Über Spitzen und Schleifen im Problème restreint.

Von *Elis Strömgren*.

In seiner bekannten Arbeit »Researches in the lunar theory« hat Hill die Untersuchung der Bewegung eines idealen Mondes im Problème restreint unter solchen Bedingungen durchgeführt, daß die parallaktischen Glieder zu vernachlässigen sind. Für diesen Fall, wo die periodischen Bahnen symmetrisch werden in bezug auf die beiden durch die »Erde« gehenden beweglichen rechtwinkligen Achsen, leitet er eine Reihe einfach periodische Mondbahnen ab, die in der Nähe der Erde, wo die in der Mondtheorie fundamentale Größe m einen kleinen Wert hat, annähernd die Kreisform besitzen und mit wachsendem m in der Richtung der Y -Achse immer mehr ausgezogen werden, bis die letzte von Hill gerechnete Bahn auf der Y -Achse Spitzen bildet. Poincaré hat (Méthodes nouvelles, I, 106 ff.) gezeigt, daß bei Fortsetzung dieser Bahnen für noch weiter wachsendes m auf der Y -Achse Schleifen auftreten.

Bei der Besprechung dieser Fragen im zweiten Bande seiner Mechanik des Himmels weist Charlier (S. 168 ff.) darauf hin, daß, wenigstens wenn wir von der Frage nach periodischen Bahnen absehen, solche Schleifen auch auf der X -Achse auftreten können. Es ist aber leicht zu zeigen, daß in dem ganz allgemeinen Falle des Problème restreint Spitzen und Schleifen in jedem Punkte der Ebene (von gewissen ausgezeichneten Punkten abgesehen) auftreten können, und zwar in der absoluten Bewegung ebensowohl wie in der auf bewegliche Achsen bezogenen.

Wir beziehen uns zunächst auf die absolute Bewegung. Wenn wir von den Punkten absehen, wo die zwei endlichen Massen m_1 und m_2 sich befinden, ist es klar, daß die Bewegung der unendlich kleinen Masse μ überall einen kontinuierlichen Verlauf haben muß, und daraus folgt, daß es für die Entstehung einer Spitze außerhalb der Punkte, wo m_1 und m_2 sich befinden, eine notwendige Bedingung ist, daß die Geschwindigkeit von μ in dem betreffenden Momente gleich null ist. In den Punkten m_1 und m_2 können andererseits Spitzen in der Bewegung der Masse μ nur dann entstehen, wenn die Geschwindigkeit in diesen Punkten unendlich groß ist (Ejektionsbahnen). Von diesem Falle, der zuerst von Burrau¹⁾ behandelt ist, und der in der Tat die einzigen existierenden wesentlichen Singularitäten des Problems umfaßt, wollen wir absehen (ebenso wie von den hierher gehörenden Schleifen), und wir beschränken uns im folgenden auf die Spitzen, die dadurch entstehen, daß die Geschwindigkeit gleich null wird. Die Geschwindigkeit null können

wir der Masse μ natürlich in jedem beliebigen Punkte zuerteilen, und unsere Aufgabe ist es dann zunächst zu untersuchen, wie die Masse μ diesen Zustand der Ruhe in jedem besonderen Punkte hat erreichen können und wie sich die Bewegung in der Nähe von der Ruhelage nachher gestalten wird.

Das oben gesagte hat sich auf die absolute Bewegung bezogen. Es ist aber ohne weiteres klar, daß es seine Gültigkeit auch nach jeder beliebigen Transformation beibehält, die die vorhandenen wesentlichen Singularitäten des Problems konserviert und keine neue solche in das Problem hineinbringt, obschon natürlich die Art der Spitzen von der betreffenden Transformation abhängig ist. Wir können also unsere Schlüsse auf die Bewegung in bezug auf kontinuierlich bewegliche Achsen direkt übertragen.

Zur Analogie behandeln wir zunächst den Fall, wo die Masse μ von zwei festen Zentren angezogen wird.

Wenn m_1 und m_2 die zwei festen Massen bezeichnen, $x_1 y_1 x_2 y_2$ die Koordinaten dieser Massen, bezogen auf ein festes Achsensystem (die X -Achse durch m_1 und m_2 gelegt) und $x y$ die Koordinaten der dritten Masse μ , so lauten, bei zweckmäßiger Wahl der Einheiten des Problems, die Bewegungsgleichungen für μ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial x} & \Omega &= -\frac{m_1}{\varrho_1} - \frac{m_2}{\varrho_2} & \varrho_1 &= \sqrt{(x-x_1)^2 + y^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial y} & & & \varrho_2 &= \sqrt{(x-x_2)^2 + y^2} \end{aligned} \quad (1)$$

