbindet, und theilt sie in Abschnitte, die sich umgekehrt verhalten wie die ihren Endpunkten zugeordneten Coefficienten (3).

b) Soll die Summe $(\alpha a + \beta b)$ einer Constanten K gleich sein, so dafs :

$$5. \quad \alpha a + \beta b = (\alpha + \beta)m = K,$$

so ist auch das Perpendikel m constant, so dafs der Ort seines Fußpunkts N eine Kreislinie ist, welche M zum Centrum und die Gerade X in allen ihren Lagen zur Tangente hat.

c) Ist insbesondere $K = 0$, also :

$$6. \quad \alpha a + \beta b = 0,$$

so geht die Gerade X , weil $m = 0$, in allen ihren Lagen durch den Punkt M .

§. III.

„Sind in einer Ebene irgend n beliebige Punkte A, B, C, D, \dots nebst zugehörigen (positiven) Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ gegeben, so giebt es immer einen andern bestimmten Punkt S von der Beschaffenheit, daß wenn aus jenen Punkten sowohl als aus ihm Perpendikel $a, b, c, d, \dots s$ auf jede beliebige Gerade X gefällt werden, dann jedesmal folgende Gleichung besteht:

$$7. \quad \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \dots = (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \dots)s.$$

Der Beweis dieses Satzes ergiebt sich leicht durch wiederholte Anwendung des obigen Satzes (§. II. a), nämlich wie folgt:

Es seien zunächst nur drei Punkte A, B, C gegeben. In der Geraden AB construiren man den Punkt M , für welchen $AM:BM = \beta:\alpha$ ist, so kann in Rücksicht jeder Geraden X stets gesetzt werden: $\alpha a + \beta a = (\alpha + \beta)m$. Nun suche man in der Geraden MC den Punkt N , für welchen $MN:CN = \gamma:(\alpha + \beta)$, so ist in Rücksicht jeder Geraden X :

$$(\alpha + \beta)m + c\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)n,$$

und mithin

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = (\alpha + \beta + \gamma)n;$$

was unserm Satze gemäß ist, indem der Punkt N und das aus ihm auf die Gerade X gefällte Perpendikel n beziehlich die Stelle von S und s vertreten.

Wäre nun noch ein vierter Punkt D gegeben, so suche man in der Geraden ND den Punkt P , für welchen $NP:DP = \delta:(\alpha + \beta + \gamma)$. Dann hat man für jede Gerade X :

$$(\alpha + \beta + \gamma)n + \delta d = (\alpha + \beta + \gamma + \delta)p$$

und folglich

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = (\alpha + \beta + \gamma + \delta)p;$$

was wiederum dem Satze gemäß ist, indem P und p die Stelle von S und s einnehmen.

Es ist klar, daß man ähnlicherweise zur Bestätigung des Satzes gelangt, wenn 5, 6, $\dots n$ Punkte gegeben sind, und daß durch dieses Verfahren nicht nur die Existenz des eigenthümlichen Punktes S erwiesen, sondern derselbe auch zugleich gefunden wird.

§. IV.

Vermöge der eben bewiesenen Eigenschaft heisst der Punct S „*Punct der mittlern Entfernung*“ in Rücksicht auf die gegebenen Puncte A, B, C, \dots und deren Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Er ist, wie man sieht, identisch mit dem Mittelpuncte paralleler Kräfte, welche auf die gegebenen Puncte wirken und sich verhalten, wie deren respective Coefficienten; oder identisch mit dem Schwerpunkte der gegebenen Puncte, wenn diese mit Gewichten belastet sind, die sich wie jene Coefficienten verhalten. Der Kürze wegen mag daher der Punct S künftig *Schwerpunkt* genannt werden, ohne dafs dabei an die statische Eigenschaft gedacht werden soll.

Dafs die Bedingungen des vorstehenden Satzes (§. III.) nur von einem einzigen Puncte S erfüllt werden können, geht aus dem Beweise selbst klar hervor, kann aber auch, wie folgt, indirecte bewiesen werden. Angenommen nämlich, es gäbe noch einen zweiten Punct S_1 von gleicher Beschaffenheit, so müfste in Rücksicht jeder Geraden X :

$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \dots = (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \dots)s = (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \dots)s_1$
und mithin $s = s_1$ sein. Daher müfste die Gerade SS_1 mit jeder beliebigen Geraden X parallel sein; eine offenbare Unmöglichkeit. Also: „*Ein gegebenes System von Puncten A, B, C, \dots und zugehörigen Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ hat nur einen einzigen Punct der mittlern Entfernung, oder nur einen einzigen Schwerpunkt S .*“

Daher gelangt man durch die obige Construction (§. III.), man mag nun die gegebenen Puncte in dieser oder jener beliebigen Reihenfolge combiniren, stets zu demselben Puncte S . Hieraus ergibt sich unmittelbar eine Reihe von Sätzen über die geradlinigen Vielecke (welche durch die jedesmaligen gegebenen Puncte bestimmt werden). Diese Sätze sollen an einem andern Orte ausführlich entwickelt werden.

§. V.

Soll die Summe der Producte aus den Perpendikeln in die respectiven Coefficienten einen gegebenen oder constanten Werth K haben: soll also

8. $\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \dots = (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \dots)s = K$
sein, so ist der Ort der Geraden X eine Kreislinie, die S zum Mittelpuncte hat. Der Radius s dieses Kreises ändert sich zugleich mit der Summe K , und wird im directen Verhältnifs mit ihr kleiner und gröfser.

Ist insbesondere $K=0$, also:

$$9. \quad \alpha a + \beta b + \gamma c + \dots = (\alpha + \beta + \gamma \dots)s = 0,$$

so ist auch $s=0$, d. h. die Gerade X geht stets durch den Schwerpunkt S ; und umgekehrt, geht die Gerade X durch S , so ist jene Summe K stets $=0$.

Aus diesem besondern Falle ergeben sich weiter nachstehende Folgerungen.

§. VI.

Zieht man aus dem Punkte S Strahlen a_1, b_1, c_1, \dots nach den Punkten A, B, C, \dots , und bezeichnet die Winkel, welche diese Strahlen mit einer durch S gehenden Geraden X , nach einerlei Richtung genommen, bilden, mit $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, so hat man:

$$10. \quad a = a_1 \sin \alpha; \quad b = b_1 \sin \beta; \quad c = c_1 \sin \gamma \text{ etc.}$$

und werden diese Werthe der Perpendikel a, b, c, \dots in die vorige Gleichung (9.) gesetzt, so erhält man folgende neue Gleichung:

$$11. \quad \alpha a_1 \sin \alpha + \beta b_1 \sin \beta + \gamma c_1 \sin \gamma + \dots = 0,$$

welche, in Worten ausgedrückt, heisst:

„Der Schwerpunkt S eines Systems von Punkten A, B, C, \dots und zugehörigen Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ hat die Eigenschaft, daß, wenn man die aus ihm nach jenen Punkten gezogenen Strahlen a_1, b_1, c_1, \dots mit den Sinus der Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, die sie mit irgend einer durch S gehenden Geraden X bilden, und mit den zugehörigen Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ multiplicirt, — daß dann die Summe aller dieser Producte beständig $=0$ ist.“

Der Satz gilt auch, wenn statt der Sinus der Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ die Cosinus derselben genommen werden; was aus der Betrachtung zweier unter sich senkrechter Geraden X klar hervorgeht. Man hat also auch:

$$12. \quad \alpha a_1 \cos \alpha + \beta b_1 \cos \beta + \gamma c_1 \cos \gamma + \dots = 0.$$

Dieser Satz hat bekanntlich auch eine statische Bedeutung. Wenn in den Richtungen von a_1, b_1, c_1, \dots Kräfte auf den Punkt S wirken, die den Producten $\alpha a_1, \beta b_1, \gamma c_1, \dots$ proportional sind, so herrscht Gleichgewicht.

§. VII.

Zieht man ferner aus irgend einem Punkte P der durch S gehenden Geraden X Strahlen a, b, c, \dots nach den Punkten A, B, C, \dots [die oben durch a, b, c, \dots bezeichneten Perpendikel kommen hier nicht

in Betracht], so hat man, wenn $PS = s$ gesetzt wird:

$$13. \quad a^2 = a_1^2 + s^2 - 2a_1s \cos a, \quad b^2 = b_1^2 + s^2 - 2b_1s \cos b, \\ c^2 = c_1^2 + s^2 - 2c_1s \cos c \text{ etc.}$$

woraus durch Multiplication mit den respectiven Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ und nachherige Addition entsteht:

$$14. \quad \alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 + \dots = \alpha a_1^2 + \beta b_1^2 + \gamma c_1^2 + \dots + (\alpha + \beta + \gamma + \dots)s^2 \\ - 2s(\alpha a_1 \cos a + \beta b_1 \cos b + \gamma c_1 \cos c + \dots),$$

und mithin zufolge der Gleichung (12.):

$$15. \quad \alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 + \dots = \alpha a_1^2 + \beta b_1^2 + \gamma c_1^2 + \dots + (\alpha + \beta + \gamma + \dots)s^2, \\ \text{oder in abkürzenden Zeichen geschrieben:}$$

$$16. \quad \Sigma(\alpha a^2) = \Sigma(\alpha a_1^2) + s^2 \Sigma(\alpha).$$

Das heißt:

a. „Ist in einer Ebene eine beliebige Anzahl von Punkten A, B, C, \dots und zugehörigen Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ gegeben, und man zieht aus einem andern beliebigen Punkte P (oder S) nach allen jenen Punkten Strahlen a, b, c, \dots (oder a_1, b_1, c_1, \dots), multiplicirt die Quadrate dieser Strahlen mit den zugehörigen Coefficienten, so ist die Summe dieser Producte dann ein Minimum, wenn der gewählte Punkt der Schwerpunkt S der gegebenen Punkte ist. Ist der gewählte Punkt aber irgend ein anderer P , so ist die ihm entsprechende Summe $\Sigma \alpha a^2$ um das $(\alpha + \beta + \gamma \dots)$ fache Quadrat seines Abstandes s vom Schwerpunkte S größer, als jenes Minimum $\Sigma \alpha a_1^2$.”

b. „Soll die genannte Summe der Producte $\Sigma \alpha a^2$ constant, etwa $= \Sigma$ sein, so daß $\Sigma \alpha a_1^2 + s^2 \Sigma \alpha = \Sigma$, so ist der Ort des Punkts P eine Kreislinie, welche allemal S zum Mittelpunkte und s zum Radius hat.” Und umgekehrt: „Punkten, welche gleichweit vom Schwerpunkte S ab stehen, entsprechen gleiche Summen.” Und ferner: „die Summe Σ und der Radius s ändern sich gleichzeitig, und nehmen zugleich zu oder ab.”

