Über besondere Jacobische Polynome.

Von

Lothar Koschmieder in Breslau.

In meiner Habilitationsschrift¹⁾ ist die Differentialgleichung

$$(1) \quad (1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2\alpha x \frac{dy}{dx} + \lambda y = 0$$

behandelt, in der α eine beliebige positive Konstante ist. Ihre einzigen auf der Strecke von $x=0$ bis $x=+1$ endlichen und stetigen Integrale, die die Randbedingungen

$$(2a) \quad y(0) = 0,$$

$$(2b) \quad y'(0) = 0$$

erfüllen, kommen für die Werte

$$(3) \quad \lambda = \lambda_n = n(2\alpha + n - 1)$$

des Parameters λ zustande, wo

$$(3a) \quad n = 2m + 1, \quad (3b) \quad n = 2m \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

ist; diese Integrale sind die besonderen Jacobischen Polynome (a) ungeraden, (b) geraden Grades:

$$(4a) \quad y_{2n+1} = V_{2n+1}(x, \alpha), \quad (4b) \quad y_{2n} = V_{2n}(x, \alpha).$$

Sie sind Eigenfunktionen einer Greenschen Funktion, der im abgeschlossenen Grundgebiete mit ihrer Ableitung endlichen Lösung der Differentialgleichung

$$(5a) \quad (1-x^2) \frac{d^2 z}{dx^2} - 2\alpha x \frac{dz}{dx} = 0,$$

$$(5b) \quad (1-x^2) \frac{d^2 z}{dx^2} - 2\alpha x \frac{dz}{dx} - 2c_0^2 = 0,$$

$$c_0^2 = 2 \int_0^1 p(x) dx = \frac{2^{2\alpha-1} \Gamma(\alpha)^2}{\Gamma(2\alpha)}, \quad p(x) = (1-x^2)^{\alpha-1},$$

¹⁾ Untersuchungen über Jacobische Polynome, Breslau 1919 (Trewendt u. Granier). Die Arbeit wird im folgenden mit H. angeführt.

die den Randbedingungen genügt und selbst im Grundgebiete stetig ist, während ihre Ableitung an der Stelle $x = \xi$ in einer durch die Formel

$$(6) \quad \left[(1-x^2) p(x) \frac{dz}{dx} \right]_{\xi+0}^{\xi-0} = 1$$

gekennzeichneten Weise unstetig wird. Diese Greensche Funktion, die im „ausgearteten“ Falle (b) noch der Beziehung

$$(7b) \quad \int_0^1 p(x) z(x) dx = 0$$

genügt, wird, je nachdem ob der Fall (a) oder (b) vorliegt, durch folgende Formeln dargestellt:

$$(8a) \quad x < \xi, \quad G(x, \xi) = \int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^\alpha},$$

$$(8b) \quad x < \xi, \quad G(x, \xi) = 2c_0^2 \left\{ \int_0^x \frac{1}{(1-t^2)^\alpha} \int_0^t (1-s^2)^{\alpha-1} ds dt \right. \\ - \int_0^\xi \frac{dt}{(1-t^2)^\alpha} \int_\xi^1 (1-t^2)^{\alpha-1} dt + \int_\xi^1 (1-t^2)^{\alpha-1} \int_0^t \frac{ds}{(1-s^2)^\alpha} dt \\ \left. - 2c_0^2 \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-1} \int_0^t \frac{1}{(1-s^2)^\alpha} \int_0^s (1-r^2)^{\alpha-1} dr ds dt \right\};$$

wegen der leicht zu erweisenden Symmetrieeigenschaft $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ genügt es, den für $x < \xi$ geltenden Ausdruck anzuschreiben. Mit diesen Kernen genügen die Eigenfunktionen den Integralgleichungen

$$(9a) \quad V_{2n+1}(\xi) = \lambda_{2n+1} \int_0^1 p(x) G(x, \xi) V_{2n+1}(x) dx,$$

$$(9b) \quad V_{2n}(\xi) = \lambda_{2n} \int_0^1 p(x) G(x, \xi) V_{2n}(x) dx, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$0 = \int_0^1 p(x) G(x, \xi) V_0(x) dx.$$

Die Orthogonalitätseigenschaft

$$(10) \quad \int_0^1 p(x) y_m(x) y_n(x) dx = 0$$

macht jedes der Funktionensysteme (a), (b) zur Entwicklung willkürlicher Funktionen geeignet. Ist $f(x)$ eine mit ihren drei ersten Ableitungen stückweise stetige Funktion, so gelten die Entwicklungen

$$(11a) \quad f(x) = \sum_n^{0, \infty} V_{2n+1}(x) \int_0^1 p(\xi) f(\xi) V_{2n+1}(\xi) d\xi,$$

$$(11b) \quad f(x) = \sum_n^{0, \infty} V_{2n}(x) \int_0^1 p(\xi) f(\xi) V_{2n}(\xi) d\xi,$$

