IV. *Schwingungen einer biegsamen, mit einem
Läufer beschwerten Saite; von Hrn. Duhamel.*

(*Compt. rend. T. XI p. 15.*)

Untersuchungen, mit denen ich heute die Academie nicht zu unterhalten gedenke, haben mich zum Studium der Gesetze geführt, nach welchen die Querschwingungen von Saiten und Stäben abgeändert werden, wenn man an irgend einem Punkt derselben eine Masse befestigt, die in einem willkürlichen Verhältnisse zu ihnen steht. Diese Aufgabe, die sich mir anfangs nur nebenbei darbot, schien mir wichtig genug, um speciell behandelt zu werden, um so mehr als sie die Theorie der bei gewissen musikalischen Instrumenten angewandten *Läufer* einschließt. Die Abhandlung, welche ich dem Urtheile der Academie unterwerfe, enthält denjenigen Theil dieser zugleich theoretischen und experimentellen Untersuchungen, der sich auf vollkommen biegsame Saiten bezieht. Derjenige, welche die elastischen Stäbe betrifft, wird Gegenstand einer zweiten Abhandlung seyn.

Es ist gut zuvörderst zu bemerken, daß dieß Problem wesentlich abweicht von demjenigen, welches die Mathematiker sich bei ihren ersten Arbeiten über die schwingenden Saiten gestellt hatten. Sie betrachteten einen ausgespannten, unschweren Draht, der eine oder mehrere Massen trüge. Dieß gab nur zu den gewöhnlichen Differential-Gleichungen Anlaß, während die Aufgabe, die ich mir hier gestellt, zu drei Gleichungen mit partiellen Differentialen führt, und auch ganz andere Gesetze liefert als man früher gefunden.

Ich betrachte eine Saite, bekannt an Länge und Gewicht, die einer constanten Spannung ausgesetzt ist, und an einem ihrer Punkte eine Masse trägt, die irgend ein

Verhältniß zu der der Saite hat; und ich beabsichtige zu ermitteln, nach welchen Gesetzen der Grundton und alle möglichen harmonischen Töne dieser Saite von diesen Datis abhängen, und welche Lage die diesen harmonischen Tönen entsprechenden Knoten besitzen.

Die allgemeine Formel für die Bewegung dieser Saite, von einem willkürlichen Anfangszustand ausgehend, besteht aus einer Unzahl von particulären Lösungen, entsprechend den verschiedenen Tönen, welche die Saite successive geben kann, aber im Allgemeinen nicht gleichzeitig giebt. Die Dauer der jedem dieser Töne entsprechenden Schwingungen, wird durch die Wurzeln einer sehr einfachen transcendenden Gleichung bestimmt.

Nimmt man an, eine und dieselbe Saite werde an demselben Punkt folgeweise mit verschiedenen Massen belastet, so erhöht sich der Grundton proportional der ersten Wurzel dieser Gleichung. Der erste harmonische Ton steigt proportional der zweiten Wurzel, und im Allgemeinen steigt ein Ton irgend einer Ordnung proportional der Quadratwurzel von derselben Ordnung.

Die Bestimmung der Wurzeln dieser Gleichung, deren Coëfficienten successive verschiedene Werthe annehmen, läßt sich auf die Construction einer einzigen Curve zurückführen; und dieses Mittel habe ich bei den Anwendungen meiner Formeln benutzt.

Dieselben Wurzeln lehren für jeden harmonischen Ton die Lage der Knoten kennen. Wenn der Anlegepunkt der Masse die Saite in zwei commensurable Stücke theilt, so sieht man sogleich, daß die Saite die harmonischen Töne geben könne, die seinen Eintheilungen in Theilen gleich dem gemeinschaftlichen Maafs und dessen Submultiplis entsprechen. Allein man würde so nur einen Theil der möglichen Töne haben, und man kann harmonische Töne haben, die der Eintheilung der Saite in eine beliebige ganze Zahl von Theilen entsprechen. Es ist leicht zu sehen, daß, da alle diese Unterabthei-

lungen Vibrationen von gleicher Dauer haben müssen, der Abstand zwischen irgend zwei aufeinanderfolgenden Knoten gleich seyn muß, ausgenommen für die beiden, zwischen welchen sich die hinzugefügte Masse befindet. Der Abstand dieser letzten, und folglich der übrigen, wird bestimmt durch die Wurzel, welche von gleichem Rang ist wie der Ton, den man betrachtet.

