**4. Ueber das Decrement elektrischer
Schwingungen bei der Ladung von Condensatoren;
von A. F. Sundell und Hj. Tallqvist.**

1. Bei mehreren physikalischen Untersuchungen über gedämpfte Schwingungen sind die experimentell erhaltenen Werte der Schwingungszeit in Einklang mit der Theorie des Vorganges, während nur eine rohe oder gar keine Uebereinstimmung zwischen Theorie und Experiment in Bezug auf das Decrement der Schwingungen vorhanden ist. Die nachfolgende Untersuchung über die elektrischen Oscillationen bei der Ladung eines Condensators, welche als eine Fortsetzung einer früher veröffentlichten Untersuchung über dasselbe Thema¹⁾ zu betrachten ist, gewährt ein Beispiel, wo auch das experimentell erhaltene Decrement genau mit dem theoretisch zu ermittelnden Decremente stimmt, nachdem alle erforderlichen Correctionen angebracht sind, wie unten näher gezeigt wird. Im Gegensatz zu früheren Behauptungen²⁾ ist es deshalb auch möglich von der Decrementsbestimmung der Ladungsschwingungen Nutzen für besondere Zwecke zu ziehen, z. B. für die Messung von Selbstinductionscoefficienten und Capacitäten.

Die im Folgenden dargestellten Methoden zur Berechnung des Decrementes bei einer einzelnen Ladungscurve sind von Sundell ausgearbeitet. Das experimentelle Material wurde 1896 im physikalischen Laboratorium des eidgenössischen Polytechnikums zu Zürich von Tallqvist gesammelt, nach einer in dem oben erwähnten Aufsätze näher beschriebenen Methode. Die Bearbeitung des Materiales und die fernerer Anwendungen der neuen Methoden zur Decrementsberechnung wurden von Tallqvist gemacht. Ausführlichere Angaben als in diesem Aufsätze findet man in einigen in den „Acta der

1) Hj. Tallqvist, Wied. Ann. **60**. p. 248. 1897.

2) Vgl. U. Seiler, Wied. Ann. **61**. p. 47. 1897.

finnländischen Gesellschaft der Wissenschaften“ enthaltenen Abhandlungen.¹⁾

Methoden der Decrementsberechnung.

2. Wenn die beiden Belegungen eines Condensators von der Capacität C plötzlich durch eine Leitung verbunden werden, deren Widerstand W ist und die eine Batterie von der elektromotorischen Kraft E sowie eine Inductionsspule vom Selbstpotential L enthält, so genügt bekanntlich die während der Ladung des Condensators stattfindende veränderliche Potentialdifferenz p seiner Belegungen der Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{d^2 p}{dt^2} + \frac{W}{L} \frac{dp}{dt} + \frac{p}{LC} = \frac{E}{LC}.$$

Für die augenblickliche Stromstärke i hat man den Ausdruck

$$(2) \quad i = C \frac{dp}{dt}.$$

Die Gleichungen (1) und (2) setzen ein constantes C voraus.

Weil das Isolationsvermögen der isolirenden Schichten der Inductionsspule nie absolut vollkommen ist, und eine kleine Leitfähigkeit dieser Schichten wegen der in der Spule vorhandenen und schnell wechselnden Spannungsdifferenzen einen merkbaren Einfluss auf das Decrement der Ladungsschwingungen ausübt, um so mehr, je kleiner der Widerstand des Stromkreises ist, so muss die Gleichung (1) noch vervollständigt werden. Einen ähnlichen Einfluss kann eine Leitfähigkeit des Dielektricum des Condensators ausüben. Indem man den Stromkreis als gespalten betrachtet, erhält man statt (1) die Differentialgleichung²⁾

$$(3) \quad \frac{d^2 p}{dt^2} + \left\{ \frac{W}{L} + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right) \right\} \frac{dp}{dt} + \frac{p}{LC} = \frac{E}{LC},$$

worin R und r bez. die Widerstände des Condensators und der isolirenden Schichten der Inductionsspule bezeichnen und

1) A. F. Sundell, *Acta Soc. Scient. Fenn.* **24.** Nr. 11. 1899; Hj. Tallqvist, *Acta Soc. Scient. Fenn.* (I) **23.** Nr. 4. 1897; (III) **26.** Nr. 3. 1899.