Für die Gleichung der lebendigen Kraft erhalten wir:

$$V^2 = 2\Omega - C. \quad (2)$$

Die Kurve $2\Omega - C = 0$ (die Null-Geschwindigkeitskurve, Curve of Zero Velocity oder, nach einer naheliegenden Analogie, Niveaukurve), die die möglichen Gebiete der Bewegung von den unmöglichen abtrennt, hat je nach dem Werte der Konstante C das Aussehen zweier kreisähnlichen Ovale um die Massen m_1 und m_2 , einer Acht oder einer stundenglasähnlichen Figur²⁾. Für die Massen $m_1 = \frac{4}{5}$ und $m_2 = \frac{1}{5}$ habe ich in den Figuren 2, 3, 4 mit drei verschiedenen Werten (4 , $\frac{18}{5}$ und $\frac{23}{7}$) der Konstante C (die Distanz zwischen m_1 und m_2 gleich eins gesetzt) den Verlauf dieser Kurve gezeichnet.

¹⁾ A. N. 3251. Vgl. auch S. S. Hough, Acta Mathematica Bd. 24 und Levi-Civita, C. R., T. 136.

²⁾ Vgl. z. B. Bohlin, Bedeutung des Prinzips der lebendigen Kraft für die Frage von der Stabilität dynamischer Systeme, Acta Math. Bd. 10.

Wir gehen dann von einem beliebigen Punkte (x_0, y_0) aus und wollen die Bewegung in der Umgebung dieses Punktes der in einem bestimmten Moment in diesem Punkte ohne Geschwindigkeit befindlichen dritten Masse untersuchen.

Wir setzen

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \xi \\y &= y_0 + \eta\end{aligned}$$

und bilden:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega}{\partial x} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x_0} + \xi \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_0^2} + \eta \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_0 \partial y_0} + \dots \\ \frac{\partial \Omega}{\partial y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y_0} + \xi \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_0 \partial y_0} + \eta \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_0^2} + \dots\end{aligned}$$

wo wir die Reihenentwicklung mit der ersten Potenz der kleinen Größen ξ und η abschließen. Die Bewegungsgleichungen lauten dann:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \xi}{dt^2} &= S + \xi A + \eta B + \dots \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= T + \xi B + \eta C + \dots\end{aligned}\quad (3)$$

wenn wir zur Abkürzung S, T, A, B, C für $\frac{\partial \Omega}{\partial x_0}, \frac{\partial \Omega}{\partial y_0}, \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_0^2}, \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_0 \partial y_0}, \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_0^2}$ schreiben.

Wir denken uns dann die Koordinaten ξ, η nach Potenzen der Zeit entwickelt. Die Bedingung dafür, daß die Masse μ für $t = 0$ sich in dem Punkte x_0, y_0 ohne Geschwindigkeit befinden soll, wird dadurch ausgedrückt, daß in diesen Entwicklungen die konstanten und die der Zeit proportionalen Glieder fehlen. Wir setzen also:

$$\begin{aligned}\xi &= bt^2 + ct^3 + dt^4 + \dots \\ \eta &= nt^2 + pt^3 + qt^4 + \dots\end{aligned}\quad (4)$$

Wenn wir diese Ausdrücke in (3) einsetzen, können wir die Koeffizienten $b, c, \dots, n, p, \dots$ bestimmen, und wir erhalten:

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{2} S t^2 + \frac{1}{24} (AS + BT) t^4 + \dots \\ \eta &= \frac{1}{2} T t^2 + \frac{1}{24} (BS + CT) t^4 + \dots\end{aligned}\quad (5)$$

Aus der Definition der Größen S und T geht hervor, daß diese Größen den Richtungskosinussen (in bezug auf die X - und Y -Achse resp.) der Normale der N.-G.-Kurve im Punkte x_0, y_0 proportional sind, und wir können dann aus den ersten Gliedern der Gleichungen (5) den Schluß ziehen, daß die Bewegung von μ in der nächsten Umgebung von einem beliebigen Punkte auf der Normale der durch diesen Punkt gezogenen N.-G.-Kurve vor sich gehen muß, wenn die

Anfangsgeschwindigkeit gleich null ist (wie leicht zu zeigen ist, muß die Bewegung in dem vorliegenden Probleme immer nach innen gerichtet sein). Unbestimmt ist dies Resultat nur wenn $S = T = 0$, d. h. in dem Doppelpunkt (Fig. 3). In diesem Fall bleibt die Masse μ in diesem Doppelpunkt für immer liegen. Aus den Gleichungen (5) ergibt sich weiter, daß nicht nur die erste, sondern auch die dritte Potenz von t fehlt. Es läßt sich leicht durch eine weiter geführte Approximation zeigen, daß überhaupt in den Entwicklungen (4) alle ungeraden Potenzen von t fehlen müssen, daß also die Koordinaten ξ und η für $-t$ und $+t$ dieselben Werte besitzen, und dadurch kommen wir zu dem weiteren Schlusse, daß in diesem Probleme die Masse μ die Ruhelage in x_0, y_0 auf ganz demselben Wege verläßt, auf dem sie diesen Punkt erreicht hat. Diese Sätze lassen sich auf eine beliebige Anzahl feste Zentren und auf die Bewegung in drei Dimensionen erweitern.