Hienach hat der Punkt S die dritte wesentliche Eigenschaft: daß er der Punkt kleinster Quadrate der Entfernungen ist in Rücksicht der gegebenen Punkte und Coefficienten *).

*) Aus der obigen Gleichung (16) — welche auf gleiche Weise statt findet, die gegebenen Punkte A, B, C, \dots mögen in einer Ebene oder im Raume beliebig liegen — folgen leicht noch einige andere Relationen; wie z. B. die nachstehenden.

Läßt man den willkürlichen Punkt P mit einem der gegebenen n Punkte A, B, C, \dots , z. B. mit A zusammenfallen, so ist $a = 0, b = AB, c = AC, d = AD, \dots, s = a_1 = AS$, und die obige Gleichung (16) wird für diesen Fall:

I. $\beta (AB)^2 + \gamma (AC)^2 + \delta (AD)^2 + \dots = \Sigma(\alpha a_1^2) + a_1^2 \cdot \Sigma(\alpha).$

Crelle's Journal d. M. Bd. XXI. Hft. I.

§. VIII.

Zu der vorstehenden Reihe von Sätzen kann man auch durch eine andere elementare Entwicklung gelangen, welche sich auf einen eben so

Für jeden der gegebenen n Punkte findet eine analoge Gleichung statt. Wird jede dieser Gleichungen mit dem dem jedesmaligen Punkte A, B, C, \dots zugehörigen Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ multiplicirt und werden sodann alle Gleichungen addirt, so kommt:

$$\text{II. } \Sigma[\alpha\beta.(AB)^2] = \Sigma(\alpha) \cdot \Sigma(\alpha a_1^2),$$

d. h.: „wird das Quadrat jeder der $\frac{1}{2}n(n-1)$ Geraden, welche die gegebenen n Punkte paarweise verbinden, in die dem jedesmaligen Punktenpaare zugehörigen Coefficienten multiplicirt, so ist die Summe aller dieser Producte $\Sigma[\alpha\beta(AB)^2]$ gleich einem Producte, dessen einer Factor die Summe der Coefficienten $\Sigma(\alpha)$ und der andere die Summe der Producte $\Sigma(\alpha a_1^2)$ aus den Quadraten der Abstände der gegebenen Punkte von ihrem Schwerpunkte S in die respectiven Coefficienten ist.“

Wird die Gleichung (II.) mit der obigen (16) verbunden und die Gröfse $\Sigma(\alpha a_1^2)$ fortgeschafft, so erhält man:

$$\text{III. } s \cdot \Sigma(\alpha) = \sqrt{\Sigma(\alpha) \cdot \Sigma(\alpha a_1^2) - \Sigma[\alpha\beta(AB)^2]}.$$

Diese Gleichung, durch $\Sigma(\alpha)$ dividirt, giebt den Abstand s des willkürlichen Punkts P von dem Schwerpunkte S ; ein Ausdruck, welchen *Lagrange* zuerst aufgestellt und auf eigenthümliche (doch nicht einfache) Art bewiesen hat (*Mechan. analyt. t. I. sect. III. n°. 20.*). Denkt man sich nach den Richtungen der Strahlen a, b, c, \dots Kräfte $\alpha a, \beta b, \gamma c, \dots$ wirkend, so giebt, wie leicht zu sehen, die vorstehende Gleichung (III.) die Gröfse der Resultante $s \cdot \Sigma(\alpha)$, und zwar hat sie die Richtung des Strahles s , so daß sie also jedesmal durch den Schwerpunkt S geht. Demnach wird sowohl jener Abstand s als diese Resultante $s \Sigma(\alpha)$ gefunden, sobald die Abstände der n Punkte A, B, C, \dots von einander und von dem Punkte P , nebst den zugehörigen Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ gegeben sind.

Für jeden der n Punkte A, B, C, \dots findet eine Gleichung von der Form (I.) statt. Werden diese n Gleichungen addirt, so erhält man:

$$\text{IV. } \Sigma[(\alpha + \beta)(AB)^2] = n \cdot \Sigma(\alpha a_1^2) + \Sigma(\alpha) \cdot \Sigma(a_1^2);$$

d. h.: „wird das Quadrat des Abstandes je zweier der gegebenen n Punkte A, B, C, \dots mit der Summe der den beiden Punkten zugehörigen Coefficienten multiplicirt, so ist die Summe der Producte, $\Sigma[(\alpha + \beta)(AB)^2]$, gleich der n -fachen Summe der Producte aus den Quadraten der Abstände (a_1, b_1, c_1, \dots) der gegebenen Punkte von ihrem Schwerpunkte S in die zugehörigen Coefficienten, $n \Sigma(\alpha a_1^2)$, mehr dem Producte aus der Summe der Coefficienten in die Summe der letztgenannten Quadrate $\Sigma(\alpha) \cdot \Sigma(a_1^2)$.“

Aus (II.) und (IV.) die Gröfse $\Sigma(\alpha a_1^2)$ eliminirt, giebt:

$$\text{V. } \Sigma(a_1^2) \cdot (\Sigma(\alpha))^2 = \Sigma(\alpha) \cdot \Sigma[(\alpha + \beta)(AB)^2] - n \cdot \Sigma[\alpha\beta(AB)^2],$$

woraus z. B. die Summe der Quadrate $\Sigma(a_1^2)$ der Abstände des Schwerpunkts S von den n Punkten A, B, C, \dots gefunden wird, wenn diese Punkte nebst den zugehörigen Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ gegeben sind.

Für den besondern Fall, wo die Coefficienten einander gleich, also $\alpha = \beta = \gamma = \dots = 1$ gesetzt werden können, reduciren sich die Gleichungen (II., IV. und V.) auf folgende:

$$\text{VI. } \Sigma(AB)^2 = n \cdot \Sigma(a_1^2),$$

welche zeigt: „daß die n -fache Summe der Quadrate der Strahlen a_1, b_1, c_1, \dots , die den Schwerpunkt S mit den gegebenen Punkten A, B, C, \dots verbinden, gleich ist der Summe der Quadrate der Abstände dieser letztgenannten Punkte von einander.“ — Dieser Satz, auf regelmässige Vielecke angewendet, giebt unmittelbar einige bekannte Sätze. Analoge Sätze folgen aus ihm über regelmässige Polyeder.

Unter derselben Beschränkung reducirt sich die Gleichung (III.) auf folgende:

$$\text{VII. } (ns)^2 = n \cdot \Sigma(a^2) - \Sigma(AB)^2.$$

einfachen Fundamentalsatz gründet, als die vorige (§. I.). Die Sätze gehen dann in umgekehrter Ordnung auseinander hervor, so daß man zuerst auf die eben ausgesprochenen Resultate (§. VII.) geführt wird und sofort aus diesen die ihnen im Obigen vorangehenden Sätze ableiten kann. Für Freunde einfacher geometrischer Betrachtungen möchte eine kurze Andeutung dieser andern Entwicklungsart nicht uninteressant sein; deshalb Folgendes.

§. IX.

Fundamentalsatz. „Zieht man aus der Spitze P eines beliebigen Dreieckes APB (Fig. 3.) nach irgend einem Punkte M der Grundlinie AB die Gerade $PM = m$, bezeichnet die Abschnitte AM und BM der Grundlinie beziehlich durch b_1 und a_1 und die Schenkel AP und BP durch a und b , so ist immer:

$$17. \quad a_1 a^2 + b_1 b^2 = (a_1 + b_1) m^2 + (a_1 + b_1) a_1 b_1.$$

Denn zufolge einer trigonometrischen Grundgleichung hat man, wenn φ den Winkel AMP bezeichnet:

$$18. \quad \cos \varphi = \frac{m^2 + b_1^2 - a^2}{2 m b_1} = - \frac{m^2 + a_1^2 - b^2}{2 m a_1},$$

woraus leicht jene Gleichung (17) folgt. Der Beweis kann übrigens auch geometrisch, durch den sogenannten verallgemeinerten pythagoräischen Lehrsatz, eben so einfach geführt werden.

§. X.

