Phase	Datum	Gr.	E	B—R	Beobachter
Max.	1889 Mai 29	—	15	—12 ^T	Yendell A. J. IX
Min.	1890 Dec. 5	8 ^m 6	17	—31	Reed A. J. XIV
Max.	1891 Juli 17	5.4	17	—7	»
Min.	1892 Febr. 9	10.4	18	+13	» (vielleicht zu spät)
»	» Jan. 12	9.6	18	—15	Dunér A. J. XIII
Max.	1892 Aug. 1	5.2	18	—13	»
»	» Aug. 25	5.4	18	+11	Reed
Min.	1893 Febr. 20	9.7	19	+3	» (unsicher)
Max.	1895 Oct. 10?	6.5	21	—9	Hisgen
Min.	1896 März 30 [±]	10.8	22	—24	Hisgen

Louvain, Februar 1897.

Jos. Hisgen, S. J.

Ueber die Verfinsterungen der Jupiters-Trabanten.

Von V. Wellmann.

In einer früheren Abhandlung *) habe ich die Aufgabe behandelt, aus der im Verlaufe ihrer Verfinsterungen beobachteten Helligkeit der Jupiters-Trabanten den Zeitpunkt des Schatten-Eintritts ihres Centrums abzuleiten. Der damaligen Behandlung war das Lambert'sche Gesetz zu Grunde gelegt. Wenngleich, wie ein dort ausgeführtes Beispiel zeigt, die auf diesem Wege zu erreichende Genauigkeit eine recht zufriedenstellende war — der wahrscheinliche Fehler des Schatten-Eintritts aus 4 photometrischen Beobachtungen betrug 0^s.2 — so lässt es die Wichtigkeit derartiger Beobachtungen — z. B. für die Bestimmung der Sonnenparallaxe — doch wünschenswerth erscheinen, eine genauere und einwandfreiere Bearbeitung derartiger Beobachtungen anzustreben, als es das Lambert'sche Gesetz erlaubt. Dieselbe Aufgabe ist von Herrn Obrecht **) behandelt worden unter der Annahme, dass die Trabanten als gleichmässig hell leuchtende Scheiben erscheinen. Seitdem hat Herr Seeliger ein neues photometrisches Gesetz aufgestellt, welches die Helligkeit q eines Flächen-Elements df als Function des Incidenz-Winkels i und des Emanations-Winkels ε durch die Formel ausdrückt

$$q = \mu \cdot \frac{\cos \varepsilon \cos i}{\cos \varepsilon + \kappa \cos i} df.$$

Für die vorliegende Betrachtung der Jupiters-Trabanten fällt dieses Gesetz mit dem gleichmässiger Beleuchtung zusammen, da wir in diesem Falle mit ausreichender Genauigkeit $\varepsilon = i$ setzen können. —

Es liegt nun der Gedanke nahe, unter Verzicht auf ein streng gültiges photometrisches Gesetz ein Verfahren einzuschlagen, welches bei vielen physikalischen Untersuchungen

mit Vortheil angewandt ist, d. h. sich einer Reihe zu bedienen und deren Coefficienten aus den Beobachtungen zu bestimmen, also z. B. zu setzen:

$$q = a_0 + a_1 \cos i + a_2 \cos 2i + b_1 \sin i + \dots$$

Wie man aber bei der Ausführung dieses Versuches bald sieht, ist auf diesem Wege nichts zu erreichen, was seinen Grund offenbar darin hat, dass das wahre photometrische Gesetz dem Lambert'schen Gesetz, sowie dem der gleichförmigen Helligkeit zwar nicht genau entspricht, ihnen aber doch immerhin ziemlich nahe kommt, und mithin durch eine Gleichung von ähnlicher Form ausgedrückt werden muss.

Wir wählen deshalb als Ausdruck für die Helligkeit eines zum Theil verfinsterten Trabanten eine Combination aus den beiden erwähnten Gesetzen, indem wir den beiden Ausdrücken verschiedene Coefficienten beilegen und diese aus Beobachtungen bestimmen.

Bezeichnet t_0 den Moment, in dem das Trabant-Centrum den Kernschatten passirt, q seinen scheinbaren Halbmesser, t_n die Beobachtungszeit, so ist

$$\cos \alpha_n = \frac{c}{q} (t_n - t_0)$$

wo c — von der Länge Jupiters abhängig — für jede Verfinsterung als Constante gelten kann, und $2\alpha_n$ den Winkel bezeichnet, den die vom Schnittpunkte des Schattens mit der Trabanten-Scheibe gezogenen Radien am Mittelpunkt derselben mit einander bilden.