wenn die Eigenfunktionen normiert sind, d. h. $\int_0^1 p(x) y_n(x)^2 dx = 1$ ist. Für $\alpha = 1$ erhält man so Reihen, die nach Legendreschen Polynomen fortschreiten; für $\alpha = \frac{1}{2}$ Fouriersche Reihen, indem dann bei der Substitution $x = \cos \varphi$ das Jacobische Polynom $V_n(x, \frac{1}{2})$ mit $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos n\varphi$ übereinstimmt. Auch die Fälle $\alpha = \frac{1}{3}$, $\alpha = \frac{1}{4}$ scheinen der Beachtung nicht unwert; an Stelle der eben angeführten trigonometrischen Substitution tritt dann eine elliptische, und es ergibt sich die bemerkenswerte Entwicklung willkürlicher Funktionen nach gewissen elliptischen Funktionen. Im Falle $\alpha = \frac{1}{4}$ führt man lemniskatische Funktionen mit dem Werte $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$ des Jacobischen Moduls ein²⁾; den Fall $\alpha = \frac{1}{3}$ behandelt man mit Hilfe der Weierstraßschen äquianharmonischen elliptischen Funktionen mit dem Invariantenwerte $g_2 = 0$, wie im folgenden ausgeführt wird.

§ 1.

Einführung der elliptischen Funktionen.

In der Differentialgleichung (1), die für $\alpha = \frac{1}{3}$ lautet

$$(12) \quad (1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{2}{3} x \frac{dy}{dx} + \lambda_n y = 0, \quad \lambda_n = n \left(n + \frac{1}{3} \right),$$

setzen wir

$$(13) \quad \begin{aligned} x &= \wp'(u; 0, -1), \\ \wp' u^2 &= 4 \wp u^3 + 1, \quad g_2 = 0, \quad g_3 = -1, \\ 1 - x^2 &= -4 \wp u^3, \quad dx = \wp'' u du = 6 \wp u^2 du. \end{aligned}$$

Wird dann $y(x)$ als Funktion von u mit $\varphi(u)$ bezeichnet, so erhält (12) die Form

$$(14) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\wp u} \frac{d^2 \varphi(u)}{du^2} - \frac{\wp' u}{\wp u^2} \frac{d\varphi(u)}{du} - 9 \lambda_n \varphi(u) &= 0, \\ \frac{d}{du} \left(\frac{1}{\wp u} \frac{d\varphi(u)}{du} \right) - 9 \lambda_n \varphi(u) &= 0. \end{aligned}$$

Die äquianharmonische $\wp$ -Funktion hat eine angebbare Nullstelle

$$(15) \quad u_0 = \frac{2\omega}{3},$$

²⁾ H. § 10.

wenn

$$2\omega = 2 \int_{e_2}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}}, \quad e_2 = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

ihre reelle Periode ist. Denn³⁾ bedeutet α eine dritte Einheitswurzel, so ist einerseits nach der Homogenitätseigenschaft der $\wp$ -Funktion

$$(16a) \quad \begin{aligned} \wp(\alpha u; 0, g_2) &= \alpha \wp(u; 0, g_2), \\ \wp \frac{2\alpha\omega}{3} &= \alpha \wp \frac{2\omega}{3}. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\wp \frac{4\alpha\omega}{3} = \wp \left(-\frac{2\omega}{3} + \frac{2i\omega}{\sqrt{3}} \right),$$

also, da im Falle $g_2 = 0$, $g_3 < 0$

$$(17) \quad 2\omega' = \frac{2i\omega}{\sqrt{3}}$$

eine Periode der $\wp$ -Funktion ist⁴⁾,

$$(16b) \quad \wp \frac{4\alpha\omega}{3} = \wp \frac{4\omega}{3}.$$

Die Tatsachen (16a) und (16b) sind miteinander nur verträglich, wenn

$$(18) \quad \wp \frac{2\omega}{3} = \wp \frac{2\alpha\omega}{3} = \wp \frac{4\alpha\omega}{3} = 0$$

ist.

Dem Grundgebiet von 0 bis 1 in der Veränderlichen x entspricht der Wertbereich

$$(19) \quad \omega \leq u \leq \frac{4\omega}{3}.$$

Die Orthogonalitätseigenschaft (10) hat die Gestalt

$$(20) \quad \int_{\omega}^{\frac{4\omega}{3}} \varphi_m(u) \varphi_n(u) du = 0, \quad m \neq n.$$

Wird in (9) auch das zweite Argument ξ durch ein anderes ersetzt mit dem Ansatz

$$(13a) \quad \xi = \wp' v,$$

wird ferner das Ergebnis der Einführung von u, v statt x, ξ in $G(x, \xi)$ mit $\Gamma(u, v)$ bezeichnet und schließlich

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{2} \Gamma(u, v) = K(u, v).$$

³⁾ H. Weber, Lehrbuch der Algebra, 3, Braunschweig 1908, S. 571.

⁴⁾ G.-H. Halphen, Traité des fonctions elliptiques, 1, Paris 1886, S. 84.

gesetzt, so lautet die Integralgleichung

$$(21) \quad \varphi_n(v) = \lambda_n \int_{\omega}^{\frac{4\omega}{3}} K(u, v) \varphi_n(u) du.$$

§ 2.

Berechnung der Kerne.