Setzt man

$$19. \quad a_1 : b_1 = \alpha : \beta,$$

wo α und β beliebige gleichartige Gröfsen oder Zahlen sind, so läßt sich dadurch die obige Gleichung (§. IX. 17) in folgende verwandeln:

$$20. \quad \alpha a^2 + \beta b^2 = (\alpha + \beta) m^2 + (\alpha + \beta) a_1 b_1,$$

woraus man unter andern nachstehende Sätze schließt:

a. „Sind in einer Ebene zwei feste Punkte A und B , nebst zugehörigen Coefficienten α , β gegeben, und werden die Quadrate ihrer Abstände a , b von einem beliebigen Punkte P mit den respectiven Coefficienten multiplicirt: so ist die Summe der Producte $\alpha a^2 + \beta b^2$, stets um die Constante $(\alpha + \beta) a_1 b_1$ gröfser, als das Product $(\alpha + \beta) m^2$, dessen einer Factor die Summe $(\alpha + \beta)$ der Coefficienten und der andere das Quadrat des Abstandes m des Punktes P von einem dritten, festen Punkte M ist. Dieser dritte bestimmte Punct M liegt auf der Geraden, welche

A und B verbindet und theilt sie in Abschnitte, die sich umgekehrt verhalten, wie die ihren Endpunkten zugehörigen Coefficienten." (19.)

b. Sind die Punkte A und B, nebst den Coefficienten α und β gegeben, und soll die Summe $\alpha a^2 + \beta b^2$ constant, etwa $= K$ sein: so ist auch m constant und mithin der Ort des Puncts P eine Kreislinie, deren Mittelpunkt M ist. Umgekehrt entsprechen Puncten P , die gleichweit von M abstehen, gleiche Summen $\alpha a^2 + \beta b^2$. Auch nehmen diese Summe und der Radius m des Kreises gleichzeitig zu und ab, so dass also

c. Die Summe $\alpha a^2 + \beta b^2$ ein Minimum, $= \alpha a_1^2 + \beta b_1^2$ wird, wenn $m = 0$ ist, d. h. wenn der Punct P auf den festen Punct M fällt.

§. XI.

a. „Sind in einer Ebene irgend eine Anzahl beliebiger Punkte A, B, C,, nebst zugehörigen Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ gegeben, so giebt es einen andern bestimmten Punct S, von der Beschaffenheit, dass, wenn man aus jedem beliebigen Puncte P Strahlen a, b, c, s nach allen Puncten zieht, immer:

21. $\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 + \dots = (\alpha + \beta + \gamma + \dots) s^2 + K$ ist, wo K eine constante, aber von den gegebenen Elementen abhängige Gröfse bezeichnet."

Der Beweis dieses Satzes ist dem des entsprechenden Satzes in (§. III.) analog. Er beruht nämlich blofs auf wiederholter Anwendung des vorigen Satzes (§. X.). Denn, seien zunächst nur drei Puncte A, B, C gegeben, so hat man in Rücksicht der Puncte A und B:

$\alpha a^2 + \beta b^2 = (\alpha + \beta) m^2 + (\alpha + \beta) a_1 b_1 = (\alpha + \beta) m^2 + (\alpha + \beta) AM \cdot BM$,
und ferner in Rücksicht der Puncte \bar{M} und C, denen die Coefficienten $(\alpha + \beta)$ und γ zugehören:

$$(\alpha + \beta) m^2 + \gamma c^2 = (\alpha + \beta + \gamma) n^2 + (\alpha + \beta + \gamma) MN \cdot CN;$$

woraus durch Verbindung beider Gleichungen folgt:

$\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 = (\alpha + \beta + \gamma) n^2 + (\alpha + \beta + \gamma) MN \cdot CN + (\alpha + \beta) AM \cdot BM$;
was dem Satze gemäß ist, da die zwei letzten Glieder rechts constant sind. Der Punct N nämlich liegt auf der Geraden MC und theilt sie in Abschnitte MN und CN, die sich verhalten wie γ zu $(\alpha + \beta)$, gerade eben so wie in (§. III.); n ist der Strahl, der N mit dem beliebigen Puncte P verbindet.

Gleicherweise gelangt man zum Beweise des Satzes für vier, fünf, n Puncte.

Aus dem vorstehenden Satze ergeben sich ferner folgende Sätze:

b. „Soll die Summe der Producte, $\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 + \dots$ constant, etwa $= \Sigma$ sein, so daß

22. $\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 + \dots = \Sigma = (\alpha + \beta + \gamma + \dots) s^2 + K$,
so ist der Ort des Punctes P eine Kreislinie, welche stets den festen Punct S zum Mittelpuncte und s zum Radius hat. Die Summe Σ und der Radius s des Kreises nehmen gleichzeitig zu, oder ab.“ Daher folgt weiter.

c. „Die Summe Σ wird ein Minimum, wenn $s = 0$, d. h. wenn P auf den bestimmten Punct S fällt. Also entspricht unter allen Puncten der Ebene dem Puncte S die kleinste Summe, und zwar ist in diesem Falle:

$$23. \quad \Sigma = \alpha a_1^2 + \beta b_1^2 + \gamma c_1^2 + \dots = K,$$

wo a_1, b_1, c_1, \dots die Strahlen sind, welche S mit den gegebenen Puncten A, B, C, \dots verbinden (§. VI.), und wodurch die Constante K auf eine zweite Art bestimmt wird.“

§. XII.

Wie man sieht sind wir auf diesem zweiten Wege zu denselben Sätzen gelangt, welche sich in (§. VII.) befinden. Die diesen letztern vorangehenden Sätze kann man nun, wie schon (§. VIII.) erwähnt worden, umgekehrt aus den vorstehenden leicht erhalten.

Ferner lassen sich aus der gegenwärtigen Betrachtung unmittelbar eine große Reihe von Sätzen über die geradlinigen Vielecke und den Kreis entwickeln, welche von den früher erwähnten (§. IV.) verschieden sind, ihnen jedoch zum Theil, als in gewissem Sinne entsprechend, an die Seite gesetzt werden können. Diese Sätze sind wegen ihrer Einfachheit und ihres innigen Zusammenhangs unter sich besonders geeignet, beim Unterrichte das Interesse der Schüler zu erwecken und dieselben zur Selbstthätigkeit anzuregen; wovon mich frühere Erfahrungen überzeugt haben. Ich werde dieselben an geeignetem Orte abhandeln; hier liegen sie außer unserm eigentlichen Zwecke. Aber auch ein großer Theil der in dieser Abhandlung enthaltenen Sätze lassen sich ohne Schwierigkeit dem Schulpensum einverleiben, und zwar um so leichter, wenn sie mit den hier übergangenen Sätzen, so wie mit denjenigen, welche, bei den nachfolgenden Betrachtungen als von unserm nächsten Zwecke abliegend, unberücksichtigt bleiben müssen, im Zusammenhange vorgetragen werden.

§. XIII.

In Bezug auf die obigen Sätze (§. XI. oder VII.) kann noch Folgendes bemerkt werden.

Sind die Summen der Producte $\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 + \dots$ für zwei gegebene Punkte P und P_1 bekannt: sind sie z. B. Σ und Σ_1 , so hat man vermöge (§. XI. 22.):

$$\Sigma - \Sigma_1 = (\alpha + \beta + \gamma + \dots)(s^2 - s_1^2),$$

oder

$$24. \quad s^2 - s_1^2 = \frac{\Sigma - \Sigma_1}{(\alpha + \beta + \gamma + \dots)},$$

wo s und s_1 die Strahlen sind, welche die gegebenen Punkte P und P_1 mit dem Schwerpunkte S verbinden. Diese Strahlen s und s_1 werden durch die Gleichung (24) nicht bestimmt. Sieht man sie aber als veränderlich an, als Strahlen, welche die Punkte P und P_1 mit irgend einem Punkte S_1 verbinden, so ist, da der Ausdruck rechts (24) constant oder gegeben ist, der Ort des Punktes S_1 eine leicht zu construierende Gerade, welche auf der Geraden PP_1 senkrecht steht und durch den Schwerpunkt S geht. Kennt man daher noch von einem dritten gegebenen Punkte P_2 (welcher jedoch nicht in der geraden PP_1 liegen darf) die ihm entsprechende Summe Σ_2 , so ist der Schwerpunkt S bestimmt und leicht zu finden. Nämlich er muß dann in noch zwei Geraden liegen, welche mittelst der Gleichungen

$$s^2 - s_2^2 = \frac{\Sigma - \Sigma_2}{(\alpha + \beta + \gamma + \dots)} \quad \text{und} \quad s_1^2 - s_2^2 = \frac{\Sigma_1 - \Sigma_2}{(\alpha + \beta + \gamma + \dots)}$$

gefunden werden. Der gemeinsame Durchschnitt dieser beiden Geraden mit der ersten (24) ist der verlangte Schwerpunkt S .

Ferner mag noch erwähnt werden, daß wenn statt der Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, welche einem gegebenen Systeme von Punkten A, B, C, \dots angehören, andere genommen werden, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots$, die sich unter einander so verhalten, wie jene ersten: daß dann der Schwerpunkt S des Systems für beide Fälle derselbe ist. Denn alsdann lassen sich die neuen Coefficienten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots$ immer durch $x\alpha, x\beta, x\gamma, \dots$ ausdrücken, wo x irgend eine bestimmte Zahlengröße bezeichnet.

Von den Fußpunkten-Vielecken und Fußpunkten-Curven.

A. Von den Fußpunkten-Vielecken.

§. XIV.

Erklärung. Fället man auf alle Seiten eines gegebenen Vielecks \mathfrak{B} , aus einem in seiner Ebene liegenden Punkte P Perpendikel und verbindet deren Fußpunkte der Reihe nach paarweise durch Gerade, so entsteht ein neues Vieleck V , welches dem gegebenen eingeschrieben und mit demselben von gleicher Gattung ist. Dieses neue Vieleck V soll fortan „*Fußpunkten-Vieleck des Punktes P in Bezug auf das gegebene Vieleck \mathfrak{B}* “ heißen.