Dann ist die Lichtmenge, welche das verdunkelte Stück der Trabant-Fläche aussandte, nach dem Lambert'schen Gesetz:

$$L = \frac{\pi q^2}{6} \left(\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha + \frac{8 - 3\pi}{2\pi} \cdot \frac{q}{a} \sin^4 \alpha + 2 \right)$$

und nach dem Gesetze gleichmässiger Helligkeit:

$$G = \frac{\pi q^2}{2} \left(2\alpha - \sin 2\alpha + \frac{2q}{a} \sin^3 \alpha \right)$$

*) Zur Photometrie der Jupiters-Trabanten. Berlin 1887.

**) Obrecht, Étude sur les éclipses des satellites de Jupiter. Paris 1884.

wo a den Radius des Schattenkreises bezeichnet. Hierbei ist aber nur das vom Vollschatten herrührende Hauptglied angegeben, da eine Wiedergabe der auch den Halbschatten berücksichtigenden ganzen, etwas langen Formeln, welche sich in den erwähnten Abhandlungen finden, hier zu weitläufig wäre.

Allgemein werde das mit allen Correctionen versehene, durch den Vollschatten nach Lambert's Gesetz erzeugte Glied mit L bezeichnet, das durch den Halbschatten erzeugt durch L_H , die analogen Glieder nach dem Gesetze gleichmässiger Helligkeit mit G und G_H . Dann setzen wir die ursprüngliche Lichtmenge des verdunkelten Flächenstückes, oder den Lichtverlust

$$Q = a G + b L + \alpha G_H + \beta L_H$$

und das Verhältniss der restirenden Lichtmenge zu der ursprünglichen, Q_0 ,

$$\mathcal{F} = 1 - \frac{Q}{Q_0}$$

Zu dem Ausdrucke für Q müssen wir aber noch ein Glied hinzufügen, um diejenige Lichtmenge zu berücksichtigen, welche das im Vollschatten liegende Flächenstück in Folge der Brechung des Sonnenlichtes in der Jupiter-Atmosphäre noch aussendet, wie wir es analog bei Verfinsterungen des Erdmondes beobachten. Diese Fläche beträgt:

$$Q^2 \pi - \frac{1}{2} Q^2 (2\alpha - \sin 2\alpha)$$

Das Glied $(2\alpha - \sin 2\alpha)$ können wir mit dem ersten Gliede G zusammenfassen und erhalten somit ein constantes Zusatzglied $\gamma Q^2 \pi$, und den Gesamt-Lichtverlust:

$$Q = a G + b L + \alpha G_H + \beta L_H - \gamma Q^2 \pi$$

$$Q = a(G + G_H) + b(L + L_H)$$

$$a = p_G = \frac{1}{\Delta_G} \quad b = p_L = \frac{1}{\Delta_L} \quad \text{oder} \quad b = \frac{\nu}{2} \quad a = \frac{\nu}{2} \cdot \frac{\Delta_L}{\Delta_G}$$

wo ν so gewählt ist, dass

$$a(G + G_H) + b(L + L_H) = \frac{1}{2}(G + G_H) + \frac{1}{2}(L + L_H)$$

$$\text{also} \quad \nu = \frac{1}{2} \frac{G + G_H + L + L_H}{a(G + G_H) + b(L + L_H)} \quad \text{ist.}$$

Die von Herrn Obrecht und von mir berechnete Beobachtung der Verfinsterung des ersten Trabanten vom 13. November 1883 ergab:

t_0 (Stzt. Paris)		Δt_G	Δt_L	Mittlerer Fehler: $\Delta t_G = 2^s.4$ $\Delta t_L = 0^s.5$
nach Obrecht	nach Lambert			
6 ^h 22 ^m 20 ^s .3	6 ^h 22 ^m 40 ^s .6	+2 ^s .1	+0 ^s .1	
24.0	41.2	-1.6	-0.5	
24.9	41.1	-2.5	-0.4	
20.3	40.0	+2.1	+0.7	
Mittel 6 ^h 22 ^m 22 ^s .4	6 ^h 22 ^m 40 ^s .7	$E_G = 2^s.4$	$E_L = 0^s.5$	$p_G = 0.5 \nu$ $p_L = 2.4 \nu$