Für den Kern im Falle (a) erhält man, da (vgl. (8a))

$$(22) \quad \int_0^x \frac{dt}{\sqrt[3]{1-t^3}} = -\frac{6}{\sqrt[3]{4}} \int_{\omega}^u \wp w dw = \frac{6}{\sqrt[3]{4}} (\zeta u - \eta),$$

$$u < v, \quad K(u, v) = 9(\zeta u - \eta),$$

$$u > v, \quad K(u, v) = 9(\zeta v - \eta),$$

wenn wie üblich $\frac{\sigma' u}{\sigma u} = \zeta u$, $\eta = \zeta \omega$ gesetzt ist.

Setzt man in (8b)

$$t = \wp' \lambda, \quad \frac{dt}{(1-t^2)^\alpha} = -\frac{6}{\sqrt[3]{4}} \wp \lambda d\lambda, \quad (1-t^2)^{\alpha-1} dt = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2} d\lambda,$$

so ergibt sich

$$(23) \quad \frac{1}{18c_0^2} \Gamma(u, v) = - \int_{\omega}^u \wp \lambda d\lambda \int_{\omega}^{\frac{4\omega}{3}} d\mu + \int_{\omega}^v \wp \lambda d\lambda \int_{\frac{4\omega}{3}}^{\frac{4\omega}{3}} d\lambda - \int_{\frac{4\omega}{3}}^u d\lambda \int_{\omega}^{\frac{4\omega}{3}} \wp \mu d\mu$$

$$+ 3c_0^2 \sqrt[3]{4} \int_{\omega}^{\frac{4\omega}{3}} d\lambda \int_{\omega}^{\frac{4\omega}{3}} \wp \mu d\mu \int_{\omega}^{\frac{4\omega}{3}} d\nu.$$

Die vier Summanden auf der rechten Seite von (23) haben folgende Werte. Erstens ist

$$(24_1) \quad - \int_{\omega}^u \wp \lambda d\lambda + \omega \int_{\omega}^u \wp \lambda d\lambda = \lambda \zeta \lambda \Big|_{\omega}^u - \int_{\omega}^u \zeta \lambda d\lambda - \omega (\zeta u - \eta)$$

$$= (u - \omega) \zeta u - \lg \frac{\sigma u}{\sigma \omega},$$

zweitens

$$(24_2) \quad \int_{\omega}^v \wp \lambda d\lambda \int_{\frac{4\omega}{3}}^{\frac{4\omega}{3}} d\lambda = -(\zeta v - \eta) \left(\frac{4\omega}{3} - v \right),$$

drittens

$$(24_3) \quad \int_{\frac{4\omega}{3}}^u (\zeta \lambda - \eta) d\lambda = \lg \frac{\sigma \frac{4\omega}{3}}{\sigma v} - \eta \left(\frac{4\omega}{3} - v \right),$$

viertens

$$\begin{aligned}
 (24_4) \quad & \int_{\omega}^{\frac{4\omega}{3}} d\lambda \int_{\omega}^{\lambda} -(\mu - \omega) \wp \mu d\mu = \int_{\omega}^{\frac{4\omega}{3}} d\lambda \left[\mu \zeta \mu \Big|_{\omega}^{\lambda} - \int_{\omega}^{\lambda} \zeta \mu d\mu - \omega (\zeta \lambda - \eta) \right] \\
 & = \int_{\omega}^{\frac{4\omega}{3}} \left[\lambda \zeta \lambda - \lg \frac{\sigma \lambda}{\sigma \omega} - \omega \zeta \lambda \right] d\lambda = \lambda \lg \sigma \lambda \Big|_{\omega}^{\frac{4\omega}{3}} - 2 \int_{\omega}^{\frac{4\omega}{3}} \lg \sigma \lambda d\lambda \\
 & = \frac{\omega}{3} \lg \sigma \omega \sigma \frac{4\omega}{3} - 2 \int_{\omega}^{\frac{4\omega}{3}} \lg \sigma \lambda d\lambda.
 \end{aligned}$$

Nun liefert die „Taschenausgabe“

$$\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma u^2 \sigma v^2} = \wp v - \wp u$$

für $u = \omega$, $v = \frac{4\omega}{3}$, bzw. für $u = \frac{2\omega}{3}$, $v = \frac{\omega}{3}$, weil $\wp \frac{2\omega}{3}$ und $\wp \frac{4\omega}{3}$ verschwinden, die beiden Formeln

$$(25) \quad \frac{\sigma\left(2\omega + \frac{\omega}{3}\right) \sigma \frac{\omega}{3}}{\sigma \omega^2 \sigma \frac{4\omega}{3}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \quad \frac{\sigma \omega}{\sigma \frac{\omega}{3} \sigma \left(2\omega - \frac{4\omega}{3}\right)^2} = \wp \frac{\omega}{3};$$

benutzt man die Formeln

$$\sigma(2\omega + u) = -e^{2\eta(u+\omega)} \sigma u, \quad \sigma(2\omega - u) = e^{-2\eta(u-\omega)} \sigma u$$

für $u = \frac{\omega}{3}$ bzw. $u = \frac{4\omega}{3}$, ferner die Tatsache, daß

$$\wp \frac{\omega}{3} = \wp \left(\omega - \frac{2\omega}{3} \right) = \wp \left(\frac{2\omega}{3} + \omega \right) = e_2 + \frac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}{\wp \frac{2\omega}{3} - e_2} = \sqrt[3]{2}$$

ist, so können die Gleichungen (25) geschrieben werden

$$\frac{e^{\frac{8\eta\omega}{3}} \sigma \frac{\omega}{3}}{\sigma \omega^2 \sigma \frac{4\omega}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \quad \frac{e^{\frac{4\eta\omega}{3}} \sigma \omega}{\sigma \frac{\omega}{3} \sigma \frac{4\omega}{3}} = \sqrt[3]{2}.$$

