SULL'ESTENSIONE DEGLI AGGREGATI NUMERABILI.

Nota del Dr. **Cesare Garibaldi**, in Genova.

 Adunanza del 25 marzo 1894.

I.

Per stabilire la nozione di estensione di un aggregato seguirò il metodo esposto nel « *Cours d'Analyse* par M. C. JORDAN, Paris 1892 », nel quale si fa uso della considerazione dell'estensione interna ed esterna di un aggregato dovuta al prof. G. PEANO (*).

Consideriamo, per fissare le idee, un aggregato A a due dimensioni; sieno x, y le coordinate di un punto dell'aggregato. Le considerazioni che si fanno in questo caso si possono con facilità estendere agli altri casi.

Scomponiamo il piano dove sono rappresentati i punti di A con parallele agli assi in quadrati di lato r .

I quadrati, i punti dei quali sono tutti punti interni (**) di A costituiscono un aggregato S interno ad A ; quelli che contengono almeno un punto di A danno luogo ad un altro aggregato $S + S'$, al quale A è interno. Tanto S che $S + S'$, essendo costituiti da tanti

(*) G. Peano, *Applicazioni geometriche del Calcolo infinitesimale*. Torino, 1887, pag. 154 e segg.

(**) Nello spazio (S) dove è dato A , si considera l'aggregato A_1 di tutti i punti di (S) che non appartengono ad A . Sono punti interni di A quelli che appartengono ad A , senza appartenere al derivato di A_1 . (Vedi JORDAN, l. c.).

quadrati, danno luogo rispettivamente : ad un'area S , somma dei quadrati di S ; e ad un'area $S + S'$ somma dei quadrati di $S + S'$. Si dimostra facilmente che facendo variare la decomposizione in quadrati per modo che r tenda a zero, le aree S ed $S + S'$ tendono verso limiti fissi (*).

Al limite delle somme S si dà il nome di area interna di A ; al limite delle somme $S + S'$ si dà il nome di area esterna di A .

Se A è di dimensione maggiore di 2 si arriva in modo analogo con scomposizioni mediante cubi,... alla nozione di un'estensione interna, e di un'estensione esterna di A .

L'estensione esterna non è mai inferiore all'estensione interna : se le due estensioni sono eguali si dirà l'aggregato A misurabile.

II.

Consideriamo un aggregato A numerabile ed esaminiamo separatamente i due casi :

- 1°) Il derivato di A è numerabile.
- 2°) Il derivato di A non è numerabile.

III.

Nel primo caso si può dimostrare che : « l'aggregato A è misurabile ed ha estensione nulla ».

La dimostrazione di questo teorema si basa sul seguente principio :

Dato un'aggregato limitato A , il cui derivato A' sia numerabile, si possono sempre racchiudere i punti di A in porzioni di spazio (A), della stessa dimensione di A , la cui somma sia tanto piccola quanto si vuole (**).

Per dimostrare questo teorema supponiamo A a due dimensioni; gli stessi ragionamenti valgono in generale.

(*) Jordan, l. c.

(**) Cantor, *Sur les ensembles infinis et linéaires de points* (Acta Math., II, pag. 376). Il teorema vi è dimostrato per un'aggregato lineare.

I punti di A saranno contenuti in un certo quadrato che possiamo supporre di lato eguale all'unità. Consideriamo l'aggregato $Q \equiv A + A'$, cioè costituito da tutti i punti di A e di A' . Indichiamo con R l'aggregato di tutti i punti del quadrato considerato che non appartengono a Q esclusi i lati del quadrato. Essendo A' numerabile, anche A lo sarà (*) e quindi anche Q sarà numerabile. Ora se p è un punto di R dovrà essere punto interno, poichè se ciò non fosse p sarebbe anche limite di una successione di punti di A o di A' , e pertanto apparterebbe a Q . Possiamo quindi supporre p interno ad un quadrato q di lato r composto tutto di punti di R . Consideriamo la somma s di tutti questi quadrati q . Sarà $s \leq 1$. Esaminiamo l'ipotesi $s < 1$. Allora sarà $1 - s = \delta$; cioè esisterà un'area $\delta \neq 0$ la quale non deve contenere che punti di Q . Onde Q non sarebbe più numerabile (**) come si è supposto. Pertanto non è ammissibile l'ipotesi $s < 1$. Dunque :

$$s = 1.$$

Concludiamo che l'area interna di R è eguale all'unità. Ma è facile vedere che anche l'area esterna di R è eguale all'unità. Infatti il contorno di R consta dei lati del quadrato di lato s e dei punti di Q . I primi non portano alcun contributo, e neppure i secondi poichè altrimenti non potrebbe essere eguale ad s l'area interna di R .

Si conclude pertanto :

1°) che l'area interna di A è nulla;

2°) che l'area esterna di A è nulla.

Dunque l'aggregato A è misurabile ed ha per area zero.

Ed in generale :

Se un aggregato A ha il derivato A' numerabile, esso è misurabile ed ha estensione nulla.

In particolare :

L'estensione di un aggregato di prima specie e d'ordine r è nulla (**).

(*) Cantor, l. c.

(**) Cantor, *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen* (Crelle, Bd. 77).

(***) Axel Harnack, *Ueber den Inhalt von Punktmengen* (Math. Annalen, Bd 25, 1885).

IV.

Esaminiamo ora il secondo caso, nel quale l'aggregato A essendo numerabile, ha il derivato A' di potenza più elevata della prima.

In questo caso l'estensione interna sarà nulla, perchè l'aggregato essendo numerabile non contiene punti interni.

L'estensione esterna potrà essere nulla, oppure essere diversa da zero; in conseguenza l'aggregato A , o sarà misurabile ed avrà estensione zero, o non sarà misurabile.

Genova, 14 marzo 1894.

C. GARIBALDI.