Jedem Punkte P in der Ebene des gegebenen Vielecks \mathfrak{B} entspricht also ein bestimmtes Fußpunkten-Vieleck V , selbst in dem Falle, wo der Punkt P mit einer Ecke des gegebenen Vielecks \mathfrak{B} zusammen, oder in eine Seite desselben fällt. Dabei kann unter besondern Umständen das Fußpunkten-Vieleck in gewisse Grenzfälle übergehen.

§. XV.

„In der Ebene eines gegebenen Vielecks \mathfrak{B} ist der Ort aller Punkte P , deren Fußpunkten-Vielecke V in Bezug auf \mathfrak{B} einen gleichen gegebenen Inhalt haben sollen, eine bestimmte Kreislinie, deren Radius mit diesem Inhalte sich gleichzeitig ändert, deren Mittelpunkt aber stets einer und derselbe feste Punkt S ist. Dieser Punkt S ist nämlich der Schwerpunkt der Ecken des gegebenen Vielecks \mathfrak{B} , insofern jeder derselben der Sinus des doppelten Nebenwinkels von dem an ihr liegenden Winkel des gegebenen Vielecks \mathfrak{B} als Coefficient zugeordnet wird.“

Es sei etwa $ABCD$ (Fig. 4.) das gegebene Vieleck \mathfrak{B} , und aus einem beliebigen Punkte P seien auf die Seiten desselben die Perpendikel PA_1 , PB_1 , PC_1 , PD_1 gefällt, so ist $A_1B_1C_1D_1$ das dem Punkte P entsprechende veränderliche Fußpunkten-Vieleck V . Bezeichnen wir ferner durch a, b, c, d die veränderlichen Strahlen PA, PB, PC, PD , welche von dem Punkte P nach den Ecken des gegebenen Vielecks V gehen, und durch A, B, C, D die Nebenwinkel der diesen Ecken anliegenden Winkel DAB, ABC, BCD, CDA : so hat man vermöge der constanten

(und theils rechten) Winkel der Vierecke AD_1PA_1 , BA_1PB_1 , etc., zwischen dem Inhalte dieser Vierecke und dem der entsprechenden Dreiecke D_1PA_1 , A_1PB_1 , etc. folgende Gleichungen:

$$25. \quad \begin{cases} 2 \cdot D_1PA_1 - AD_1PA_1 = \frac{1}{4}a^2 \sin 2A, \\ 2 \cdot A_1PB_1 - BA_1PB_1 = \frac{1}{4}b^2 \sin 2B, \\ 2 \cdot B_1PC_1 - CB_1PC_1 = \frac{1}{4}c^2 \sin 2C, \\ 2 \cdot C_1PD_1 - DC_1PD_1 = \frac{1}{4}d^2 \sin 2D. \end{cases}$$

Nun machen aber die in diesen Gleichungen enthaltenen Dreiecke zusammen das Vieleck $A_1B_1C_1D_1$, und die vorkommenden Vierecke zusammen das Vieleck $ABCD$ aus; also folgt durch Addition derselben:

$$26. \quad 2A_1B_1C_1D_1 - ABCD = \frac{1}{4}(a^2 \sin 2A + b^2 \sin 2B + c^2 \sin 2C + d^2 \sin 2D).$$

Es ist klar, daß man allemal eine ähnliche Gleichung erhält, so viele Seiten auch immer das gegebene Vieleck \mathfrak{B} haben mag. Daher ist allgemein, wenn \mathfrak{B} den Inhalt des gegebenen und V den Inhalt des Fußpunkten-Vieleckes bezeichnet,

$$27. \quad 4(2V - \mathfrak{B}) = a^2 \sin 2A + b^2 \sin 2B + c^2 \sin 2C + \dots = \Sigma(a^2 \sin 2A).$$

Durch diese Gleichung wird die Richtigkeit des Satzes vollständig dargethan. Denn soll der Punct P so gewählt sein, daß der Inhalt V seines Fußpunkt-Vieleckes eine gegebene constante Gröfse sei, so ist auch die Differenz $(2V - \mathfrak{B})$ constant; und dann stimmt die Gleichung (27) ganz mit der frühern in (§. XI. 22) oder (§. VII. 16) überein, indem die bekannten Gröfsen $\sin 2A$, $\sin 2B$, etc. die Stelle der frühern Coefficienten α , β , etc. vertreten. Deshalb muß auch im gegenwärtigen Falle der Ort des Punctes P eine Kreislinie sein, welche den im Satze beschriebenen Schwerpunkt S zum Mittelpuncte hat.

§. XVI.

Um den aufgestellten Satz ausführlicher zu erörtern, werde die letzte Gleichung (27) nach dem Muster der Gleichung (16) in (§. VII.) umgewandelt, so erhält man:

$$\begin{aligned} 28. \quad 4(2V - \mathfrak{B}) &= a_1^2 \sin 2A + b_1^2 \sin 2B + c_1^2 \sin 2C + \dots \\ &\quad + s^2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C + \dots) \\ &= \Sigma(a_1^2 \sin 2A) + s^2 \Sigma(\sin 2A), \end{aligned}$$

wo nämlich a_1 , b_1 , c_1 , und s die Strahlen sind, welche den beschriebenen Schwerpunkt S mit den Ecken A , B , C , und mit dem beliebigen Puncte P verbinden.

Bezeichnet man also mit v den Inhalt desjenigen Fußpuncken-Vielecks, welches dem Schwerpuncte S selbst entspricht, so ist für diesen Fall $s = 0$, und mithin:

$$29. \quad 4(2v - \mathfrak{B}) = \Sigma(a_1^2 \sin 2A).$$

Zieht man diese Gleichung von der vorhergehenden (28) ab, so erhält man

$$30. \quad 4(V - v) = \frac{1}{2}s^2 \cdot \Sigma(\sin 2A).$$

Hieraus sieht man: „dafs die Inhalts-Zunahme des Fußpuncken-Vielecks V mit dem Quadrate des Abstandes s des zugehörigen Punctes P vom Schwerpuncte S in gleichem Verhältnisse wächst oder schwindet.“

Ferner folgt daraus:

„Dafs im Allgemeinen unter allen Fußpuncken-Vielecken dasjenige v , welches dem Schwerpuncte S entspricht, entweder ein Minimum oder ein Maximum des Inhalts hat, je nachdem beziehlich die constante Gröfse $\Sigma(\sin 2A)$ positiv oder negativ ist.“

Ob aber diese Gröfse $\Sigma(\sin 2A)$ positiv oder negativ sei, hängt von folgenden Umständen ab. Nämlich: 1) sind die Winkel A, B, C, \dots alle spitz, so ist die Gröfse offenbar positiv, und dann findet also für das Fußpuncken-Vieleck von S ein Minimum des Inhalts Statt. 2) Sind dagegen unter den Winkeln A, B, C, \dots einige stumpf, so kann möglicher Weise $\Sigma(\sin 2A)$ negativ, also der Inhalt des Fußpuncken-Vielecks von S ein Maximum werden. Dieser Fall kann besonders eintreten, wenn das gegebene Vieleck \mathfrak{B} ein nicht convexes ist; er kann aber auch bei convexen Vielecken Statt finden, und tritt insbesondere beim Dreieck immer ein, (denn wenn das gegebene Vieleck \mathfrak{B} ein Dreieck ist, so sind mindestens zwei von den drei Winkeln A, B, C stumpf, und man überzeugt sich leicht, dafs dabei immer $\Sigma(\sin 2A)$ negativ ausfällt).

Ist insbesondere $\Sigma(\sin 2A) = 0$, so findet weder ein Minimum noch ein Maximum Statt, sondern in diesem Falle ist der Inhalt des Fußpuncken-Vielecks V für alle Puncte P constant.

§. XVII.

Für spätere Untersuchungen ist es zweckmäfsig die Bedeutung des Ausdrucks:

31. $\frac{1}{2}s^2 \Sigma(\sin 2A) = \frac{1}{2}s^2 \sin 2A + \frac{1}{2}s^2 \sin 2B + \frac{1}{2}s^2 \sin 2C + \dots$, welcher die vierfache Differenz zwischen den Inhalten der Fußpuncken-Vielecke eines beliebigen Puncts P und des Puncts S repräsentirt (30)

näher anzugeben. Wir beschränken uns hiebei auf den bestimmten Fall, wo das gegebene Vieleck \mathfrak{B} convex ist, und wo überdies die Nebenwinkel A, B, C, \dots seiner sämtlichen Winkel spitz, also $\Sigma(\sin 2A)$ positiv ist. In diesem Falle ist bekanntlich die Summe der Nebenwinkel A, B, C, \dots gleich 2π , und daher:

$$32. \quad 2A + 2B + 2C + 2D + \dots = 4\pi.$$

Wird bemerkt, daß $\frac{1}{2}s^2 \sin 2A$ der Flächen-Inhalt eines gleichschenkligen Dreieckes ist, dessen Schenkel $= s$ und dessen Winkel an der Spitze $= 2A$ ist, so folgt, daß die Größe $\frac{1}{2}s^2 \Sigma(\sin 2A)$ in (31) als die Inhaltssumme von n gleichschenkligen Dreiecken anzusehen ist, deren Schenkel alle $= s$ und deren Winkel an der Spitze beziehlich $2A, 2B, 2C, \dots$ sind. Man denke sich ein Vieleck \mathfrak{U} von der Beschaffenheit, daß es, einem Kreise vom Radius s eingeschrieben, in demselben zwei Umläufe macht *), und daß die über seinen Seiten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots$ stehenden Centriwinkel jenen Winkeln $2A, 2B, 2C, \dots$ beziehlich gleich (und zusammen $= 4\pi$) sind: so ist der Inhalt dieses Vielecks offenbar die Summe der genannten Dreiecke; denn jenes wird durch die nach seinen Ecken gehenden Radien in der That in diese zerlegt. Also ist:

$$33. \quad \frac{1}{2}s^2 \cdot \Sigma(\sin 2A) = \mathfrak{U},$$

und daher (30):

$$4(V - v) = \mathfrak{U}, \quad \text{oder}$$

$$34. \quad V = v + \frac{1}{4} \cdot \mathfrak{U}.$$

Somit hat man für den gegenwärtigen Fall folgenden Satz:

„Ist in Rücksicht eines gegebenen Vielecks \mathfrak{B} der Inhalt des dem Schwerpunkte S entsprechenden Fußspunten-Vieleckes v bekannt, so kann der Inhalt jedes Fußspunten-Vieleckes V , welches einem beliebigen, von S um die Entfernung s abstehenden Punkte P entspricht, dadurch gefunden werden, daß man zu jenem Inhalte v den vierten Theil des Inhalts eines andern bestimmten Vielecks \mathfrak{U} addirt. Dieses andere Vieleck \mathfrak{U} ist einem Kreise vom Radius s eingeschrieben, macht in demselben zwei Umläufe, und über seinen Seiten stehen Centriwinkel, die den doppelten Nebenwinkeln der Winkel des gegebenen Vielecks \mathfrak{B} gleich sind.“

*) Leser, welche mit solchen Vielecken nicht vertraut sind, können sich einen Begriff davon machen, wenn sie z. B. in einem beliebigen Fünfecke im Kreise die fünf Diagonalen in einem Zuge ziehen; denn diese sind sofort die Seiten eines Fünfecks von zwei Umläufen.

§. XVIII.

Anmerkung. Auch hier müssen zahlreiche specielle Sätze übergangen werden, welche sich unmittelbar aus dem Vorstehenden ableiten ließen. Nur folgende im Eingange erwähnten Sätze von *Querret*, *Sturm* und *Lhuillier* über das beliebige Dreieck und das regelmäßige Vieleck (n Eck) mögen hier Platz finden.

1. Bei einem beliebigen Dreieck $\mathfrak{B}(ABC)$ kann leicht direct nachgewiesen werden, daß der Mittelpunkt des ihm umschriebenen Kreises zugleich der Schwerpunkt S der Ecken ist, wenn diesen die Sinus der doppelten Nebenwinkel als Coefficienten zugeordnet sind. Dasselbe kann aber auch aus dem obigen Satze (§. XVII.) geschlossen werden. Denn fällt der Punct P mit einer der Ecken des Dreiecks zusammen, so wird der Inhalt des Fußpunkten-Dreiecks jedesmal $= 0$; daher liegen die drei Ecken in einem Ortskreise, dessen Mittelpunkt der genannte Schwerpunkt S sein muß. Ferner schließt man hieraus den bekannten Satz: „daß wenn aus irgend einem Puncte des dem Dreiecke umschriebenen Kreises Perpendikel auf die drei Seiten des Dreiecks gefällt werden, dann die Fußpunkte dieser Perpendikel allemal in einer Geraden liegen. Es muß nämlich wieder der Inhalt des Fußpunkten-Dreiecks $= 0$ sein.“

2. Der citirte Satz über jedes regelmäßige Vieleck \mathfrak{B} folgt gleichfalls sehr leicht. Nämlich einmal daraus, daß alle Winkel des Vielecks und also auch alle Coefficienten $\sin 2A$, $\sin 2B$, $\sin 2C$ etc. unter sich gleich sind, mithin der Mittelpunkt des Vielecks zugleich der ihm zugehörige Schwerpunkt S sein muß. Zweitens daraus, daß allen Ecken des Vielecks \mathfrak{B} , wenn der Punct P der Reihe nach in sie verlegt wird, Fußpunkten Vielecke V von gleichem Inhalte, und zwar congruente, entsprechen, so daß also der durch die Ecken gehende Kreis ein Ortskreis (für P) ist, und als solcher den Schwerpunkt S zum Mittelpunkte haben muß. Eben so würden den Mitten der Seiten des gegebenen Vielecks \mathfrak{B} congruente Fußpunkten-Vielecke V entsprechen; was zu ähnlichen Schlüssen berechtigte.

§. XIX.

Kennt man in Bezug auf ein gegebenes Vieleck \mathfrak{B} die Inhalte der Fußpunkten-Vielecke V , V_1 , V_2 irgend dreier gegebener Puncte P , P_1 , P_2 und bezeichnet man durch s , s_1 , s_2 die Abstände dieser Puncte vom Schwer-

puncte S , so hat man folgende Gleichungen (§. XVII. und XIII.):

$$35. \quad \begin{cases} V - V_1 = \frac{1}{8}(s^2 - s_1^2) \Sigma(\sin 2A), \\ V - V_2 = \frac{1}{8}(s^2 - s_2^2) \Sigma(\sin 2A), \\ V_1 - V_2 = \frac{1}{8}(s_1^2 - s_2^2) \Sigma(\sin 2A). \end{cases}$$

Sieht man s, s_1, s_2 als veränderlich an, dagegen V, V_1, V_2 und $\Sigma(\sin 2A)$ als constant oder die Punkte P, P_1, P_2 als fest, so werden durch diese Gleichungen drei Gerade X_2, X_1, X bestimmt, welche auf den Seiten des Dreieckes PP_1P_2 senkrecht stehen und sich im Schwerpunkte S gegenseitig schneiden (§. XIII.). Durch je zwei derselben wird also, im Allgemeinen, der Schwerpunkt S gefunden.

B. Von den Fußspuncten-Curven.

§. XX.

Das der vorigen Betrachtung zu Grunde liegende Vieleck \mathfrak{B} kann man in der Vorstellung sich so verändern lassen, daß es immer mehr sich irgend einer Curve nähert und endlich in diese übergeht. Läßt man nämlich die Seitenzahl des Vieleckes immer mehr zunehmen, jede einzelne Seite aber zugleich schwinden, so nähert sich das Vieleck, wenn die Seitenzahl sehr groß und jede Seite sehr klein geworden ist, offenbar irgend einer Curve; und wird die Seitenzahl unendlich groß und jede Seite unendlich klein (wie man zu sagen pflegt), so kann schlechthin das Vieleck als eine Curve angesehen werden. Eben so kann man umgekehrt jede gegebene Curve \mathfrak{B} als ein Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachten, die alle unendlich klein sind. Dabei ist klar: daß die verlängerten Seiten des Vieleckes in die Tangenten der Curve übergehen, und daß die oben betrachteten Nebenwinkel A, B, C, \dots bei der Curve unendlich klein werden, indem sie nämlich hier die äußern Winkel sind, unter welchen sich die zunächst auf einander folgenden Tangenten der Curve gegenseitig schneiden, oder, wenn man sich kurz fassen will, als die Winkel angesehen werden können, welche die einzelnen Tangenten in ihren Berührungspuncten mit der Curve selbst bilden. Ferner ist klar, daß beim Uebergang des Vieleckes \mathfrak{B} in eine Curve, auch das irgend einem Punkte P zugehörige Fußspuncten-Vieleck V in eine Curve übergeht, welche daher gleicherweise: „*Fußspuncten-Curve des Punctes P in Bezug auf die gegebene Curve \mathfrak{B}* “ heißen soll. Sie ist nämlich der Ort der Fußpuncte aller aus

dem Punkte P auf die Tangenten der Curve \mathfrak{B} gefälltten Perpendikel. Dafs diese Fußpunkte in der That eine continuirliche Curve bilden, erhellet auch unmittelbar aus der Anschauung. Denn wenn ein rechter Winkel sich so bewegt, dafs, während der eine Schenkel als Tangente an der Curve \mathfrak{B} fortschreitet, der andere beständig durch den festen Punkt P geht, so beschreibt sein Scheitel eine Curve: die genannte Fußpunkten-Curve V .

Da auf diese Weise die Vielecke \mathfrak{B} und V in die Curven \mathfrak{B} und V übergehen, so müssen nothwendig die oben über jene aufgestellten Sätze auch für diese ihre Gültigkeit behalten. Daher kann z. B. unmittelbar geschlossen werden: *a)* dafs es für jede geschlossene und convexe Curve \mathfrak{B} einen Punkt S geben mufs, dessen Fußpunkten-Curve v in Bezug auf jene unter allen den kleinsten Inhalt hat, und dafs allen um einen gleichen Abstand s von S entfernten Punkten P Fußpunkten-Curven V von gleichem Inhalt entsprechen, und auch umgekehrt; *b)* dafs unter den genannten Gröfsen (\mathfrak{B} , v , s , V etc.) auch die obigen Gleichungen (§. XVI. und XVII.) bestehen; *c)* dafs ferner, wenn die gegebene Curve \mathfrak{B} einen Mittelpunkt besitzt, derselbe auch zugleich jener eigenthümliche Punkt S sein mufs (§. XVIII. 2.) u. s. w.

Aus diesen angedeuteten Sätzen liefsen sich nun z. B. in Bezug auf den Kreis und die Ellipse unmittelbar eine Reihe von Sätzen ableiten. Denn da man in Bezug auf den Kreis die Fußpunkten-Curve v seines Mittelpuncts S , und bei der Ellipse die Fußpunkten-Curve V ihres Brennpunctes P , so wie dessen Abstand s vom Mittelpunkt S kennt, so kann für beide leicht der Inhalt der Fußpunkten-Curve jedes beliebigen Punctes P gefunden werden. Auf diese Sätze werden wir später zurückkommen. Zunächst aber ist die Eigenschaft des Punctes S bei allgemeinen Curven bestimmter anzugeben und dessen Beziehung zu der Curve selbst genauer zu erforschen.

§. XXI.