Aus ihnen ergibt sich

$$(26) \quad \lg \sigma \frac{4\omega}{3} = \frac{8\eta\omega}{9}.$$

Ferner ist

$$\sqrt[4]{e_2 - e_3} \sqrt[4]{e_2 - e_1} = \frac{e^{\frac{1}{4}\eta\omega}}{\sigma \omega},$$

$$(27) \quad \lg \sigma \omega = \frac{1}{2} \eta \omega - \frac{1}{4} \lg \frac{3}{2\sqrt[3]{2}},$$

also wird (24₄)

$$\int_{\omega}^{\frac{4\omega}{3}} d\lambda \int_{\omega}^{\lambda} (\mu - \omega) \wp \mu d\mu = \frac{\omega}{3} \left(\frac{25}{18} \eta \omega - \frac{1}{4} \lg 3 + \frac{1}{3} \lg 2 \right) - 2 \int_{\omega}^{\frac{4\omega}{3}} \lg \sigma \lambda d\lambda.$$

Nun ist

$$(28) \quad \eta \omega = \frac{\pi \sqrt{3}}{2} {}^5);$$

denn setzt man in der für $g_3 = 0$ geltenden Formel

$$i\sqrt{3} \zeta(iu\sqrt{3}) = 3\zeta u + \frac{\wp' u}{\wp u}$$

$u = \omega'$, so erhält man mit Berücksichtigung von (17)

$$\eta_3 = i\sqrt{3} \eta'_2,$$

so daß die Legendresche Relation

$$\eta \omega' - \eta' \omega = i\pi$$

— so lautet sie für negative Diskriminante — die Beziehung (28) ergibt. Die Benutzung der Formeln (24) bis (28) liefert, da

$$(29) \quad \frac{1}{c_0^3} = 2 \int_0^1 (1-t^2)^{a-1} dt = 3 \sqrt[3]{4} \int_{\omega}^{\frac{4\omega}{3}} d\lambda = \sqrt[3]{4} \omega$$

ist, für den Kern (23)

$$(30) \quad \begin{aligned} u < v, \quad K(u, v) &= \frac{27}{\omega} (u \zeta u + v \zeta v - \lg \sigma u \sigma v) - 27 \zeta u - 36 \zeta v \\ &\quad + \frac{162}{\omega^2} \int_{\omega}^{\frac{4\omega}{3}} \lg \sigma w dw, \\ u > v, \quad K(u, v) &= \frac{27}{\omega} (u \zeta u + v \zeta v - \lg \sigma u \sigma v) - 27 \zeta v - 36 \zeta u \\ &\quad + \frac{162}{\omega^2} \int_{\omega}^{\frac{4\omega}{3}} \lg \sigma w dw. \end{aligned}$$

⁵⁾ Vgl. die entsprechende Entwicklung für $g_3 > 0$ bei Halphen a. a. O. S. 82 ff., S. 281 ff.; desgl. bei A. G. Greenhill, The applications of elliptic functions, London 1892, S. 315 f.

§ 3.

Darstellung der Eigenfunktionen.

Nachdem wir in den Formeln (22) und (30) für $\alpha = \frac{1}{2}$ die zu den Aufgaben (1), (2a) und (1), (2b) gehörigen Kerne hergestellt haben, entwickeln wir mit Hilfe der elliptischen Funktionen eine zweite Form der Eigenfunktionen, die mit $T_n(x)$ bezeichnet seien, wenn der Koeffizient der höchsten Potenz von x die Einheit ist.

Dazu erinnern wir an den einfacheren Fall

$$\alpha = \frac{1}{2};$$

bei diesem geht die Jacobische Differentialgleichung

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0$$

durch die Substitution

$$x = \cos \varphi, \quad \frac{\pi}{2} \geq \varphi \geq 0$$

in die Form über

$$\frac{d^2\psi}{d\varphi^2} + n^2\psi = 0,$$

wenn $y(x)$ als Funktion von φ mit $\psi(\varphi)$ bezeichnet wird. Damit der Wert der Ableitung

$$y'(1) = \frac{d\psi}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx} \Big|_{\varphi=0} = -\frac{1}{\sin \varphi} \frac{d\psi}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0}$$

endlich ausfalle, ist als partikuläres Integral der letzten Differentialgleichung die Größe

$$\psi(\varphi) = \cos n\varphi$$

zu wählen. Man hat aber für ψ noch eine zweite Darstellung, das Jacobische Polynom für $y(x)$; da die Entwicklung von $\cos n\varphi$ nach fallenden Potenzen von $\cos \varphi$ mit dem Gliede $2^{n-1} \cos \varphi^n$ beginnt, ist, wie bekannt,

$$\begin{aligned} (31) \quad & \frac{(-1)^n}{n(n+1) \dots (2n-1)} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}] \\ & = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x). \end{aligned}$$

Die Eigenfunktionen, ursprünglich besondere Jacobische Polynome $T_n(x, \frac{1}{2})$, haben noch einen zweiten einfachen Ausdruck: sie sind für $x = \cos \varphi$ bis auf einen konstanten Faktor die Kosinus der Vielfachen von φ .