Da also eine Spitzenbewegung immer in der Richtung der Normale der N.-G.-Kurve anfängt, haben wir eventuelle Schleifen natürlich in der Weise zu suchen, daß wir im Punkte x_0, y_0 der Masse μ eine minimale Geschwindigkeit senkrecht gegen diese Normale zuerteilen.

Wir schreiben zunächst, statt (4):

$$\begin{aligned}\xi &= at + bt^2 + ct^3 + \dots \\ \eta &= mt + nt^2 + pt^3 + \dots\end{aligned}\quad (6)$$

Durch Einsetzen in (3) bestimmen wir die Koeffizienten $b, c, \dots, n, p, \dots$ wie vorher und erhalten:

$$\begin{aligned}\xi &= at + \frac{1}{2} S t^2 + \frac{1}{6} (aA + mB) t^3 + \dots \\ \eta &= mt + \frac{1}{2} T t^2 + \frac{1}{6} (aB + mC) t^3 + \dots\end{aligned}\quad (7)$$

Wir bezeichnen mit φ den Winkel, den die Normale der N.-G.-Kurve mit der X -Achse macht und drehen das Koordinatensystem um den Winkel φ in positiver Richtung, d. h. wir wählen die betreffende Normale zur X -Achse. Die neuen Koordinaten ξ_1, η_1 ergeben sich dann aus:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi \\ \eta_1 &= -\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi\end{aligned}\quad (8)$$

wo $\cos \varphi = \frac{S}{\gamma}, \sin \varphi = \frac{T}{\gamma}, \gamma = \pm \sqrt{S^2 + T^2}$. (9)

Nur für den oben erwähnten Doppelpunkt, wo keine Spitze möglich ist, verliert diese Transformation ihren Sinn, und wir sehen im folgenden von diesem Fall ab.

Wenn wir die Transformation ausführen, erhalten wir:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{1}{\gamma} (aS + mT) t + \frac{1}{2} \gamma t^2 + \frac{1}{6\gamma} (aAS + mBS + aBT + nCT) t^3 \dots \\ \eta_1 &= \frac{1}{\gamma} (-aT + mS) t + \frac{1}{6\gamma} (-aAT - mBT + aBS + mCS) t^3 \dots\end{aligned}\quad (10)$$

Wir setzen dann

$$\begin{aligned}aS + mT &= 0 \\ \frac{1}{\gamma} (-aT + mS) &= H\end{aligned}$$

wo H eine sehr kleine Größe bedeuten soll, und erhalten:

$$\begin{aligned}
 a &= -\frac{HT}{\gamma} & m &= +\frac{HS}{\gamma} \\
 \xi_1 &= \frac{1}{2}\gamma t^2 + \frac{H}{6\gamma^2}(-AST + BS^2 - BT^2 + CST)t^3 \dots \\
 \eta_1 &= Ht + \frac{H}{6\gamma^2}(AT^2 - 2BST + CS^2)t^3 \dots
 \end{aligned} \tag{11}$$

Die zweite Gleichung können wir folgender Weise schreiben:

$$\eta_1 = Ht \left[1 + \frac{1}{6\gamma^2}(AT^2 - 2BST + CS^2)t^2 \dots \right]$$

und wir sehen daraus sofort, daß in diesem Probleme überhaupt keine kleinen Schleifen vorkommen können, da η_1 für keine kleinen Werte von t außer $t = 0$ verschwinden kann.

Wir gehen dann zum »Problème restreint« über. Wenn $m_1 + m_2 = 1$, und wenn wir die Gravitationskonstante $= 1$ setzen und die Distanz der zwei Hauptmassen zur Einheit der Länge wählen, so lauten, auf das durch den Schwerpunkt des Systems gehende bewegliche Achsensystem bezogen, die Bewegungsgleichungen von μ :

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} & r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
 \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} & \Omega &= \frac{1}{2}r^2 + \frac{m_1}{\varrho_1} + \frac{m_2}{\varrho_2} \\
 & & \varrho_1 &= \sqrt{(x - x_1)^2 + y^2} \\
 & & \varrho_2 &= \sqrt{(x - x_2)^2 + y^2}
 \end{aligned} \tag{12}$$

Mit denselben Bezeichnungen wie in den Gleichungen (5) erhalten wir für die Bewegung von μ , wenn sie für $t = 0$ mit der Geschwindigkeit null in irgend einem Punkte $x_0 y_0$ anfängt:

$$\begin{aligned}
 \xi &= \frac{1}{2}St^2 + \frac{1}{3}Tt^3 + \frac{1}{24}(-4S + AS + BT)t^4 \dots \\
 \eta &= \frac{1}{2}Tt^2 - \frac{1}{3}St^3 + \frac{1}{24}(-4T + BS + CT)t^4 \dots
 \end{aligned} \tag{13}$$

Die Transformation (8) gibt, wenn wir uns auf die Glieder bis zur dritten Ordnung beschränken:

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= \frac{1}{2}\gamma t^2 \dots \\
 \eta_1 &= -\frac{1}{3}\gamma t^3 \dots
 \end{aligned} \tag{14}$$

also eine semikubische Parabel¹⁾.