Läßt man die hinzugefügte Masse und die Länge der Saite proportional sich verändern, während das Verhältniß der Stücke, so wie die Spannung dieselbe bleibt, so verändert sich die Dauer der Schwingungen sowohl für den Grundton als für dessen harmonische Töne proportional der Länge, wie leicht auch der Fall seyn würde, wenn die Masse fortgenommen wäre. Dieß merkwürdige Resultat, welches dem von Savart für ähnliche Körper bewiesenen analog ist, beweist sich auch durch eine analoge Methode wie die, welche Hr. Cauchy für diesen Fall angewandt hat.

Nachdem ich diese Gesetze, zu welchen der Versuch offenbar nicht geführt haben würde, durch Analyse festgestellt hatte, blieb noch zu untersuchen, ob sie der genaue Ausdruck von Thatsachen wären oder einem rein idealen Problem angehörten, dessen Data sich merklich von denen entfernte, welche die Erfahrung verwirklichen könnte.

Zu dem Ende nahm ich eine homogene, sehr biegsame Saite und setzte sie einer constanten, übrigens willkürlichen Spannung aus, dabei ihren beiden festen Punkten immer dieselbe Lage lassend. Darauf heftete ich in der Mitte derselben verschiedene Massen an, und bestimmte die Verhältnisse in der Anzahl von Schwingungen, welche diese Saite in einer gleichen Zeit vollbrachte. Es wäre unmöglich gewesen, diese Zahlen mittelst der Töne zu bestimmen, da sie entweder nicht wahrnehmbar, oder zu tief waren, um sie recht zu erkennen. Ich benutzte daher ein Verfahren, welches ich vor ungefähr

15 Jahren erdacht hatte, dessen Idee aber, wie ich seitdem erfuhr, im Grunde dieselbe ist, wie die bei einem von Watt und später von Eytelwein angewandten Apparat.

Dieses Verfahren besteht darin, daß man an dem Punkt, dessen Bewegung man sucht, eine Spitze befestigt, die auf einer beweglichen Ebene eine Spur hinterläßt, ohne eine merkliche Reibung darauf hervorzu-
bringen. Man begreift, wie wichtig es alsdann ist, daß man die Bewegung dieser Ebene mit der äußersten Genauigkeit kenne. Allein ich habe mich dieser Nothwendigkeit überhoben, indem ich 'die Anzahl der von der Probe-Saite ausgeführten Schwingungen verglich mit der Anzahl derjenigen, die in derselben Zeit gemacht wurden von einer der ersten parallelen und benachbarten Saite, die immer unter denselben Umständen blieb, und folglich immer dieselbe Bewegung behielt. Die bewegliche Ebene, auf welche die Schwingungen beider Saiten sich aufzeichnen, kann alsdann eine ganz unregelmäßige Bewegung haben; nur muß sie so rasch seyn, daß alle Spuren deutlich werden; und man erkennt mit gleicher Genauigkeit die Anzahl von Schwingungen, welche sie in einer gleichen Zeit machen. Da sonach die Verhältnisse der gesuchten Zahlen zu einer und derselben Zahl bekannt sind, so ergeben sich daraus die Verhältnisse derselben zu einander, und man erkennt mithin nach welchem Gesetze die Anzahl der von der nämlichen Saite ausgeführten Vibrationen sich verändern, wenn man die in der Mitte angebrachte Masse verändert.