Die Größen $T_n(x, \frac{1}{3})$ sind zunächst als Polynome der Funktion $x = \wp' u$ erschienen und daher für gerades n als Polynome von $\wp u$, für ungerades n als Polynome von $\wp u$ multipliziert mit $\wp' u$ darstellbar. Wie die Potenzen der trigonometrischen Funktionen durch die Funktionen der Vielfachen des Arguments, lassen sich auch die Potenzen der elliptischen Funktion $\wp u$ linear durch Grundelemente ausdrücken; diese sind nicht die Funktionen der Vielfachen des Arguments, sondern die Ableitungen $\wp^{(n)}(u)$ der Funktion $\wp u$, die freilich nicht zueinander orthogonal sind.

Eisenstein hat die Gesetzmäßigkeit der Koeffizienten in der Entwicklung der Potenzen einer elliptischen Funktion nach Grundelementen in den Fällen eines biquadratischen Radikanden des elliptischen Differentials angegeben, besonders im lemniskatischen Falle^{*)}. Wir haben jetzt die den Eisensteinschen Formeln entsprechenden für die äquianharmonische $\wp$ -Funktion herzuleiten.

Im folgenden setzen wir zunächst eine $\wp$ -Funktion mit beliebigen Invarianten voraus, die an der Stelle u_0 verschwinde. Sind ihre zweite Invariante g_2 und ihre Diskriminante $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ negativ — wie es bei der besonderen $\wp$ -Funktion (13) der Fall ist —, so gibt es einen reellen Wert u_0 , denn $\wp u$ nimmt dann für reelle Werte von u alle reellen Werte zwischen $+\infty$ und der negativen Größe e_2 an.

In der Formel

$$(32) \quad \zeta(u+v) + \zeta(u-v) - 2\zeta u = \frac{\wp' u}{\wp u - \wp v}$$

entwickeln wir die beiden ersten Summanden links nach dem Taylorschen Lehrsatz:

$$\begin{aligned} \zeta(u+v) &= \zeta u + v\zeta' u + \frac{v^2}{2!}\zeta'' u + \frac{v^3}{3!}\zeta''' u + \frac{v^4}{4!}\zeta^{IV} u + \dots, \\ \zeta(u-v) &= \zeta u - v\zeta' u + \frac{v^2}{2!}\zeta'' u - \frac{v^3}{3!}\zeta''' u + \frac{v^4}{4!}\zeta^{IV} u - \dots, \end{aligned}$$

und erhalten durch Addition, da $\zeta^{(n)} u = -\wp^{(n-1)} u$,

$$\begin{aligned} (33) \quad \zeta(u+v) + \zeta(u-v) - 2\zeta u \\ = -2 \left(\frac{v^2}{2!} \wp' u + \frac{v^4}{4!} \wp''' u + \frac{v^6}{6!} \wp^{IV} u + \dots \right). \end{aligned}$$

Ersetzt man die linke Seite von (32) durch die rechte von (33) und integriert dann (32) nach u von u_0 an bis zum Werte u , so findet man

$$\begin{aligned} (34) \quad \lg(\wp u - \wp v) - \lg(-\wp v) &= \lg\left(1 - \frac{\wp u}{\wp v}\right) \\ &= -2 \left[\frac{v^2}{2!} \wp u + \frac{v^4}{4!} (\wp'' u - p_2) + \frac{v^6}{6!} (\wp^{IV} u - p_4) + \dots \right], \end{aligned}$$

^{*)} Mathematische Abhandlungen, Berlin 1847, S. 146.

wobei

$$(35) \quad p_{2n} = \wp^{(2n)} u_0$$

gesetzt ist. Man kommt zu dem gewünschten Ergebnisse, indem man in (34) links den Logarithmus, rechts die geraden Potenzen von v jede nach fallenden Potenzen von $\wp v$ entwickelt und dann die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von $\wp v$ beiderseits gleichsetzt.

Es ist

$$(36) \quad v = \int \frac{ds}{\wp v \sqrt{4s^2 - g_2 s - g_3}} = \int_0^{\frac{1}{\wp v}} \frac{1}{2\sqrt{t}} \left(1 - \frac{g_2 t^2 + g_3 t^3}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} dt \\ = \int_0^{\frac{1}{\wp v}} \frac{1}{2\sqrt{t}} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{g_2 t^2 + g_3 t^3}{4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{g_2 t^2 + g_3 t^3}{4}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{g_2 t^2 + g_3 t^3}{4}\right)^3 + \dots\right] dt, \\ v = \frac{1}{\sqrt{\wp v}} + * + \varrho_2 \frac{1}{\sqrt{\wp v^5}} + \varrho_3 \frac{1}{\sqrt{\wp v^7}} + \dots,$$

wobei der Stern die Lücke in der Entwicklung andeuten soll; die ϱ sind Polynome der Invarianten. Es folgt