In der Figur 1 habe ich, mit dem Darwinschen Massenverhältnis $m_1 : m_2 = 10 : 1$, für eine Reihe von Punkten die Bewegungsrichtung in den Spitzen gezeichnet. Das Hauptsächliche läßt sich folgenderweise zusammenfassen:

In den fünf Lagrangeschen Librationspunkten, wo bekanntlich die dritte Masse für immer in Ruhe bleibt, wenn sie es für einen einzigen Zeitmoment ist, haben wir $S = T = 0$, und nur in diesen Punkten hat die Transformation (8) keinen Sinn. Auf einem Zweige einer N.-G.-Kurve behält die Bewegung auf der Spitze ihre Richtung unverändert, solange der Zweig nicht durch einen von den Librationspunkten geht. In den inneren Ovalen, in der achtförmigen und in der stundenglasähnlichen Figur sind die Spitzen immer nach außen gerichtet, in dem äußeren Oval immer nach innen. Wenn wir die Richtung der Normale in den inneren Ovalen, der achtförmigen und der stundenglasähnlichen Figur nach innen, in dem äußeren Oval nach außen festlegen (in den Kurven, die durch Verschmelzung dieser verschiedenen Zweige entstehen, ergibt sich dann die Richtung der Normale von selbst), so können wir in bezug auf die

Figur 1.

¹⁾ Vgl. Darwin, Periodic Orbits (Acta Mathematica Bd. 21 p. 132).

Bewegungsrichtung auf der Spitze folgenden Satz aussprechen: Wenn wir uns auf der Normale befinden und nach der Kurve hin blicken, so geht die Bewegung der Masse μ auf der Spitze immer von rechts nach links vor sich.

Um die Existenz von Schleifen zu untersuchen, verfahren wir ganz so wie in dem Probleme mit zwei festen Zentren. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}\xi &= at + \left(\frac{1}{2}S + m\right)t^2 + \frac{1}{3}(T - 2a + \frac{1}{2}aA + \frac{1}{2}mB)t^3 \dots \\ \eta &= mt + \left(\frac{1}{2}T - a\right)t^2 + \frac{1}{3}(-S - 2m + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}mC)t^3 \dots\end{aligned}\quad (15)$$

$$a = -\frac{HT}{\gamma} \quad m = +\frac{HS}{\gamma}$$

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \left(\frac{1}{2}\gamma + H\right)t^2 + \frac{H}{6\gamma}(-AST + CST - BT^2 + BS^2)t^3 \dots \\ \eta_1 &= Ht + \left[-\frac{1}{3}\gamma + \frac{H}{3\gamma^2}(-2\gamma^2 + \frac{1}{2}AT^2 + \frac{1}{2}CS^2 - BST)\right]t^3 \dots\end{aligned}\quad (16)$$

Da wir von der Voraussetzung ausgehen, daß H eine sehr kleine Größe ist, können wir angenähert schreiben:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{1}{2}\gamma t^2 \\ \eta_1 &= Ht - \frac{1}{3}\gamma t^3 \dots\end{aligned}\quad (17)$$

Die Bedingung $\eta_1 = 0$ wird, außer durch $t = 0$, durch zwei kleine Werte von t erfüllt:

$$t = \pm \sqrt[3]{\frac{H}{\gamma}}\quad (18)$$

also durch zwei reelle t -Werte, wenn H/γ positiv ist.

Da obige Ableitung ganz allgemein gültig ist, wenn wir von den Librationspunkten und ihrer nächsten Umgebung absehen, so ist es also mit diesen Ausnahmen möglich in jedem Punkte der ganzen Ebene Schleifen zu finden, deren Hauptachsen mit der Normale der N.-G.-Kurve in dem be-

treffenden Punkte zusammenfallen, wenn wir nur dafür sorgen, daß H dasselbe Vorzeichen hat wie γ , d. h. nach unserer Festlegung der Richtungen, wenn H positiv ist und also die Masse μ sich im Punkte $x_0 y_0$ von links nach rechts bewegt. Selbstverständlich gibt es [auch wenn wir von den höheren Potenzen in (16) absehen] in jedem Punkte der Ebene auch Schleifen, deren Hauptachsen eine kleine Neigung gegen die Normale der N.-G.-Kurve besitzen.

Die Untersuchung der Spitzen und Schleifen der absoluten, d. i. auf ein festes Koordinatensystem bezogenen, Bewegung im Probleme restreint ist eine etwas kompliziertere Aufgabe.