Bei den Versuchen, deren Resultate ich hier angeben will, hatten die Data folgende Werthe:

Länge der Saite	1,2103	Meter
Gewicht der Saite	15,4	Grm.
Gewicht der ersten Masse	6,537	-
- - zweiten -	10,000	-
- - dritten -	13,074	-

Gewicht der vierten Masse 16,537 Grm.

- - fünften - 23,074 -

Die Verhältnisse der jeder dieser Massen entsprechenden, Schwingungszahlen zu der Anzahl, welche die Saite für sich, ohne hinzugefügte Masse, ausgeführt hätte, haben nach der Formel folgende Werthe:

0,71 : 0,6334 : 0,5768 : 0,5328 : 0,4679.

Der Versuch gab:

0,71 : 0,634 : 0,5783 : 0,5327 : 0,468.

Die Ueberschüsse der letzteren über die ersteren sind also:

0 0,0006 0,0015 — 0,0001 0,0001.

Die Uebereinstimmung ist also so vollkommen als man es nur erwarten konnte.

Ich habe das von der Analyse angezeigte Gesetz auch für den Fall geprüft, daß man die Länge der Saite proportional der Masse verändert.

Ein erster Versuch gab mir das Verhältniß 64 : 32 oder 2 : 1 als ich die Länge der Saite, und die hinzugefügte Masse auf die Hälfte reducirte. Das Resultat war also ganz der Theorie gemäß. Bei einem anderen Versuch, bei dem ich die Länge der Saite und das Gewicht der ursprünglichen Masse verdoppelte und verdreifachte, erhielt ich drei Zahlen, die proportional waren den folgenden:

1,573 : 0,781 : 0,516

die Theorie hätte gegeben:

1,573 : 0,786 : 0,524

die Unterschiede sind also:

0,005 0,008.

Auch diese sind noch sehr gering, wenn gleich etwas größer als die früheren. Letzteres rührt vielleicht davon her, daß die Länge der Saite variierte, und daß die Ursachen zu Unrichtigkeiten, die sich an ihren Enden vorfinden, nicht in gleichem Verhältniß die Schwingungszahl abändern. So weiß man in Betreff der Me-

fallsaiten, die nicht als vollkommen biegsam betrachtet werden können, daß sie bei Verkürzung auf die Hälfte nicht genau die höhere Octave geben; allein die Abweichung davon wird desto geringer, je dünner die Saite in Bezug auf ihre Länge ist.

Endlich habe ich eine dritte Prüfungsweise vorgenommen, indem ich die Lagen der Knoten, wie sie von der Formel angegeben werden, verglich mit denjenigen, welche der Versuch liefert. Auch in diesem Punkt war die Uebereinstimmung so vollkommen wie bei den übrigen.

V. *Ueber die Schwingungen der mit irgend einer Zahl von Läufern beschwerten Saiten;*
von Hrn. Duhamel.

(*Compt. rend. T. XI p. 810.*)

Als Taylor die erste Lösung des Problems der schwingenden Saiten gegeben hatte, betrachteten die Mathematiker, welche derselben mehr Strenge und Allgemeinheit verleihen wollten, zuvörderst einen Faden ohne Gewicht, beschwert mit einer großen Anzahl gleich großer, auf seine ganze Länge in gleichen Abständen vertheilter Gewichte. Sie nahmen hierauf an, die Zahl dieser Gewichte werde unendlich vergrößert, folglich deren Anlegepunkte einander unendlich genähert. Zu der Gränze übergehend und die Gesammtheit der Gewichte als unveränderlich betrachtend, erhielten sie einen vollkommen biegsamen Faden von einem bestimmten, auf seine ganze Länge gleichmäfsig vertheilten Gewicht, und die Formel, welche die Bewegung aller Punkte dieses Fadens regelte, bekamen sie, indem sie die Gränze derjenigen nahmen, die sich auf eine willkührliche Anzahl materieller Punkte bezog.

Nachdem sie so die Gesetze der Schwingungsbewe-