2) Hj. Tallqvist, l. c. (I) p. 32.

sehr gross im Verhältnis zu W anzunehmen sind. Die Gleichung (3), welche für eine constante Capacität gilt, bekommt dieselbe Form wie die Gleichung (1), indem man W mit

$$W' = W + \frac{L}{C} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right)$$

ersetzt.

Es soll jetzt die Capacität C als veränderlich angesehen werden. In der Gleichung (2) kommt dann ein Glied hinzu. Die in der Zeit dt dem Condensator zugeführte totale Elektrizitätsmenge $i dt$ setzt sich aus zwei Teilen zusammen: $C dp$, welcher Teil der Veränderung der Potentialdifferenz p um dp bei constant gehaltener Capacität entspricht, und $p dC$, welcher Teil schon erforderlich ist, um die Potentialdifferenz p constant zu erhalten, während die Capacität C um dC wächst. Somit folgt

$$(4) \quad i = C \frac{dp}{dt} + p \frac{dC}{dt} = \frac{d(Cp)}{dt} = \frac{dq}{dt},$$

worin q die augenblickliche Ladung des Condensators bezeichnet.

Ausser dieser Gleichung (4) ergibt sich eine Energiegleichung. In der Zeit dt verausgabt die Batterie die Energiemenge $E i dt$, welche folgendermaassen angewandt wird:

- a) zur Erwärmung der Leitung der Betrag $W i^2 dt$;
- b) zur Vermehrung der elektrodynamischen Energie des Stromkreises der Betrag $L i di = d\{\frac{1}{2} L i^2\}$;
- c) zur Vermehrung der potentiellen Energie des Condensators. Bei constant gehaltener Capacität entspricht dem Zuwachse von p um dp die Energiemenge $q dp = C p dp$, und bei unveränderten Potentialen der Belegungen nimmt die Energie durch das Wachsen von C um dC mit $\frac{1}{2} p^2 dC$ zu, sodass der ganze Zuwachs ist

$$C p dp + \frac{1}{2} p^2 dC = d\{\frac{1}{2} C p^2\}.$$

- d) Zu den jetzt genannten Energiemengen kommt noch ein Glied hinzu, welches die mechanische Arbeit angiebt, welche bei der Vermehrung der Capacität des Condensators verrichtet wird. Hätte man z. B. einen Luftcondensator mit einer festen Platte von der Fläche F und im Abstände D einer gleich grossen beweglichen Platte, welche sich in der Zeit dt der

festen Platte um $-dD$ nähert, beim Erheben eines der gegenseitigen Anziehung der Platten gleichen Gewichtes

$$mg = \frac{Fp^2}{8\pi A^2 D^2},$$

wo A das Verhältniß der elektrostatischen und der elektromagnetischen Einheit der Elektrizität ist, so wird hierbei verrichtet die Arbeit

$$-mg dD = -\frac{Fp^2}{8\pi A^2 D^2} dD = \frac{1}{2}p^2 d\frac{F}{4\pi A^2 D} = \frac{1}{2}p^2 dC,$$

welche auch der Batterie entzogen werden muss.

In einem Condensator mit festem Dielektricum muss man sich die entsprechende Arbeit in irgend einer Weise zur Vermehrung der dielektrischen Polarisation angewandt denken.

Für die Energiegleichung bekommt man jetzt

$$(5) \quad \begin{cases} Ei = Wi^2 + Cp \frac{dp}{dt} + \frac{1}{2}p^2 \frac{dC}{dt} + \frac{1}{2}p^2 \frac{dC}{dt} + Li \frac{di}{dt} \\ \quad = Wi^2 + pi + Li \frac{di}{dt} \text{ [laut Gleichung (4)].} \end{cases}$$

Nach Division mit i folgt hieraus die Gleichung

$$(6) \quad E = Wi + p + L \frac{di}{dt},$$

welche für den Fall einer unveränderlichen Capacität sehr bekannt ist.