Mit denselben Einheiten wie vorher und bezogen auf ein festes durch den Schwerpunkt des Systems gehendes Koordinatensystem lauten die Bewegungsgleichungen für μ :

$$\begin{aligned}\frac{d^2 X}{dt^2} &= \frac{\partial \Omega}{\partial X} & \Omega &= \frac{m_1}{q_1} + \frac{m_2}{q_2} & q_1 &= \sqrt{(X - m_2 \cos t)^2 + (Y - m_2 \sin t)^2} \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} &= \frac{\partial \Omega}{\partial Y} & & & q_2 &= \sqrt{(X + m_1 \cos t)^2 + (Y + m_1 \sin t)^2}\end{aligned}\quad (19)$$

wenn wir die für $t = 0$ geltende Verbindungsgerade zwischen m_1 und m_2 zur X -Achse wählen.

Wir schreiben

$$\begin{aligned}X &= X_0 + \xi \\ Y &= Y_0 + \eta\end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \xi}{dt^2} &= \frac{\partial \Omega}{\partial X} \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= \frac{\partial \Omega}{\partial Y}\end{aligned}\quad (20)$$

Wir wollen jetzt links in den Gleichungen (20) die absoluten Koordinaten (ξ, η) beibehalten und rechts vorläufig Koordinaten (x, y) einführen, die auf das mit der Verbindungsgeraden m_1, m_2 bewegliche System bezogen sind.

Wir haben dann:

$$\begin{aligned}x &= X \cos t + Y \sin t & x_0 &= X_0 \\ y &= -X \sin t + Y \cos t & y_0 &= Y_0\end{aligned}\quad (21)$$

und dann aus (20):

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \xi}{dt^2} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} \cos t - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \sin t \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} \sin t + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \cos t.\end{aligned}\quad (22)$$

Durch Entwicklung nach Potenzen von $(x - x_0)$ und $(y - y_0)$ ergibt sich, wenn wir zur Abkürzung die Bezeichnungen $S, T; A, B, C$ für $\frac{\partial \Omega}{\partial x_0}, \frac{\partial \Omega}{\partial y_0}; \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_0^2}, \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_0 \partial y_0}, \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_0^2}$ einführen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Omega}{\partial x} &= S + (x - x_0)A + (y - y_0)B + \dots \\ \frac{\partial \Omega}{\partial y} &= T + (x - x_0)B + (y - y_0)C + \dots\end{aligned}\quad (23)$$

Wenn wir jetzt in (22) einsetzen und $\sin t$ und $\cos t$ nach Potenzen von t entwickeln, erhalten wir bis zur ersten Potenz von t :

$$\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2} &= S + (x - x_0)A + (y - y_0)B - Tt - (x - x_0)Bt - (y - y_0)Ct \dots \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= St + (x - x_0)At + (y - y_0)Bt + T + (x - x_0)B + (y - y_0)C \dots\end{aligned}\quad (24)$$

Aus (21) erhalten wir

$$\begin{aligned}x - x_0 &= \xi + y_0 t + \eta t \dots \\ y - y_0 &= \eta - x_0 t - \xi t \dots\end{aligned}\quad (25)$$

und, wenn wir in (24) einsetzen:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2} &= S + A\xi + y_0 At + A\eta t + B\eta - x_0 Bt - 2B\xi t - Tt - C\eta t \dots \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= St + A\xi t + 2B\eta t + T + B\xi + y_0 Bt + C\eta - x_0 Ct - C\xi t \dots\end{aligned}\quad (26)$$

oder, wenn in ξ, η die nullte und erste Potenz von t fehlen sollen:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2} &= S + y_0 At - x_0 Bt - Tt \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= T + y_0 Bt - x_0 Ct + St.\end{aligned}\quad (27)$$

Wenn dann

$$\begin{aligned}\xi &= bt^2 + ct^3 \dots \\ \eta &= nt^2 + pt^3 \dots\end{aligned}\quad (28)$$

so ergibt sich aus (27):

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{2}St^2 + \frac{1}{6}(-T + y_0A - x_0B)t^3 \dots \\ \eta &= \frac{1}{2}Tt^2 + \frac{1}{6}(S + y_0B - x_0C)t^3 \dots\end{aligned}\quad (29)$$

Wenn wir die Transformation (8) anwenden, ergibt sich:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{1}{2}\gamma t^2 + \frac{1}{6\gamma}(y_0AS - x_0BS + y_0BT - x_0CT)t^3 \dots \\ \eta_1 &= \frac{1}{6\gamma}(S^2 + T^2 - y_0AT + x_0BT + y_0BS - x_0CS)t^3 \dots\end{aligned}\quad (30)$$

Die Größen S, T, A, B, C stellen die fünf partiellen Derivierten erster und zweiter Ordnung der Funktion

$$\mathcal{Q} = \frac{m_1}{\varrho_1} + \frac{m_2}{\varrho_2}$$

nach x_0 und y_0 dar. Um in diesem Probleme, wo wir ja für die Masse μ keine dem Jacobischen Integral entsprechende Gleichung besitzen, die Bedeutung dieser fünf Größen und den Sinn der Transformation (8) zu verstehen, haben wir also nur festzuhalten, daß $2\mathcal{Q} - C = 0$ hier die momentane Kurve $2\mathcal{Q}_0 - C = 0$ für $t = 0$ bedeutet.