$$(37) \quad v^{2n} = \frac{1}{\wp v^n} + * + \frac{R_{n+2}^{(n)}}{\wp v^{n+2}} + \frac{R_{n+3}^{(n)}}{\wp v^{n+3}} + \dots, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Nach dem Taylorsche Lehrsatz ist

$$(38) \quad R_{n+k}^{(n)} = \frac{1}{(n+k)!} \left. \frac{d^{n+k}(v^{2n})}{\left(d \frac{1}{\wp v}\right)^{n+k}} \right|_{v=0};$$

für alle n gilt

$$R_n^{(n)} = 1, \quad R_{n+1}^{(n)} = 0.$$

Die Einsetzung von (37) in (34) und die Entwicklung des Logarithmus (34) ergibt

$$2 \sum_n \frac{1}{(2n)!} (\wp^{(2n-2)} u - p_{2n-2}) \sum_k \frac{R_{n+k}^{(n)}}{\wp v^{n+k}} = \sum_k \frac{\wp u^k}{k \wp v^k},$$

ferner die Umordnung der linksstehenden Summe

$$2 \sum_k \frac{1}{\wp v^k} \sum_n \frac{1}{(2n)!} R_k^{(n)} (\wp^{(2n-2)} u - p_{2n-2}) = \sum_k \frac{\wp u^k}{k \wp v^k};$$

jetzt liefert die oben gekennzeichnete Koeffizientenvergleichung

$$(39) \quad \wp u^k = \frac{2}{(k-1)!} \sum_n \frac{1}{(2n)!} \left. \frac{d^k(u^{2n})}{\left(d \frac{1}{\wp u}\right)^k} \right|_{u=0} (\wp^{(2n-2)} u - p_{2n-2}).$$

Die Herleitung dieser Formel, die ich an anderem Orte nicht gefunden habe⁷⁾, ist der Entwicklung von Jacobi⁸⁾ für die k -te Potenz der Funktion $\sin u$ nachgebildet.

In unserm äquianharmonischen Falle (13) tritt folgende Vereinfachung ein. Es sei bis zu einem bestimmten n bewiesen, daß

$$(40a) \quad \wp^{(6n)} = a_1 \wp^{3n+1} + a_2 \wp^{3n-2} + \dots + a_{n+1} \wp$$

ist mit lauter positiven, von Null verschiedenen Koeffizienten a_m ; der Kürze halber ist das Argument u von $\wp u$ nicht mitgeschrieben. Der Ansatz (40a) ist für kleine n richtig, denn aus

$$\wp'^2 = 4\wp^3 + 1$$

folgt man durch fortgesetzte Differentiation

$$\wp'' = 6\wp^2, \quad \wp''' = 12\wp\wp',$$

$$\wp^{IV} = 12(10\wp^3 + 1), \quad \wp^V = 360\wp^2\wp', \quad \wp^VI = 720(7\wp^4 + \wp),$$

$$\wp^{VII} = 720\wp'(28\wp^3 + 1), \quad \wp^{VIII} = 12960(28\wp^5 + 5\wp^2),$$

$$\wp^{IX} = 129600\wp'(14\wp^4 + \wp), \quad \wp^{X} = 129600(308\wp^6 + 66\wp^3 + 1),$$

$$\wp^{XI} = 8553600\wp'(28\wp^5 + 3\wp^2), \quad \wp^{XII} = 17107200(364\wp^7 + 91\wp^4 + 3\wp),$$

.....

Ist $s = \wp u$ und ψ eine beliebige Funktion von s , so ist

$$(41) \quad \frac{d^2 \psi}{du^2} = (4s^3 + 1) \frac{d^2 \psi}{ds^2} + 6s^2 \frac{d\psi}{ds}.$$

Mit Hilfe dieser Formel erhält man aus (40a)

$$\wp^{(6n+2)} = (4\wp^3 + 1)$$

$$[(3n+1) \cdot 3n a_1 \wp^{3n-1} + (3n-2)(3n-3) a_2 \wp^{3n-4} + \dots + 4 \cdot 3 a_n \wp^2] \\ + 6\wp^2 [(3n+1) a_1 \wp^{3n} + (3n-2) a_2 \wp^{3n-3} + \dots + a_{n+1}],$$

$$(40b) \quad \wp^{(6n+2)} = b_1 \wp^{3n+2} + b_2 \wp^{3n-1} + \dots + b_{n+1} \wp^2,$$

wo die b_m zufolge der Annahme über die a_m in (40a) wieder lauter wesentlich positive Koeffizienten sind. Zwei weitere Anwendungen der Formel (41) ergeben

$$(40c) \quad \wp^{(6n+4)} = c_1 \wp^{3n+3} + c_2 \wp^{3n} + \dots + c_{n+1} \wp^3 + c_{n+2}, \\ \wp^{(6n+6)} = d_1 \wp^{3n+4} + d_2 \wp^{3n+1} + \dots + d_{n+2} \wp$$

mit wiederum lauter wesentlich positiven Koeffizienten c_m, d_m und erweisen die Richtigkeit des Ansatzes (40).

⁷⁾ Vgl. z. B. Halphen, a. a. O., S. 203f.