Durch Elimination von i zwischen (4) und (6) erhält man als Differentialgleichung des Ladungsvorganges

$$(7) \quad \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{W}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{E}{L},$$

oder auch

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{d^2 p}{dt^2} = \left\{ \frac{W}{L} + \frac{2}{C} \frac{dC}{dt} \right\} \frac{dp}{dt} \\ \quad + \left\{ \frac{1}{LC} + \frac{W}{L} \frac{1}{C} \frac{dC}{dt} + \frac{1}{C} \frac{d^2 C}{dt^2} \right\} p = \frac{E}{LC}, \end{cases}$$

welche beiden Gleichungen lineare Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten darstellen.

3. Wir behandeln einen einfachen Specialfall, indem wir annehmen, dass die Capacität sich gleichförmig mit der Zeit ändert, und somit

$$(9) \quad C = C_0 + h t$$

setzen. Die Gleichung (8) giebt dann

$$(10) \quad \frac{d^2 p}{dt^2} + \left\{ \frac{W}{L} + \frac{2h}{C} \right\} \frac{dp}{dt} + \frac{1 + Wh}{LC} p = \frac{E}{LC},$$

eine lineare Differentialgleichung, wo die Coefficienten immer noch veränderlich sind, weil C von der Zeit abhängt. Für unseren Zweck genügt es jedoch einen constanten mittleren Wert C_m für C einzuführen, da wir diese Gleichung nur auf eine sehr kurze Zeit (zwei oder drei Halbosillationen) anwenden werden. Unter solchen Verhältnissen stellt die Gleichung (10) eine regelmässig gedämpfte Schwingung dar. Das allgemeine Integral ist:

$$p = \frac{E}{1 + Wh} + e^{-\left(\frac{W}{2L} + \frac{h}{C_m}\right)t} \{A \cos \beta t + B \sin \beta t\},$$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{1 + Wh}{LC_m} - \frac{1}{4} \left(\frac{W}{L} + \frac{2h}{C_m} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{LC_m} - \left(\frac{W}{2L} \right)^2 - \left(\frac{h}{C_m} \right)^2}, \end{aligned}$$

wo T die Schwingungszeit ist. Ferner hat man das logarithmische Decrement

$$\alpha = \left(\frac{W}{L} + \frac{2h}{C_m} \right) \frac{\pi}{2\beta}.$$

In β können die Glieder

$$\left(\frac{W}{2L} \right)^2 \quad \text{und} \quad \left(\frac{h}{C_m} \right)^2,$$

die von derselben Ordnung sind, im Vergleich mit $1/LC_m$ vernachlässigt werden. Somit hat h keinen Einfluss auf die Schwingungszeit und für das Decrement ergibt sich

$$(11) \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \left(\frac{W}{L} + \frac{2h}{C_m} \right) \sqrt{LC_m} = \frac{\pi}{2} W \sqrt{\frac{C_m}{L}} + \pi h \sqrt{\frac{L}{C_m}}.$$

Durch eine gleichförmige Veränderung der Capacität wird somit das logarithmische Decrement um

$$\pi h \sqrt{\frac{L}{C_m}} = \frac{h T}{2 C_m}$$

vergrössert (oder verkleinert).

Es werde die Grösse α „augenblickliches Decrement“, die Grösse $k = e^\alpha$ „augenblickliches Dämpfungsverhältnis“ genannt.

4. Da bei langsam erfolgender Veränderung der Capacität die Schwingung für eine kurze Zeit als regelmässig gedämpft angesehen werden kann, erhält man den mittleren Wert Q der „normalen Ladung“, um welche die Ladung hin und her oscillirt, aus drei aufeinander folgenden Ladungsextremen M_{n-1} , M_n , M_{n+1} , durch die Gleichung

$$(12) \quad Q_n = \frac{M_{n-1} M_{n+1} - M_n^2}{M_{n-1} + M_{n+1} - 2 M_n} = M_{n-1} - \frac{(M_{n-1} - M_n)^2}{(M_{n-1} - M_n) + (M_{n+1} - M_n)}.$$

Der Veränderung von Q , wie sie diese Reihe zeigt, ist die Veränderung von C proportional. Somit wird eine Schätzung von h möglich mittels der Formel

$$(13) \quad h = \frac{C'' - C'}{t'' - t'} \quad \text{oder} \quad \frac{h}{C_m} = \frac{C'' - C'}{C_m(t'' - t')} = \frac{Q'' - Q'}{Q_m(t'' - t')},$$

wo C' C'' , Q' Q'' die Werte von C und Q am Anfange und am Ende des betrachteten Zeitintervalles, C_m , Q_m dagegen die mittleren Werte sind. Folglich ist auch das Decrement wegen des Einflusses von h corrigirbar.