Da die Bestimmung des Punctes S beim Vielecke \mathfrak{B} von den Sinus der doppelten Nebenwinkel $2A$, $2B$, $2C$, abhängt, diese Winkel aber bei der Curve \mathfrak{B} unendlich klein, ihre Sinus mithin unbrauchbar werden, so kommt es darauf an, zu erforschen, welche andere bestimmte Gröfsen an die Stelle dieser Sinus treten können.

Zu diesem Zwecke nehmen wir das ursprüngliche Vieleck \mathfrak{B} gleichseitig an; was unbeschadet der Allgemeinheit der daraus zu folgender Resultate geschehen darf. Es sei also z. B. $ZABCD \dots$ (Fig. 5.) ein Theil eines beliebigen gleichseitigen, convexen Vielecks \mathfrak{B} . Aus den Mitten $A_1, B_1, C_1, D_1, \dots$ der Seiten errichte man auf diese die Perpendikel $A_1R, B_1RS, C_1ST, \dots$, nehme jedes davon bis zu dem Punkte R, S, T, \dots , wo es von dem nachfolgenden geschnitten wird, und setze die Abschnitte $A_1R = \alpha_1, B_1S = \beta_1, C_1T = \gamma_1, \dots$; ferner ziehe man die Strahlen $AR = \alpha, BS = \beta, CT = \gamma \dots$ und bezeichne durch h die halbe Seite des Vielecks, so daß $h = AA_1 = AB_1 = BC_1 = \dots$, so hat man z. B., vermöge des Viereckes AA_1RB_1 , in welchem $RA_1 = RB_1 = \alpha_1$ und die Winkel bei A_1 und B_1 rechte sind, folgende Gleichung:

$$36. \quad \sin(2A) = 4 \frac{h \alpha_1 (\alpha_1^2 - h^2)}{\alpha^4} = 4 \frac{h}{\alpha} \left(\frac{\alpha_1^2}{\alpha^3} - \frac{h^2 \alpha_1}{\alpha^3} \right).$$

Eben so ist

$$\sin 2B = 4 \frac{h}{\beta} \left(\frac{\beta_1^2}{\beta^3} - \frac{h^2 \beta_1}{\beta^3} \right); \quad \sin 2C = 4 \frac{h}{\gamma} \left(\frac{\gamma_1^2}{\gamma^3} - \frac{h^2 \gamma_1}{\gamma^3} \right); \text{ etc.}$$

und daher ist z. B.

$$37. \quad \frac{\sin(2A)}{\sin(2C)} = \frac{\gamma}{\alpha} \left(\frac{\alpha_1^2}{\alpha^3} - \frac{h^2 \alpha_1}{\alpha^3} \right) : \left(\frac{\gamma_1^2}{\gamma^3} - \frac{h^2 \gamma_1}{\gamma^3} \right).$$

Es kommt nun darauf an, den Werth dieses Verhältnisses (37) für den Fall zu bestimmen, wo das Vieleck \mathfrak{B} in eine Curve übergegangen ist. Da, um zu diesem Falle zu gelangen, die halbe Seite h immer kleiner und zuletzt unendlich klein werden muß, so nähern sich α_1 und α, γ_1 und γ immer mehr der Gleichheit, bis zuletzt schlechterdings $\alpha_1 = \alpha$ und $\gamma_1 = \gamma$ zu setzen ist. Dann wird aber zugleich $\alpha_1^3 : \alpha^3 = 1, \gamma_1^3 : \gamma^3 = 1$ und, weil h gegen α und γ unendlich klein ist, $h^2 \alpha_1 : \alpha^3 = 0$ und $h^2 \gamma_1 : \gamma^3 = 0$. Demnach hat man als Grenzwert des Verhältnisses (37), oder für die Curve \mathfrak{B} :

$$38. \quad \sin(2A) : \sin(2C) = \gamma : \alpha = \frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\gamma}.$$

In diesem Falle aber sind die Strahlen $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ die Krümmungsradien der Curve \mathfrak{B} in den Punkten A, B, C, \dots ; was aus der Construction erhellet. Denn es ist z. B. R der Mittelpunkt und α der Radius eines Kreises, der durch drei auf einander folgende Ecken Z, A, B des Vielecks \mathfrak{B} geht, und welcher beim Uebergang des Vielecks in die Curve zum Krümmungskreise dieser letztern im Punkte A wird. Somit sind wir zu folgendem Resultate gelangt (38):

„Die Sinus der doppelten Winkel $2A, 2B, 2C, \dots$, welche die Tangenten einer Curve \mathfrak{B} in ihren Berührungspunkten mit der Curve selbst bilden (oder unter welchen sich die auf einander folgenden Tangenten schneiden), verhalten sich umgekehrt wie die Krümmungsradien $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, oder direct wie die Krümmungen der Curve in den betreffenden Berührungspunkten.“

Dieses Resultat kann auch aus folgender Betrachtung abgeleitet werden. Da der durch A bezeichnete Winkel (Nebenwinkel von ZAB) dem Winkel A_1RB_1 gleich und dieser durch den Strahl $RA = \alpha$ gehäuft ist, so hat man

$$\sin A = 2 \sin(\tfrac{1}{2}A) \cdot \cos(\tfrac{1}{2}A) = 2 \frac{h\alpha_1}{\alpha^2},$$

und eben so

$$\sin B = 2 \frac{h\beta_1}{\beta^2}; \quad \sin C = 2 \frac{h\gamma_1}{\gamma^2}; \text{ etc.}$$

Daher ist z. B.

$$\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{\alpha_1 \gamma}{\alpha \gamma_1},$$

und für den Fall, wo das Vieleck in eine Curve übergeht, also $\alpha_1 = \alpha$ und $\gamma_1 = \gamma$ wird, erhält man:

$$39. \quad \sin A : \sin C = \gamma : \alpha = \frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\gamma}.$$

Hiemit sind wir zu dem zweiten Resultate gelangt: „dafs auch die Sinus der einfachen Winkel, welche die Tangenten in ihren Berührungspunkten mit der Curve \mathfrak{B} bilden, sich verhalten, wie die diesen Punkten zugehörigen Krümmungen der Curve.“

Dieses Resultat steht mit dem vorigen (39) nicht im Widerspruche; vielmehr wird das eine durch das andere bestätigt. Denn weil

$$\sin(2A) : \sin(2C) = \sin A \cos A : \sin C \cos C,$$

für sehr kleine oder unendlich kleine Winkel A und C aber schlechthin gesetzt werden darf:

$$\cos A : \cos C = 1,$$

so ist (für die Curve \mathfrak{B}):

$$40. \quad \sin(2A) : \sin(2C) = \sin A : \sin C;$$

woraus das Gesagte folgt. Endlich mag noch, behufs späterer Betrachtungen, bemerkt werden, dafs sehr kleine Winkel (in Bogen oder Zahlen ausgedrückt) sich verhalten, wie ihre Sinus; so dafs also:

$$41. \quad \sin A : \sin C = A : C = \frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\gamma},$$

wornach drittens: „auch die Winkel, welche die Tangenten an die Curve \mathfrak{B} mit ihr bilden, sich wie die den Berührungspunkten zugehörigen Krümmungen der Curve verhalten.“

§. XXII.

Durch das obige Resultat sind wir nunmehr in Stand gesetzt, bei jeder Curve \mathfrak{B} den Punct S mittelst gewisser anschaulicher und endlicher Gröſsen zu bestimmen. Nämlich es können zur Bestimmung von S statt der unendlich kleinen Coefficienten $\sin 2A$, $\sin 2B$, $\sin 2C$, die ihnen proportionalen umgekehrten Werthe $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$, der respectiven Krümmungshalbmesser α , β , γ , der Curve \mathfrak{B} genommen werden (§. XV.). Hienach steht der bestimmte Punct S in folgender Beziehung zu der Curve \mathfrak{B} . „Er ist ihr Schwerpunkt, wenn sie in unendlich kleine gleiche Elemente getheilt und in den Theilungspuncten mit Gewichten belastet gedacht wird, welche sich verkehrt verhalten, wie die zugehörigen Krümmungshalbmesser, oder direct wie die zugehörigen Krümmungen.“ Aus diesem Grunde soll der Punct S künftig „Krümmungs-Schwerpunkt“ der Curve \mathfrak{B} genannt werden.

Es wird hiemit wiederum augenscheinlich (§. XX.), dafs, wenn die Curve \mathfrak{B} einen Mittelpunct hat, dann ihr Krümmungs-Schwerpunkt S mit diesem zusammenfallen mufs.

§. XXIII.

Dafs die früher über das Vieleck \mathfrak{B} aufgestellten Gleichungen und Sätze auch für den Grenzfall, wo dasselbe in eine Curve \mathfrak{B} übergeht, noch gültig sein müssen, ist einleuchtend und früher schon erwähnt worden (§. XX.). Daher hat man auch für die Curve, in den nämlichen Zeichen und im nämlichen Sinne verstanden, unmittelbar folgende Gleichungen (27., 28. und 34.):

$$42. \quad 4(2V - \mathfrak{B}) = \Sigma(\alpha^2 \sin 2A),$$

$$43. \quad 4(2V - \mathfrak{B}) = \Sigma(\alpha_i^2 \sin 2A) + s^2 \cdot \Sigma(\sin 2A),$$

$$44. \quad 4(V - v) = \frac{1}{2} s^2 \Sigma(\sin 2A) = U.$$

Diese Gleichungen, in Worten ausgesprochen, enthalten zunächst folgende Sätze:

a) Soll in Rücksicht einer gegebenen geschlossenen und überall convexen Curve \mathfrak{B} der Inhalt der irgend einem veränderlichen Punkte P entsprechenden Fußpunkten-Curve V constant bleiben, so ist der Ort des Punktes P eine bestimmte Kreislinie, deren Radius s mit jenem Inhalte V zugleich grösser oder kleiner wird, deren Mittelpunkt aber immer ein- und derselbe feste Punkt, nämlich der Krümmungs-Schwerpunkt S der gegebenen Curve \mathfrak{B} ist." Und umgekehrt: „Beschreibt man aus dem Krümmungs-Schwerpunkte S der gegebenen Curve \mathfrak{B} irgend einen Kreis, so entsprechen allen auf dieser Kreislinie liegenden Punkten P Fußpunkten-Curven V von gleichem Inhalte."

b) „Unter allen Fußpunkten-Curven V einer gegebenen geschlossenen und überall convexen Curve \mathfrak{B} hat diejenige den kleinsten Inhalt v , welche dem Krümmungs-Schwerpunkte S der Curve \mathfrak{B} entspricht."