Wenn wir die absolute Bewegung von μ in der Nähe eines Punktes x_0y_0 untersuchen wollen unter der Annahme,

daß μ für $t = 0$ in diesem Punkte still liegt, konstruieren wir also die durch x_0y_0 gehende N.-G.-Kurve für $t = 0$ nach den Prinzipien des Problems der Anziehung nach zwei festen Zentren. Dann ergibt sich aus den Formeln (30): 1. daß die Bewegung längs der Normalen der in dieser Weise definierten Kurve den Punkt x_0y_0 verläßt, 2. daß wir für die Bewegung eine Spitze erhalten von ganz derselben Art wie in der Bewegung in bezug auf bewegliche Achsen und 3. daß in der absoluten Bewegung die Bewegungsrichtung auf der Spitze von dem Vorzeichen des Koeffizienten von t^3 in der zweiten Gleichung (30), also vom Vorzeichen der Größe

$$W = \frac{1}{6\gamma}(S^2 + T^2 - y_0AT + x_0BT + y_0BS - x_0CS)\quad (31)$$

abhängig ist. Wie in dem Problem der Anziehung nach zwei festen Zentren wird die Transformation (8) nur im Doppelpunkte ohne Sinn werden.

Wenn wir dann die fünf erwähnten partiellen Derivierten

bilden und in (31) einsetzen, erhalten wir nach leicht verständlicher Reduktion:

$$W = \frac{m_1 m_2}{6\gamma} U\quad (32)$$

wo

$$U = \frac{3y_0^2}{\varrho_1^3 \varrho_2^3} \left(\frac{m_2}{\varrho_1^2} + \frac{m_1}{\varrho_2^2} \right) + \left(\frac{1}{\varrho_2^3} - \frac{1}{\varrho_1^3} \right) \left(\frac{m_2(x_0 + m_1)}{\varrho_2^3} + \frac{m_1(x_0 - m_2)}{\varrho_1^3} \right)\quad (33)$$

und ϱ_1, ϱ_2 die in (19) definierte Bedeutung für $t = 0$ haben.

Da wir durch eine ähnliche Definition der Richtungen wie vorher das Vorzeichen von γ festlegen können, haben wir nur die Funktion U zu untersuchen. Zunächst zeigt uns (33), daß U symmetrisch ist in bezug auf die X -Achse. Eine eingehendere Diskussion des Ausdrucks für U gibt weiter folgende Resultate:

In der Kurve II (Fig. 2) ist im Punkte A der Ausdruck U negativ und die Bewegung auf der Spitze geht von rechts nach links. In B ist $U = 0$ und ändert das Vorzeichen;

wenn wir weiter nach C hingehen, wird U positiv, und die Bewegung auf der Spitze geht von links nach rechts. In C ist U wieder gleich null, hat aber hier ein Minimum und ändert das Vorzeichen nicht. In dem linken Oval ist U in $D > 0$, Bewegung von links nach rechts, in F ist $U < 0$, Bewegung von rechts nach links.

Wenn wir die Verhältnisse in dem Falle untersucht hätten, wo die zwei Ovale noch kleiner sind (wir können dies Fall I nennen), so hätten wir ganz dieselben Resultate erhalten, nur mit dem Unterschied, daß U auch in $C > 0$ geblieben wäre.

Fig. 2. Kurve II. $\frac{4}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = 10$.

Wenn die Ovale sich erweitern (Fall III), bekommen wir für das linke Oval dieselben Resultate wie bisher; im rechten Oval wird aber U jetzt zweimal das Vorzeichen ändern und also in der Nähe von C negativ werden, so daß hier die Bewegung auf der Spitze wieder von rechts nach links geht.

Wenn wir die Ovale immer mehr erweitern, kommen wir allmählich zu dem Falle, wo die Kurve einen Doppelpunkt besitzt (Kurve IV, Fig. 3). Hier ist wieder $U < 0$ in A und ändert das Vorzeichen in B , B_1 , C , E , und dementsprechend können wir natürlich die Spitzenbewegung bestimmen.

Fig. 3. Kurve IV. $\frac{4}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = 9$.

Der nächste Schritt ist eine stundenglasähnliche Figur mit sehr enger Einschnürung (Fall V). Hier liegen die Ver-

hältnisse ganz so wie in Falle IV, mit Ausnahme davon, daß wir keinen Doppelpunkt haben.