⁸⁾ Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum, Regiom. 1829, § 45.

Aus (40a) und (40b) folgt, daß im äquianharmonischen Falle (13) die Vereinfachung

$$(42) \quad \wp^{(6n)} u_0 = p_{6n} = \wp^{(6n+2)} u_0 = p_{6n+2} = 0$$

statthatt. Da im selben Falle in der Entwicklung (36) von v

$$(43) \quad \varrho_{3j+1} = \varrho_{3j+2} = 0$$

und in (37)

$$(44) \quad R_{n+3j+1}^{(n)} = R_{n+3j+2}^{(n)} = 0$$

ist, fallen in der Summe (39) alle Glieder weg, bei denen $k - n$ nicht durch 3 teilbar ist, und man erhält mit Berücksichtigung von (42)

$$(45) \quad \wp u^{3l+1} = \frac{2}{(3l)!} \sum_n \frac{1}{(6n+2)!} \frac{d^{3l+1}(u^{6n+2})}{\left(d \frac{1}{\wp u}\right)^{3l+1}} \Big|_{u=0} \wp^{(6n)} u,$$

$$(46) \quad \wp u^{3l+2} = \frac{2}{(3l+1)!} \sum_n \frac{1}{(6n+4)!} \frac{d^{3l+2}(u^{6n+4})}{\left(d \frac{1}{\wp u}\right)^{3l+2}} \Big|_{u=0} \wp^{(6n+2)} u.$$

Um den Wert der in der entsprechenden Entwicklung von $\wp u^{3l}$ wegen der nicht verschwindenden Größen p_{6n+4} auftretenden Konstanten zu bestimmen, setzt man in (41) $\psi = s^{3\mu-1}$, wo μ eine positive ganze Zahl ist, und bekommt

$$s^{3\mu} = -\frac{3\mu-2}{2(6\mu-1)} s^{3\mu-3} + \frac{1}{2(3\mu-1)(6\mu-1)} \frac{d^2(s^{3\mu-1})}{du^2}.$$

Da hiernach

$$s^3 = -\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{20} \frac{d^2(s^2)}{du^2} = -\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{120} \frac{d^4 s}{du^4}$$

ist, ergibt sich für die genannte Konstante

$$(47) \quad -\frac{2}{(3l-1)!} \sum_n \frac{1}{(6n)!} \frac{d^{3l}(u^{6n})}{\left(d \frac{1}{\wp u}\right)^{3l}} \Big|_{u=0} p_{6n-2} = (-1) \frac{1}{2^l} \frac{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3l-2)}{5 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (6l-1)},$$

und es wird

$$(48) \quad \wp u^{3l} = \frac{2}{(3l-1)!} \sum_n \frac{1}{(6n)!} \frac{d^{3l}(u^{6n})}{\left(d \frac{1}{\wp u}\right)^{3l}} \Big|_{u=0} \wp^{(6n-2)} u + (-1)^l \frac{1}{2^l} \frac{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3l-2)}{5 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (6l-1)}.$$

In den Formeln (45), (46), (48) sind die den genannten Eisenstein-Formeln entsprechenden gewonnen.

Um nach dieser Vorbereitung den zweiten Ausdruck für die Eigenfunktionen des Kernes (22) zu finden, gehen wir von der Formel H. § 3 (5a) aus, die für $\alpha = \frac{1}{3}$ gibt

$$T_{2n+1}\left(x, \frac{1}{3}\right) = 2^n \frac{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{(6n+5)(6n+11) \dots (12n-1)} x F\left(-n, n + \frac{5}{6}, \frac{1}{3}, 1-x^2\right).$$

Indem man mit (13)

$$x = \wp' u = \wp', \quad 1 - x^2 = 1 - \wp'^2 = -4\wp^3$$

die elliptischen Funktionen einführt, wird

$$T_{2n+1}(\wp') = 2^n \frac{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{(6n+5)(6n+11) \dots (12n-1)} \sum_k^{0,n} \binom{n}{k} 2^k \frac{(6n+5)(6n+11) \dots (6n+6k-1)}{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3k-2)} \wp^{3k} \wp'.$$

Hierin ersetzt man die GröÙe

$$\wp^{3k} \wp' = \frac{1}{3k+1} \frac{d(\wp^{3k+1})}{du}$$

durch ihren aus (45) durch Differentiation folgenden Wert und erhält

$$T_{2n+1}(\wp') = 2^n \frac{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{(6n+5)(6n+11) \dots (12n-1)} \sum_k^{0,n} \binom{n}{k} 2^{k+1} \frac{(6n+5)(6n+11) \dots (6n+6k-1)}{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3k-2)} \frac{1}{(3k+1)!} \cdot \sum_l^{0,k} \frac{1}{(6l+2)!} \frac{d^{3k+1}(u^{6l+2})}{\left(d \frac{1}{\wp u}\right)^{3k+1}} \Big|_{u=0} \wp^{(6l+1)} u$$

oder durch Umordnung

$$(49) \quad T_{2n+1}(\wp') = 2^n \frac{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{(6n+5)(6n+11) \dots (12n-1)} \sum_k^{0,n} \frac{\wp^{(6k+1)} u}{(6k+2)!} \cdot \sum_l^{k,n} \frac{1}{(3l+1)!} \binom{n}{l} 2^{l+1} \frac{(6n+5)(6n+11) \dots (6n+6l-1)}{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3l-2)} \frac{d^{3l+1}(u^{6k+2})}{\left(d \frac{1}{\wp u}\right)^{3l+1}} \Big|_{u=0}.$$

