Bestimmung der Punkttransformationen des Raumes, welche alle Flächeninhalte invariant lassen.

Von Karl Carda in Brünn.

Es ist bekannt, dass die infinitesimalen Punkttransformationen des dreifachen Raumes, welche alle Voluminalhalte ungeändert lassen, durch die Formel

$$Xf \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}$$

gegeben sind, wobei

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$$

ist. Diese unendliche Gruppe steht mit Jacobi's Multiplicationstheorie in engem Zusammenhange.¹⁾

Es ist nun auch von Interesse, die Frage nach allen Punkttransformationen des Raumes aufzuwerfen, welche alle Flächeninhalte invariant lassen. Wir werden zeigen, dass diese Gruppe endlich ist und mit einer bekannten Gruppe des Raumes zusammenfällt. Wir wollen hierfür zwei Beweise erbringen.

1.

Um den ersten Beweis zu führen, bestimmen wir zunächst alle projectiven Transformationen des Raumes, welche alle Flächeninhalte invariant lassen. Dies gelingt durch sehr einfache Überlegungen.

Eine Kugel geht bei der gesuchten projectiven Gruppe in ein Ellipsoid von gleicher Oberfläche über. Eine Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel geht, wie man leicht sieht, in eine Ebene durch den Mittelpunkt des Ellipsoides über. Demnach geht das Ebenenbündel durch den Mittelpunkt der Kugel in das Ebenenbündel durch den Mittelpunkt des Ellipsoides über. Entsprechende Schnittfiguren der Kugel und des Ellipsoides haben gleichen Inhalt. Hieraus folgt:

Die gesuchte projective Gruppe führt Kugeln in congruente Kugeln über.

¹⁾ Lie, Verwerthung des Gruppenbegriffes für Differentialgleichungen. I. Berichte der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. 1895.

Demnach schließt man:

Die einzigen projectiven Transformationen des Raumes, welche alle Flächeninhalte invariant lassen, sind die Bewegungen desselben.

Die allgemeinste infinitesimale Transformation der Gruppe von Punkttransformationen, welche alle Flächeninhalte invariant lassen, sei

$$(1) \quad Xf \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Um die Functionen ξ , η , ζ zu bestimmen, wenden wir das Princip der Reihenentwicklung an. Dieses spielt in den Arbeiten Lie's eine hervorragende Rolle.

Wir wissen, dass die Gruppe (1) sechs projective infinitesimale Transformationen besitzt, welche überdies linear sind, nämlich

$$(2) \quad \begin{aligned} X_1 f &\equiv \frac{\partial f}{\partial x}, \\ X_2 f &\equiv \frac{\partial f}{\partial y}, \\ X_3 f &\equiv \frac{\partial f}{\partial z}, \\ X_4 f &\equiv y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y}, \\ X_5 f &\equiv z \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial z}, \\ X_6 f &\equiv x \frac{\partial f}{\partial z} - z \frac{\partial f}{\partial x}. \end{aligned}$$

Durch Ausführung einer passenden linearen Transformation, vermöge welcher das System (2) in sich übergeht, können wir erreichen, dass ξ , η , ζ an der Stelle

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ y &= 0, \\ z &= 0 \end{aligned}$$

entwickelbar sind. Da die gesuchte Gruppe die drei Translationen enthält, so können wir weiter erreichen, dass Xf den Anfangspunkt in Ruhe lässt. Hieraus folgt, dass jetzt

$$Xf, X_4f, X_5f, X_6f$$

für sich eine Gruppe G bilden.

Wir betrachten nunmehr ein infinitesimales Dreieck, dessen eine Ecke mit dem Anfangspunkte zusammenfällt. Die beiden anderen Ecken werden dann vermöge der Gruppe G transformiert.

Die Functionen ξ , η , ζ haben die Form

$$(3) \quad \begin{aligned} \xi &\equiv \alpha_{11} x + \alpha_{12} y + \alpha_{13} z + ()_2 + ()_3 + \dots \\ \eta &\equiv \alpha_{21} x + \alpha_{22} y + \alpha_{23} z + ()_2 + ()_3 + \dots \\ \zeta &\equiv \alpha_{31} x + \alpha_{32} y + \alpha_{33} z + ()_2 + ()_3 + \dots \end{aligned}$$

Hierin sind die Glieder höherer Ordnung nur angedeutet.

Da die Coordinaten der beiden Eckpunkte infinitesimale Größen sind, so werden ihre Änderungen durch die Glieder erster Ordnung in ξ , η , ζ bestimmt. Hieraus folgt aber nach dem Vorangehenden

$$(4) \quad Xf \equiv c_4 X_4 f + c_5 X_5 f + c_6 X_6 f + Yf,$$

wo in Yf keine linearen Glieder mehr auftreten.