Danach haben wir also:

$$Q = (0.5 G + 2.4 L + 0.5 G_H + 2.4 L_H) \cdot \nu$$

Die G und L für das Argument α sind in den erwähnten Tafeln gegeben. Wir berechnen nun die Tafel

$$Q = 0.5 G + 2.4 L + 0.5 G_H + 2.4 L_H$$

Dieses constante Glied wird allerdings klein sein, ist aber doch von Wichtigkeit. Wollten wir uns nämlich auf die 4 ersten Glieder beschränken, so wären dieselben an die Bedingung gebunden, dass für $\alpha = 180^\circ$ ihre Summe gleich der Lichtmenge des unverdunkelten Mondes sei, und wir könnten also nur über 3 derselben frei verfügen; durch die Addition des letzten Gliedes aber haben wir 5 von einander unabhängige Constanten zur Verfügung. Eine fernere Constante würde sich beim Lambert'schen Gesetz aus der Phasengleichung ergeben; nach derselben ist die von dem ganzen Trabanten ausgestrahlte Lichtmenge:

$$Q_0 = \frac{2}{3} \pi Q^2 (\sin \nu - \nu \cos \nu)$$

wo $(\pi - \nu)$ den Winkel Sonne-Jupiter-Erde bezeichnet; doch ist der Einfluss der Phase so unbedeutend, dass die Correction durch einen besonderen Coefficienten vorläufig wird vernachlässigt werden können.

Ich komme nunmehr zur Bestimmung der Constanten, die ich aus Mangel an genügendem Beobachtungs-Material hier nur kurz angeben will.

Zunächst berechnen wir aus den beobachteten Licht-Intensitäten unter der Annahme gleicher Helligkeiten und unter Annahme des Lambert'schen Gesetzes mit Hülfe der vorhandenen Tafeln (a. a. O.) α und t und bilden die mittleren Fehler Δt_G und Δt_L . Danach bilden wir die Gleichung:

$$Q = \frac{1}{2}(G + G_H) + \frac{1}{2}(L + L_H)$$

und multipliciren die beiden Glieder rechts mit den Gewichten p_G und p_L , welche wir umgekehrt proportional Δ_G und Δ_H setzen, also

für das Argument α und finden aus dieser Tafel zu den beobachteten Q die zugehörigen α und damit t_0 . Mit dieser Tafel reduciren wir eine zweite Verfinsterung. Seien die beobachteten Lichtverluste $Q_1 Q_2 \dots Q_n$, die zugehörigen Werthe $\cos \alpha_1 \dots \cos \alpha_n$ und $t_{10} \dots t_{n0}$ und deren Mittel t_0^M , so bilden wir

$$\cos \alpha_1 = \frac{c}{\varrho} (t_1 - t_0^M) \quad \cos \alpha_2 = \frac{c}{\varrho} (t_2 - t_0^M) \quad \dots \quad \cos \alpha_n = \frac{c}{\varrho} (t_n - t_0^M)$$

und bestimmen mit diesen Werthen von α die zugehörigen $Q_1', Q_2' \dots Q_n'$.

Die Differenz dieser berechneten Q' und der beobachteten Q ergibt, indem wir dieselbe den Halbschatten-Gliedern zufügen:

$$\begin{aligned} Q - Q' &= \Delta Q_1 = x L_H + y G_H + A_1 \\ \Delta Q_2 &= x L_H + y G_H + A_2 \\ &\dots \dots \dots \\ \Delta Q_n &= x L_H + y G_H + A_n \end{aligned}$$

wo $A_n = 0.5 G_H + 2.4 L_H$ ist.

Bildet man hiernach die Normal-Gleichungen, so erhält man x und y und also als zweite Näherung:

$$Q = 0.5 G + 2.4 L + (0.5 + y) G_H + (2.4 + x) L_H$$

Es fehlt nun noch die Bestimmung des constanten Restgliedes $\gamma \varrho^2 \pi$.

Hierzu benutzen wir die Beobachtung einer dritten, zeitlich zwischen zwei der bisher benutzten Verfinsterungen gelegenen Finsterniss, für die wir den Moment des Schatten-Eintritts, t_0 , voraus berechnen. Die Unsicherheiten der Bahnelemente und Störungen vermeidet man, indem man bei der Berechnung von der beobachteten vorausgegangenen und nachfolgenden Verfinsterung ausgeht. Mit dem so berechneten t_0 bestimmen wir mittelst der beobachteten Zeiten t_n nach der Formel $\cos \alpha_n = \frac{c}{\varrho} (t_n - t_0)$ die α_n . Zu diesen $\cos \alpha_n$ entnehmen wir aus den bisher fertig gestellten Tafeln die zugehörigen Werthe von Q und finden so die Differenz zwischen den beobachteten und berechneten Lichtmengen. Diese Differenz ist unser constantes Glied $\gamma \varrho^2 \pi$. Zwar wird aus jedem α_n in Folge der Beobachtungsfehler ein etwas verschiedener Werth von γ sich ergeben, dieselben werden aber bei guten Beobachtungen nur um ein geringes von einander abweichen, und ihr Mittelwerth wird den zu stellenden Anforderungen genügen.