Schreibt man für $\wp'$ wieder x und setzt demgemäß

$$u = \arg \wp' x,$$

so erhält man auf Grund von H. § 3, (2)

$$(50) \quad \frac{-3^{2n+1}}{(6n+2)(6n+5) \dots (12n+2)} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} \left[(1-x^2)^{\frac{3n+1}{2}} \right] \\ = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} 2^n \frac{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{(6n+5)(6n+11) \dots (12n-1)} \sum_k^{0,n} \frac{1}{(6k+2)!} \frac{d^{6k} x}{(d \arg \wp' x)^{6k}} \cdot \sum_l^{k,n} \frac{1}{(3l+1)!} \binom{n}{l} \left(-\frac{1}{2}\right)^{l-1} \frac{(6n+5)(6n+11) \dots (6n+6l-1)}{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3l-2)} \frac{d^{3l+1} \left[(\arg \wp' x)^{6k+2} \right]}{\left(d \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}\right)^{3l+1}} \Big|_{x=\infty}.$$

Diese Formel entspricht der Gleichung (31) für ungerade $m = 2n + 1$.

Für gerade $m = 2n$ findet man aus H. § 3 (5b)

$$T_{2n}\left(x, \frac{1}{3}\right) = 2^n \frac{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{(6n-1)(6n+5)\dots(12n-7)} F\left(-n, n - \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, 1-x^2\right)$$

und durch Einführung der elliptischen Funktionen gemäß (13)

$$T_{2n}(\wp')$$

$$= 2^n \frac{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{(6n-1)(6n+5)\dots(12n-7)} \sum_k^{0,n} \binom{n}{k} 2^k \frac{(6n-1)(6n+5)\dots(6n+6k-7)}{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3k-2)} \wp^{3k}.$$

Die Benutzung von (48) ergibt nach Umordnung der Summe

$$(51) \quad T_{2n}(\wp') = 2^n \frac{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{(6n-1)(6n+5)\dots(12n-7)} \left\{ \sum_k^{1,n} \frac{\wp^{(6k-2)u}}{(6k)!} \cdot \sum_l^{k,n} \frac{1}{(3l-1)!} \binom{n}{l} 2^{l+1} \frac{(6n-1)(6n+5)\dots(6n+6l-7)}{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3l-2)} \frac{d^{3l}(u^{6k})}{\left(d \frac{1}{\wp u}\right)^{3l}} \right\}^{u=0}$$

$$+ \sum_k^{0,n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(6n-1)(6n+5)\dots(6n+6k-7)}{5 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (6k-1)} \left\}.$$

Nun ist

$$\sum_k^{0,n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(6n-1)(6n+5)\dots(6n+6k-7)}{5 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (6k-1)} = F\left(-n, n - \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, x\right) \Big|^{x=1}$$

Die Funktion $F\left(-n, n - \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, x\right)$ genügt der hypergeometrischen Differentialgleichung

$$x(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{5}{6}(1-x) \frac{dy}{dx} + n\left(n - \frac{1}{6}\right)y = 0,$$

die bei Einführung der neuen Veränderlichen $1-x=z$ die Form erhält

$$z(1-z) \frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{5}{6}z \frac{dy}{dz} + n\left(n - \frac{1}{6}\right)y = 0:$$

das ganze rationale Integral dieser Differentialgleichung⁹⁾

$$y = zF\left(-n+1, n+\frac{5}{6}, 2, z\right) = (1-x)F\left(-n+1, n+\frac{5}{6}, 2, 1-x\right)$$

kann sich von $F\left(-n, n - \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, x\right)$ nur um einen konstanten Faktor unterscheiden, daher ist der Wert dieser hypergeometrischen Reihe an der Stelle $x=1$ gleich Null, aus der rechten Seite der Formel (51) verschwindet also die letzte Summe. Zu der Formel (50) tritt noch die folgende

⁹⁾ H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, 2, Braunschweig 1912, S. 23.

$$\begin{aligned}
 (52) \quad & \frac{3^{2n}}{(6n-1)(6n+2)\dots(12n-4)} (1-x^2)^{\frac{2}{3}} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \left[(1-x^2)^{2n-\frac{2}{3}} \right] \\
 &= 2^n \frac{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{(6n-1)(6n+5)\dots(12n-7)} \sum_k^{1,n} \frac{1}{(6k)!} \frac{d^{6k-3} x}{(d \arg \varphi' x)^{6k-3}} \\
 & \sum_l^{k,n} \frac{1}{(3l-1)!} \binom{n}{l} (-1)^l \left(\frac{1}{2}\right)^{l-1} \frac{(6n-1)(6n+5)\dots(6n+6l-7)}{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3l-2)} \frac{d^{3l} [(\arg \varphi' x)^{6k}]}{\left(d \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^{3l}} \Big|^{x=\infty}.
 \end{aligned}$$

(Eingegangen am 5. Januar 1920.)