Um die Inhalts-Zunahme genauer angeben zu können, welche die einem Punkte P entsprechende Fußpunkten-Curve V erfährt, wenn er sich vom Krümmungs-Schwerpunkte S entfernt, muß die GröÙe $\frac{1}{2}s^2 \Sigma(\sin 2A)$ oder das Vieleck U näher bestimmt werden. Da dieses Vieleck U nach dem Früheren (§. XVII.) einem Kreise eingeschrieben ist, der s zum Radius hat, da es in demselben zwei Umläufe macht, und da die Centriwinkel $2A, 2B, 2C, \dots$, welche seinen Seiten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots$ gegenüberstehen, in dem gegenwärtigen Falle (für die Curve \mathfrak{B}) alle unendlich klein sind: so folgt, daß in diesem Falle auch die Seiten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots$ alle unendlich klein sind, und daß daher der Umfang des Vielecks mit demjenigen des Kreises zusammenfällt, aber diesen zweimal umfaßt. Somit besteht auch der Inhalt des Vielecks U aus der zweifachen Kreisfläche, oder es ist:

45. $U = \frac{1}{2}s^2 \Sigma(\sin 2A) = 2\pi s^2$ und $\Sigma(\sin 2A) = 4\pi$,
und daher hat man statt der Gleichungen (44 und 45) folgende:

$$46. \quad 4(2V - \mathfrak{B}) = \Sigma(a_i^2 \sin 2A) + 4\pi s^2,$$

$$47. \quad V = v + \frac{1}{2}\pi s^2.$$

Aus dieser letzten Gleichung (47) schließt man folgende Sätze:

c) „In Rücksicht der gegebenen geschlossenen und convexen Curve \mathfrak{B} ist der Inhalt V der Fußpunkten-Curve eines beliebigen Punktes P immer so groß, als der Inhalt v der dem Krümmungs-Schwerpunkte S entsprechenden Fußpunkten-Curve, mehr die halbe Kreisfläche, welche den Abstand $PS = s$ beider Punkte P und S von einander zum Radius hat."

Kennt man also in Bezug auf die gegebene Curve \mathfrak{B} den Inhalt v der Fußpunten-Curve, welche dem Krümmungs-Schwerpunkte S entspricht, so kann sogleich der Inhalt V der Fußpunten-Curve jedes andern beliebigen Puncts P gefunden werden, in so fern nur dessen Abstand s vom Schwerpunkte S bekannt ist. Und umgekehrt: kennt man in Bezug auf eine Curve \mathfrak{B} und für irgend einen Punct P die Größen V und s , so wird dadurch augenblicklich auch v , und somit dann auch der Inhalt der Fußpunten-Curve für jeden anderen Punct gefunden, wofern sein Abstand von S gegeben ist.

d) „Kennt man in Rücksicht einer gegebenen Curve \mathfrak{B} die Inhalte V, V_1, V_2 der Fußpunten-Curven irgend dreier gegebener Puncte P, P_1, P_2 , die nicht in einer Geraden liegen, so ist dadurch der Krümmungs-Schwerpunkt S der gegebenen Curve \mathfrak{B} , so wie der Inhalt v seiner Fußpunten-Curve, bestimmt, und leicht zu finden.“

Denn zu diesem Behufe hat man nach (§. XIX.) und vermöge (47) folgende drei Gleichungen:

$$48. \quad \begin{cases} V - V_1 = \frac{1}{2}\pi(s^2 - s_1^2), \\ V - V_2 = \frac{1}{2}\pi(s^2 - s_2^2), \\ V_1 - V_2 = \frac{1}{2}\pi(s_1^2 - s_2^2), \end{cases}$$

wodurch drei Gerade X_2, X_1, X bestimmt werden, deren gemeinschaftlicher Durchschnitt der gesuchte Krümmungs-Schwerpunkt S ist.

§. XXIV.

Besondere Fälle.

Ist insbesondere die gegebene Curve ein Kreis oder eine Ellipse, so läßt sich in Folge der vorstehenden Sätze leicht der Inhalt V der Fußpunten-Curve jedes beliebigen Puncts P angeben. Nämlich wie folgt.

A. Wenn die gegebene Curve \mathfrak{B} ein Kreis ist.

Es ist klar, und bereits oben erwähnt worden (§. XXII.), daß der Krümmungs-Schwerpunkt S des Kreises mit seinem Mittelpunkte zusammen fällt. Daher fällt auch die Fußpunten-Curve des Punctes S mit dem Kreise selbst zusammen, und ihr Inhalt ist gleich der Kreisfläche. Wird also der Radius des gegebenen Kreises \mathfrak{B} mit r bezeichnet so hat man:

$$49. \quad v = \pi r^2$$

und weiter (47):

$$50. \quad V = \pi r^2 + \frac{1}{2}\pi s^2$$

d. h. „der Inhalt der Fußpunten-Curve V irgend eines Punktes P , in Bezug auf den gegebenen Kreis \mathfrak{B} , ist gleich der Summe dieser Kreisfläche und der halben Kreisfläche $\frac{1}{2}\pi s^2$, welche den Abstand s des Punktes P vom Mittelpunkte S des gegebenen Kreises zum Radius hat.“

Ueber die Form und sonstigen Eigenschaften dieser Fußpunten-Curve V mag Folgendes angegeben werden; was leicht wahrzunehmen ist.

Die Curve V berührt den Kreis \mathfrak{B} in den beiden Endpunkten des durch P gehenden Durchmessers, welchen sie zur Symmetralaxe hat, liegt sonst ganz außerhalb \mathfrak{B} , ist auf einen endlichen Raum beschränkt und kehrt in sich zurück. Sie ist vom vierten Grade, und P ist ein singulärer Punkt derselben, nämlich α) ein reeller oder β) ein imaginärer Doppelpunkt, je nachdem beziehlich P außerhalb oder innerhalb des Kreises \mathfrak{B} liegt, oder endlich γ) ein Rückkehrpunkt, wenn P auf der Kreislinie \mathfrak{B} selbst liegt. Im Falle (α) schneidet sich die Curve in P , und die beiden Tangenten die von P aus an den Kreis \mathfrak{B} gelegt werden können, sind die Normalen der Curve V im Punkte P , so daß sie den Winkel bestimmen, unter welchem die Curve sich in P schneidet. Ist $s^2 = 2r^2$, so ist dieser Winkel ein rechter. Die Curve bildet ferner zwei Blätter oder Schleifen, von denen die eine die andere nebst dem Kreise \mathfrak{B} umschließt. Der Inhalt der Curve besteht aus demjenigen beider Schleifen, so daß also der von der kleinern Schleife eingeschlossene Raum hiebei zweimal in Betracht kommt. Ist $s^2 = 2r^2$, so ist der Inhalt der Curve $= 2\pi r^2$.

In Rücksicht aller drei Fälle sind die verschiedenen Curven V , wie sich später zeigen wird (§. XXXVI.), identisch mit den verschiedenen Epicykloiden, welche entstehen, wenn ein Kreis vom Radius $\frac{1}{2}r$ auf einem ihm gleichen Kreise rollt. So ist namentlich im Falle (γ), wo P in der Kreislinie liegt, oder wo $s = r$ ist, die Curve V die sogenannte *Cardioide* und ihr Inhalt ist:

$$51. \quad V = \frac{3}{2}\pi r^2 = 6\pi(\frac{1}{2}r)^2$$

d. h. „anderthalb mal so groß, als die gegebene Kreisfläche \mathfrak{B} ,“ oder sechsmal so groß, als die Kreisfläche, deren Radius $= \frac{1}{2}r$ ist; was mit dem bekannten Ausdrucke für die Cardioide übereinstimmt. Von den beiden mondformigen Räumen, welche in diesem Falle zwischen den Umfängen von \mathfrak{B} und V liegen, ist jeder $= \frac{1}{4}\pi r^2$, d. i. ein Viertel der Kreisfläche \mathfrak{B} . Eben so kommen im Falle (β) zwischen \mathfrak{B} und V zwei mondformige Räume vor, von denen jeder $= \frac{1}{4}\pi s^2$ ist.