5. Es soll hier die Decrementsberechnung in extenso für eine Curve gegeben werden, deren Daten sind:

$$C = 1,0119 \text{ Mikrof.},$$

$$L = 0,5933 \text{ Henry},$$

$$W = 3,191 \text{ Ohm.}$$

Der Condensator war ein vorzüglicher Glimmercondensator, welcher im Laboratorium als Normalinstrument benutzt wurde. Die Ladungsextreme der Curve sind in Scalenteilen angegeben:

Nr.	Minima	Diff.	Nr.	Maxima	Diff.
0	0				
		22,98	1	442,37	
2	22,98				23,15
		20,07	3	419,22	
4	43,05				14,75
		18,65	5	404,46	
6	61,70				15,71
		16,26	7	388,75	
8	77,96				14,93
		14,88	9	373,82	
10	92,84				12,75
		12,96	11	361,07	
12	105,80				12,72
		12,88	13	348,35	
14	118,68				10,47
		10,68	15	337,88	
16	129,36				9,20
		9,92	17	328,68	
18	139,28				9,68
		9,08	19	319,00	
20	148,36				

Die Differenzen zeigen, dass wenigstens das zweite Maximum einen bedeutenden zufälligen Fehler hat. Man könnte diesem Umstande abhelfen und ein ein klein wenig genaueres Resultat erzielen, indem man statt der beobachteten Ladungsextreme mittels graphischer Interpolation verbesserte Ladungsextreme benutzen würde. Am besten wendet man das graphische Ausgleichungsverfahren an auf die Unterschiede der beobachteten Minima und der Ordinaten einer angemessen gewählten Parabel sowie auf die Unterschiede der beobachteten Maxima und der Ordinaten einer zweiten Parabel, was bei einiger Uebung wenig Zeit in Anspruch nimmt. Jedoch sollen jetzt die auf die obige Curve sich beziehenden Rechnungen mit den ursprünglichen Werten ausgeführt werden. Die in den Art. 12 bis 17 enthaltenen Resultate sind dagegen sämtlich auf verbesserte Werte der Ladungsextreme gegründet.

Die folgende Tab. I enthält in der Columnne „ Q beobachtet“ die nach der Formel (12) berechneten Werte Q , in der Columnne „ Q verbessert“ die aus den Werten „ Q beobachtet“ durch graphische Ausgleichung gewonnenen Werte, welche wir zur Ermittlung von h verwenden werden.

Tabelle I.

Nr.	Q beobachtet		Q verbessert		Q beob. — Q verb.
0	—	Diff.	226,48	Diff.	—
1	227,08	—	226,98	+0,50	+ 0,10
2	[226,72]	— 0,36	227,43	0,45	— 0,71
3	[226,24]	— 0,48	227,84	0,41	— 1,60
4	[227,38]	+ 1,14	228,22	0,38	— 0,84
5	228,54	+ 1,16	228,57	0,35	— 0,03
6	229,06	+ 0,52	228,90	0,33	+ 0,16
7	229,39	+ 0,33	229,22	0,32	+ 0,17
8	229,53	+ 0,14	229,52	0,30	+ 0,01
9	229,71	+ 0,18	229,80	0,28	— 0,09
10	230,07	+ 0,36	230,06	0,26	+ 0,01
11	230,28	+ 0,21	230,30	0,24	— 0,02
12	230,17	— 0,11	230,52	0,22	— 0,35
13	230,38	+ 0,21	230,71	0,19	— 0,33
14	230,84	+ 0,46	230,88	0,17	— 0,04
15	231,02	+ 0,18	231,04	0,16	— 0,02
16	231,27	+ 0,25	231,19	0,15	+ 0,08
17	231,56	+ 0,29	231,34	0,15	+ 0,22
18	231,50	— 0,06	231,48	0,14	+ 0,02
19	231,47	— 0,03	231,60	0,12	— 0,13
20			231,71	0,11	—

Die beobachteten Q sind überhaupt mit der Zeit wachsend. Der zweite, dritte und vierte Wert sind wegen des fehlerhaften zweiten Maximums stark abweichend und wurden bei der Interpolation nicht benutzt.