Das hier angegebene Verfahren zur Ermittlung der Constanten wird sich im einzelnen gewiss geschickter, und vielleicht auch einfacher, gestalten lassen, wenn man eine genügende Zahl von Beobachtungen zur Verfügung hat und während der Berechnung die ungefähren Werthe der Coefficienten übersehen kann. Auch wird man die Constanten später verbessern können, indem man verschiedene, zeitlich

Berlin 1897 Februar.

*) Ich erlaube mir hierbei die ergebenste Bitte an die Herren, welche derartige Beobachtungen angestellt haben oder noch anstellen, mir ihre Beobachtungen behufs Ermittlung der Constanten freundlichst zur Verfügung zu stellen.

Bemerkungen zu Sternen der Bonner Durchmusterung.

Die Originale der BD. ergeben bezüglich der in Wien vermissten Sterne (A. N. 3412) folgendes:

+4°35'55 9^m5 17^h49^m18^s0 +4°21'5 vermisst in Wien am 21. Mai 1892.

weit aus einander liegende Gruppen von Beobachtungen bildet, und aus diesen, unabhängig von einander, die Constanten neu berechnet. *) Die so gefundene mehr oder minder grosse Uebereinstimmung der Constanten würde zugleich ein sicheres Kriterium für die Brauchbarkeit der Methode und die damit zu erreichende Genauigkeit sein.

Sind derartig die Constanten bestimmt, so wird man den Moment des Schatten-Eintritts mit grosser Genauigkeit fixiren können, und da diese Coefficienten während aller Verfinsterungen dieselben bleiben müssen — höchstens wären in Folge atmosphärischer Schwankungen auf dem Jupiter geringe Variationen des kleinen Factors γ möglich, welche nicht in's Gewicht fallen — so ist die Zeit zwischen zwei — etwa ein halbes Jahr aus einander liegenden Verfinsterungen — genau zu bestimmen.

Berücksichtigt man, welch' grosse Anzahl derartiger Beobachtungen mit geringen Mitteln und in verhältnissmässig kurzer Zeit erhalten werden können, so scheint es gerechtfertigt, von der photometrischen Methode wichtige Resultate zu erwarten; erwähnt werden möge noch, dass einer Genauigkeit von 1^s in t_0 eine Genauigkeit der Sonnenparallaxe von etwa 0.01 entsprechen würde.

Bedient man sich zu den Beobachtungen eines Zöllner'schen Photometers, so wird es sich, um möglichst viele Beobachtungen während der kurzen Zeit einer Verfinsterung zu erhalten, empfehlen, dasselbe mit einer Registrir-Vorrichtung, wie ich sie in der »Zeitschrift für Instrumentenkunde« (1890 April) vorgeschlagen habe, zu versehen. Auch würde sich die Genauigkeit der Beobachtungen wohl durch folgende kleine Abänderung des Instruments steigern lassen.

Statt den künstlichen Stern als Punkt — oder vielmehr als kleine Kreis-Scheibe — darzustellen, gebe man demselben die Form eines schmalen leuchtenden Ringes. Dies erreicht man leicht, indem man ein entsprechendes Diaphragma vor die Lampe setzt, durch dessen Verschiebung man die Dimensionen des Ringes variiren kann. Den inneren Durchmesser des Ringes gestalte man nun so, dass derselbe von dem Bilde des Trabanten — dessen Grösse man durch Aenderung der Focussirung eventuell auch um ein geringes ändern kann — genau ausgefüllt wird. Man erhält so zwei in einander übergehende leuchtende Flächen, deren Helligkeit sich mit grösserer Genauigkeit vergleichen lässt, als diejenige zweier getrennter Punkte.

V. Wellmann.

Ueber den Ort sind nur gegangen:

Z. 462 Kr. 1854 Mai 30. Luft sehr gut.
9^m5 17^h49^m18^s3 +4°22'8

Z. 472 Kr. 1854 Juli 24. Luft vorzüglich.
9^m5 17^h49^m17^s9 +4°20'1