B. Wenn die gegebene Curve \mathfrak{B} eine Ellipse ist.

Auch bei der Ellipse fällt offenbar der Krümmungs-Schwerpunkt S mit dem Mittelpunkte zusammen. Es seien also a und b die halben Axen der Ellipse, s_1 der Abstand ihres Brennpunctes P_1 vom Mittelpunkte S , und V_1 der Inhalt der Fußspuncten-Curve des einen oder des andern Brennpunctes P_1 , welche bekanntlich ein Kreis ist, der die große Axe $= 2a$ zum Durchmesser hat, so ist also:

$$52. \quad V_1 = \pi a^2;$$

und hieraus wird zunächst geschlossen (§. XXIII.):

„Nimmt man in der Kreisl Linie, welche mit einer Ellipse \mathfrak{B} concentrisch ist, und durch deren Brennpuncte geht, irgend einen Punkt P_1 an, so ist der Inhalt seiner Fußspuncten-Curve V_1 in Bezug auf die Ellipse gleich derjenigen Kreisfläche, welche die große Axe $2a$ der Ellipse zum Durchmesser hat.“

Nun kann ferner der Inhalt jeder andern Fußspuncten-Curve für die Ellipse gefunden werden. Nämlich für die Fußspuncten-Curve v des Mittelpuncts S , der um $s_1 = \sqrt{a^2 - b^2}$ vom Brennpuncte P_1 absteht, hat man nach (§. XXIV. 47):

$$53. \quad v = V_1 - \frac{1}{2}\pi s_1^2 = \frac{1}{2}\pi(a^2 + b^2) = \pi g^2,$$

das heißt:

„Der Inhalt der dem Mittelpunkte S der Ellipse \mathfrak{B} entsprechenden Fußspuncten-Curve v ist halb so groß, als die Summe der beiden Kreisflächen, welche die Axen $(2a, 2b)$ der Ellipse zu Durchmessern haben; oder er ist gleich derjenigen Kreisfläche, welche einen der beiden gleichen conjugirten Durchmesser $(2g)$ der Ellipse zum Durchmesser hat.“

Die Curve v berührt die Ellipse \mathfrak{B} in den vier Scheiteln der Axen; außerdem liegt sie ganz außerhalb derselben, so daß zwischen beiden Curven vier mond förmige Räume entstehen, welche nothwendig einander gleich sind. Der Inhalt eines jeden sei $= m$, so hat man, da der Inhalt der Ellipse $= \pi \cdot ab$ ist:

$$54. \quad 4m = \frac{1}{2}\pi(a^2 + b^2) - \pi ab = \frac{1}{2}\pi(a - b)^2 \text{ und } m = \frac{1}{8}\pi(a - b)^2$$

d. h. „die Summe der vier M öndchen ist gleich der halben Kreisfläche, welche die Differenz beider Axen der Ellipse zum Durchmesser hat, und jedes einzelne derselben ist dem achten Theile dieser Kreisfläche gleich.“

Für den Inhalt V der Fußpunten-Curve jedes beliebigen Puncts P in Bezug auf die Ellipse ergibt sich nun aus (47 u. 53) der folgende Ausdruck:

$$55. \quad V = \frac{1}{2}\pi(a^2 + b^2 + s^2),$$

d. h.: „Der Inhalt V der Fußpunten-Curve eines beliebigen Punctes P in Bezug auf eine gegebene Ellipse \mathfrak{B} ist gleich der halben Summe dreier Kreisflächen, welche die halben Axen der Ellipse und den Abstand s des Puncts P vom Mittelpunkte S der Ellipse zu Radien haben.“

Diese allgemeine Fußpunten-Curve V der Ellipse \mathfrak{B} hat analoge Form und Eigenschaften mit der Fußpunten Curve des Kreises (A), so weit nämlich die Verschiedenheit der Ellipse und des Kreises eine solche Analogie verstatten. Z. B. die Curve V ist auf einen endlichen Raum beschränkt und in sich zurückkehrend, und liegt außerhalb der Ellipse. Sie berührt jedoch diese im Allgemeinen und höchstens in vier Puncten. Liegt der Punct P außerhalb der Ellipse \mathfrak{B} , so ist er ein reeller Doppel- oder Schnittpunct der Curve V ; die aus ihm an die Ellipse \mathfrak{B} gezogenen Tangenten sind zugleich in ihm die Normalen der Curve V und bestimmen daher den Winkel, unter welchem sie sich schneiden. Der Inhalt der Curve V besteht hiebei aus der Summe der Räume oder Blätter, welche die beiden von ihr gebildeten Schleifen umschließen. Soll insbesondere die Curve im Puncte P sich unter einem rechten Winkel schneiden, so ist der Ort des Punctes P derjenige Kreis, welcher zugleich der Ort des Scheitels eines rechten Winkels ist, dessen Schenkel die Ellipse berühren; also ein mit der Ellipse concentrischer Kreis, dessen Radius $s = \sqrt{a^2 + b^2}$ ist. Daher ist in diesem Falle der Inhalt der Curve V constant, nämlich (55):

$$56. \quad V = \pi s^2 = \pi(a^2 + b^2),$$

d. h. „er ist gleich der Summe beider Kreisflächen, welche die Axen der Ellipse zu Durchmesser haben, oder gleich der Fläche des zugehörigen Ortskreises.“ Liegt ferner der Punct P innerhalb der Ellipse \mathfrak{B} , so ist von der Curve V nur noch eine Schleife vorhanden, welche die Ellipse \mathfrak{B} umschließt, so daß zwischen beiden Curven (je nach der Anzahl ihrer Berührungspunkte: 4, 3 oder 2) mond förmige Räume entstehen, deren Summe M jedesmal genau bestimmt ist. Nämlich es ist:

$$57. \quad M = \frac{1}{2}\pi(a-b)^2 + \frac{1}{2}\pi s^2,$$

worin auch das besondere obige Beispiel (54) als der Fall inbegriffen ist, wo $s = 0$ wird.

Die sämtlichen Curven V , welche hier als Fußspunten-Curven der Ellipse erscheinen, können auch auf ähnliche Art wie die Epicykloiden erzeugt werden, indem man eine Ellipse auf einer ihr gleichen rollen läßt; was sich unten zeigen wird (§. XXXVI).

Anmerkung. Beiläufig mag noch Folgendes bemerkt werden. Wird eine gegebene Ellipse v als die Fußspunten-Curve ihres Mittelpuncts S in Bezug auf eine unbekannte Curve \mathfrak{B} angesehen, so kann sofort der Inhalt V der Fußspunten-Curve jedes beliebigen Puncts P in Bezug auf die unbekannte Basis \mathfrak{B} angegeben werden. Nämlich: wenn a und b die halben Axen der Ellipse sind und s der Abstand PS ist, so hat man:

$$58. \quad V = v + \frac{1}{2}\pi s^2 = \pi ab + \frac{1}{2}\pi s^2;$$

denn unter den vorausgesetzten Umständen ist offenbar S auch der Mittelpunct der unbekannten Curve \mathfrak{B} . — Gleicherweise lassen sich andere Sätze aufstellen.

§. XXV.

Ausgedehntere Sätze.

Die über das Fußspunten-Vieleck V und über die Fußspunten-Curve V aufgestellten Sätze führen, wenn sie auf mehrere gegebene Figuren zugleich angewandt werden, zu zusammengesetzteren Sätzen.

Es seien z. B. in einer Ebene irgend eine Anzahl n beliebiger und beliebig liegender Curven $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \dots \mathfrak{B}_n$ gegeben (alle jedoch geschlossen und überall convex §. XXIII.); ihre Krümmungs-Schwerpunkte seien $S_1, S_2, S_3, \dots S_n$ und der Punct mittler Entfernung dieser n Puncte heiße S . Ferner mögen $v_1, v_2, v_3, \dots v_n$ die Inhalte der Fußspunten-Curven dieses Punctes S , so wie $V_1, V_2, \dots V_n$ die Inhalte der Fußspunten-Curven eines beliebigen, von S um s abstehenden Punctes P in Bezug auf die gegebenen Curven $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots \mathfrak{B}_n$ bezeichnen. Dann folgt aus dem Bisherigen (§. VII. u. §. XXIII. 47.) nachstehende Gleichung:

$$V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n + n(\frac{1}{2}\pi s^2),$$

oder

$$60. \quad \Sigma(V_1) = \Sigma(v_1) + n\frac{1}{2}\pi s^2,$$

d. h. a) „Sind in einer Ebene n beliebige und beliebig liegende, geschlossene und überall convexe Curven $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \dots \mathfrak{B}_n$ gegeben, so ist der Ort aller Punkte P , für welche die Summe der n Fußpunkten-Curven $V_1, V_2, \dots V_n$ constant sein soll, jedesmal ein Kreis, dessen Radius s mit jener Summe zugleich wächst oder schwindet, dessen Mittelpunkt aber immer ein- und derselbe feste Punkt, nämlich der Schwerpunkt S der (mit gleichen Coefficienten behafteten) Krümmungs-Schwerpunkte $S_1, S_2, \dots S_n$ der gegebenen Curven $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots \mathfrak{B}_n$ ist.“ Und ferner:

b) „Die diesem Schwerpunkte S entsprechende Summe $\Sigma(v_1)$ der Fußpunkten-Curven ist unter allen die kleinste, und wird von der irgend einem andern Punkte P zugehörigen Summe $\Sigma(V_1)$ um n mal die halbe Kreisfläche übertroffen, welche den Abstand s des Punktes P von S zum Radius hat.“

Aehnlicher Weise hat man, wenn statt der Curven n beliebige convexe Vielecke $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots \mathfrak{B}_n$ gegeben sind:

61. $V_1 + V_2 + \dots + V_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n + U_1 + U_2 + \dots + U_n$,
wo die Vielecke $U_1, U_2, \dots U_n$, nach der Art wie oben (§. XVII.) das Vieleck U , alle demselben Kreise vom Radius s eingeschrieben sind, so daß:

62. $U_1 + U_2 + \dots + U_n = \frac{1}{2}s^2 [\Sigma(\sin 2A_1) + \Sigma(\sin 2A_2) + \dots + \Sigma(\sin 2A_n)]$.

Eben so finden analoge Formeln Statt, wenn die gegebenen Figuren $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots \mathfrak{B}_n$ theils Vielecke, theils Curven sind.

(Die Fortsetzung folgt im nächsten Hefte.)