Erweitert sich die Kurve, so vermindert sich das schmale Gebiet in der Mitte, wo $U < 0$, bis wir zu einer Kurve kommen (Fall VI), wo U in der Mitte eben den Wert null erreicht, ohne das Vorzeichen zu wechseln.

Nachher (Kurve VII, Fig. 4) ist U im ganzen mittleren Gebiet, von B bis E , positiv, und bei immer weiter getriebener Erweiterung der Kurve, bis zu einem kreisähnlichen Oval mit sehr großem Durchmesser, bleibt dies Verhältnis bestehen.

Fig. 4. Kurve VII. $\frac{4}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = 8\frac{8}{14}$.

In dem speziellen Fall, wo $m_1 = m_2$ und die Kurven symmetrisch werden in bezug auf die Y -Achse, fallen II, III, IV zusammen, und ebenso V, VI, VII.

Wir gehen dann zu den Schleifen über. Wir schreiben:

$$\xi = at + bt^2 + ct^3 \dots$$

$$\eta = mt + nt^2 + pt^3 \dots$$

Wenn wir in (26) einsetzen und die Koeffizienten wie vorher bestimmen, dann die Transformation (8) ausführen und wie in den zwei vorher behandelten Problemen

$$a = -\frac{HT}{\gamma} \quad m = +\frac{HS}{\gamma}$$

setzen, so erhalten wir:

$$\xi_1 = \frac{1}{2}\gamma t^2 + \frac{1}{6\gamma} \left(\frac{H}{\gamma} (-AST - BT^2 + BS^2 + CST) + (y_0 AS - x_0 BS + y_0 BT - x_0 CT) \right) t^3 \dots$$

$$\eta_1 = Ht + \frac{1}{6\gamma} \left(\frac{H}{\gamma} (AT^2 - 2BST + CS^2) + 6\gamma W \right) t^3 \dots$$

wo W aus (31) bekannt ist.

Da H sehr klein sein soll, können wir den Ausdruck für η_1 folgender Weise schreiben:

$$\eta_1 = Ht + Wt^3 \dots$$

Wir erhalten also:

$$\eta_1 = 0 \text{ für } t = 0, \quad t = +\sqrt{-\frac{H}{W}} \text{ und } t = -\sqrt{-\frac{H}{W}}$$

und daraus ergibt sich, daß wir, mit Ausnahme von den Punkten, wo $S = T = 0$ oder wo $W = 0$ und von der nächsten Umgebung dieser Punkte, überall Schleifenbewegung erhalten können, wenn wir nur der kleinen Größe H das entgegengesetzte Vorzeichen wie W geben. In den Figuren 2, 3, 4 habe ich einige solche Schleifen mit Angabe der Bewegungsrichtung (die sich ja direkt aus der Spitzenbewegung ergibt) eingezeichnet.

Es ist nicht ohne Interesse zu sehen, wie einfach das Gesetz der Schleifenbewegung sich im Probleme restreint mit beweglichen Achsen ausdrücken läßt im Vergleich mit den Verhältnissen in der absoluten Bewegung. Wir haben aber hier nicht mit etwas Zufälligem zu tun, sondern nur mit einem Ausdruck des allgemeinen Verhältnisses, daß überhaupt das Probleme restreint naturgemäß auf bewegliche und nicht auf feste Achsen bezogen werden soll.

Die gegebenen Entwicklungen gelten, streng genommen, nur für sehr kurze Zeiten; es ist aber leicht ersichtlich — und hier haben wir den springenden Punkt — daß unsere

Kiel, Bureau der Astr. Nachr., Dezember 1906.

Schlüsse sich beträchtlich erweitern lassen. So gibt es zum Beispiel im Problem der Anziehung nach einer beliebigen Anzahl fester Zentren überhaupt keine Schleifen, die nicht wenigstens eins von den festen Zentren einschliessen (hier, wie überall in diesen Problemen, sind die Massenpunkte die kritischen Stellen). Und, wenn wir die Figuren 3, 5, 6 und die Tafeln II, III, IV in Darwins Periodic Orbits ansehen, treffen wir dort verschiedene Beispiele von Bewegung in Schleifen an, von ganz anderen Dimensionen als die hier direkt behandelten, wo wir in allen Fällen unsere einfachen Schlüsse in bezug auf die Bewegungsrichtung bestätigt finden.

Elis Strömgren.

Bestimmung der Bahn des Planeten (588) [1906 TG].

Von *F. Bidschof*.