Übrigens können wir diese Überlegungen durch eine formal strengere Rechnung ersetzen. Sind x_1, y_1, z_1 , und x_2, y_2, z_2 die Coordinaten der beiden durch die Gruppe G transformierten Eckpunkte des infinitesimalen Dreieckes und führen wir für einen Augenblick die Clebsch-Gordan'sche Bezeichnung

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 \equiv (ab)$$

ein, so haben wir auszudrücken, dass die Variation

$$\delta [(xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2]$$

identisch verschwindet.

Dann ergibt sich nach einfacher Rechnung

$$\begin{aligned} &(xy)^2 \cdot (\alpha_{11} + \alpha_{22}) + (xy)(xz) \cdot (\alpha_{23} + \alpha_{32}) \\ &+ (yz)^2 \cdot (\alpha_{22} + \alpha_{33}) + (yz)(yx) \cdot (\alpha_{31} + \alpha_{13}) \\ &+ (zx)^2 \cdot (\alpha_{33} + \alpha_{11}) + (zx)(zy) \cdot (\alpha_{12} + \alpha_{21}) + \dots \equiv 0. \end{aligned}$$

Demnach ist

$$(5) \quad \begin{aligned} \alpha_{11} &= \alpha_{22} = \alpha_{33} = 0, \\ \alpha_{ik} &+ \alpha_{ki} = 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt wieder die Gleichung (4).

Jetzt fügen wir zur Gruppe G , in der wir Xf durch Yf ersetzen, wieder die drei Translationen $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ hinzu. Es ist nun möglich, dass Yf eine Transformation von zweiter oder

höherer, etwa q^{ter} Ordnung darstellt. Ist $q > 2$, so bilden wir die Transformationen

$$(X_1 Y), (X_2 Y), (X_3 Y),$$

welche gleichfalls der gesuchten Gruppe angehören. Unter diesen ist mindestens eine von der Ordnung $q - 1$ enthalten. Hieraus folgt nach einfacher Überlegung

$$Yf \equiv 0.$$

Wir untersuchen jetzt den Fall $q = 2$. Indem wir wieder

$$Yf \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}$$

setzen und mit $X_1 f, X_2 f, X_3 f$ kombinieren, erhalten wir wenigstens eine Transformation erster Ordnung. Es ist demnach identisch

$$\begin{aligned} (X_1 Y) &\equiv \alpha_4 X_4 f + \alpha_5 X_5 f + \alpha_6 X_6 f + \alpha Zf, \\ (6) \quad (X_2 Y) &\equiv \beta_4 X_4 f + \beta_5 X_5 f + \beta_6 X_6 f + \beta Zf, \\ (X_3 Y) &\equiv \gamma_4 X_4 f + \gamma_5 X_5 f + \gamma_6 X_6 f + \gamma Zf. \end{aligned}$$

Hierin bezeichnet Zf jene Transformation, welche aus Yf dadurch entsteht, dass man in Yf die arbiträren Elemente durch beliebige andere ersetzt, welche die Convergenz der Reihenentwicklungen nicht aufheben.

Jede der Gleichungen (6) spaltet sich in drei. Man erhält

$$\xi_x = \alpha_4 y - \alpha_6 z + \dots,$$

$$\xi_y = \beta_4 y - \beta_6 z + \dots,$$

$$\xi_z = \gamma_4 y - \gamma_6 z + \dots$$

$$\eta_x = \alpha_5 z - \alpha_4 x + \dots,$$

$$\eta_y = \beta_5 z - \beta_4 x + \dots,$$

$$\eta_z = \gamma_5 z - \gamma_4 x + \dots$$

$$\zeta_x = \alpha_6 x - \alpha_5 y + \dots,$$

$$\zeta_y = \beta_6 x - \beta_5 y + \dots,$$

$$\zeta_z = \gamma_6 x - \gamma_5 y + \dots$$

Führt man die Integrabilitätsbedingungen ein, so findet man

$$\xi \equiv 0,$$

$$\eta \equiv 0,$$

$$\zeta \equiv 0.$$

Daher enthält die gesuchte Gruppe nur die in der Tabelle (2) angegebenen Transformationen.

2.

Der zweite Beweis beruht auf dem folgenden Lemma, dessen Richtigkeit man durch eine einfache Betrachtung erkennt.

Die Gruppe der Punkttransformationen, welche alle Flächeninhalte invariant lassen, führt Minimalfläche in Minimalfläche über.

Andererseits hat Lie längst gezeigt, dass die einzigen Punkttransformationen, welche Minimalfläche in Minimalfläche überführen und daher die Differentialgleichung derselben

$$(1 + q^2)r - 2pq s + (1 + p^2)t = 0$$

invariant lassen, die folgenden sind

$$X_1 f, X_2 f, X_3 f, X_4 f, X_5 f, X_6 f, \\ X_7 f \equiv x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Von diesen Transformationen ändert die letzte Flächeninhalte, während jede Bewegung alle Flächeninhalte invariant lässt. Somit erhalten wir als Ergebnis unserer Überlegungen:

Theorem. Die einzigen Punkttransformationen des Raumes, welche alle Flächeninhalte invariant lassen, sind die Bewegungen desselben.