Der von Prof. M. Wolf am 22. Februar 1906 in Heidelberg entdeckte transjovische Asteroid ist von Dr. Palisa mit Hilfe des großen Refraktors der k. k. Sternwarte in Wien bis zum 19. Mai 1906 beobachtet worden. Im Juni wurden auf meine diesbezügliche Bitte von den Astronomen der Sternwarte in Washington, sowie von denen der Lick-Sternwarte und des Yerkes-Observatory noch Versuche gemacht, weitere Beobachtungen zu erhalten, doch scheiterten diese Bemühungen infolge der Ungunst der Witterung und der Lichtschwäche des Planeten, so daß die Wiener Beobachtungsreihe, welche sukzessive in den Astr. Nachr. Nr. 4079–4095 publiziert wurde, fast ausschließlich die Grundlagen für die Bestimmung der Bahn dieses interessanten Asteroiden abgibt. Außer ihr steht nämlich nur die von Herrn Kopff genau ausgemessene Entdeckungsposition zur Verfügung, welche Prof. Berberich am Eingang seiner Mitteilung über die Bahn des Planeten in Nr. 4088 der Astr. Nachr. angeführt hat.¹⁾ Die meisten dieser Ortsbestimmungen sind isoliert und wurden auch, wie die später folgende Tabelle zeigt, isoliert bei der Rechnung ver-

wendet; nur die vier Beobachtungen aus der zweiten Märzhälfte wurden zu einem Normalort vereinigt, dessen Epoche auf den 24. März gelegt wurde. Diese vier Beobachtungen zeigen die nachstehenden, im Sinne B — R angesetzten, Abweichungen gegen eine Ephemeride, welche auf das von Prof. Berberich abgeleitete Elementensystem gegründet ist:

1906 März 17	$\cos \delta \, d\alpha = +0^{\circ}11$	$d\delta = +1^{\circ}3$
» 23	$= -0.02$	$= 0.0$
» 26	$= -0.24$	$= -2.4$
» 30	$= -0.35$	$= -1.8$

Hiermit sind die ersten Rubriken der folgenden Zusammenstellung erklärt. Es ist nur noch zu erwähnen, daß für die verschiedenen Reduktionsrechnungen Daten, welche die zitierten Berberichschen Elemente lieferten, benutzt worden sind und daß mich, sowohl bei den vorbereitenden, als auch bei einem Teil der späteren Rechnungen der wissenschaftliche Hilfsarbeiter am k. k. maritimen Observatorium, Herr cand. phil. *F. Zweck* freundlichst unterstützt hat.

Nr. d. Ortes	M. Z. Berlin 1906	Rektaszension 1906.0	Deklination 1906.0	Gew.	v	$\log r$	$\log \Delta$	B — R	
								$\cos \delta \, d\alpha$	$d\delta$
I	Febr. 22.36809	$9^{\text{h}} 21^{\text{m}} 15^{\text{s}} 24$	$+14^{\circ} 5' 20''.7$	—	$+56^{\circ} 33'$	0.6788	0.5810	$0^{\circ}00$	$-0''.1$
II	März 5.40954	9 15 42.72	$+14 17 24.0$	1	$+57 38$	0.6797	0.5889	$+0.41$	-5.0
III	» 24.50000	9 9 7.12	$+14 27 5.9$	4	$+59 29$	0.6813	0.6102	-0.05	-4.2
IV	April 13.37658	9 7 25.50	$+14 18 6.5$	1	$+61 25$	0.6830	0.6387	-0.24	-4.3
V	» 22.38696	9 8 27.18	$+14 7 20.4$	1	$+62 17$	0.6837	0.6525	-0.17	0.0
VI	Mai 10.35590	9 13 33.62	$+13 33 22.2$	1	$+64 0$	0.6853	0.6797	-0.23	-0.6
VII	» 19.36160	9 17 28.28	$+13 10 27.1$	—	$+64 51$	0.6861	0.6928	$+0.01$	-0.1

In dieser Tabelle geben die auf die Gewichtsrubrik folgenden Kolumnen die wahre Anomalie, den Radiusvektor und die geozentrische Distanz für die Zeit der betreffenden Position. Diese Größen sind so angesetzt, wie sie sich aus dem schließlich erhaltenen Elementensystem ergeben; ihre Anführung soll die Bildung eines Urteils über die bei dieser Bahnbestimmung obwaltenden Verhältnisse erleichtern. Zur Ableitung der Elemente wurde das Verfahren der Variation

der geozentrischen Distanzen benutzt und als Fundamentalörter die erste und die letzte der vorstehenden Positionen gewählt, wobei der Rechnung von vornherein separat ermittelte, schon ziemlich genäherte Werte für die zu diesen Örtern gehörigen Distanzen zugrunde gelegt wurden. Die so erhaltenen Elemente sind die folgenden, bei welchen die Bahnlage auch gleich für die Epoche 1907.0 angeführt ist.

¹⁾ Die Deklination dieser Position ist, wie ein Vergleich mit der provisorischen Angabe in Nr. 4078 der Astr. Nachr. vermuten ließ und eine private Mitteilung von Prof. Berberich bestätigt, $+14^{\circ} 5' 19''.3$. Vgl. auch Nr. 4151 p. 366.