6. Für die Berechnung des Dämpfungsverhältnisses sind drei Ladungsextreme unzureichend. Denn bezeichnet man die Ladungen in den Punkten E , F , G (vgl. nachstehende Figur), in welchen die Curve für die normale Ladung die Schwingungscurve schneidet, mit Q_1 , Q_2 , Q_3 , die nach (12) berechnete normale Ladung in H mit Q , so erhält man aus

den drei Ladungsextremen M_1 , M_2 , M_3 bei constanter Capacität (die Ladungen in A und $B = Q$) das Dämpfungsverhältnis

$$k' = \frac{M_1 - Q}{Q - M_2} = \frac{Q - M_2}{M_3 - Q}$$

oder

$$(14) \quad k' = \frac{M_1 - M_2}{M_3 - M_2},$$

für die Dämpfungsverhältnisse der drei successiven Halboszillationen dagegen aus den vier successiven Ladungsextremen M_1 , M_2 , M_3 , M_4 die Werte

$$k_1 = \frac{M_1 - Q_1}{Q_1 - M_2}, \quad k_2 = \frac{Q_2 - M_2}{M_3 - Q_2},$$

$$k_3 = \frac{M_3 - Q_3}{Q_3 - M_4}.$$

Wenn nun H gerade auf der Curve EFG in H' liegen würde, so erhielte man offenbar mit der Formel (14) einen im Verhältnis zur normalen Ladung in H' etwas zu kleinen Wert, da die Drehung von EF um H' in eine mit AB parallele Lage k_1 und k_2 (oder eigentlich ihre Logarithmen) um ungefähr gleich viel verkleinert. Dagegen wäre der für K aus M_2 , M_3 und M_4 berechnete Wert

$$k'' = \frac{M_3 - M_2}{M_3 - M_4},$$

auch wenn K auf der Curve EFG in K' läge, ungefähr gleich viel zu gross gegen die normale Ladung in K , da die Drehung von FG um K' parallel CD k_2 und k_3 vergrössert. Man nimmt daher an für die normale Ladung Q_2 in F das Dämpfungsverhältnis $k = \sqrt{k'k''}$, oder

$$(15) \quad k = \sqrt{\frac{M_1 - M_2}{M_3 - M_4}}.$$

Hierbei werden die Fehler in k wegen der Abweichungen HH' und KK' nicht eliminirt. Sie heben sich nur teilweise auf, wenn H und K nach derselben Seite von EFG liegen, summiren sich aber, wenn diese Punkte nach entgegengesetzten Seiten (wie H und K'') liegen.¹⁾

1) Die Formel (15) liefert einen ziemlich richtigen Wert, nur wenn k nicht viel von der Einheit abweicht. Die k werden abwechselnd zu

Statt von α oder h bedient man sich für die logarithmische Rechnung am bequemsten des Decrementes

$$\gamma = \log \text{vulg } k = \alpha \log \text{vulg } e = M\alpha = 0,43429 \alpha.$$

Um das „augenblickliche“ Decrement (γ beobachtet in der Tab. II)

$$(16) \quad \gamma_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log \frac{M_{n-1} - M_n}{M_{n+1} - M_{n+2}}$$

auf das „definitive“ Decrement zu reduciren, womit der Grenzwert von γ für $h = 0$ und C_m gleich der vollen Capacität C , d. h. die Grösse

$$(17) \quad M \frac{\pi}{2} W \sqrt{\frac{C}{L}}$$

verstanden ist, sind zwei Reductionen erforderlich, nämlich:

1. Für das Ansteigen der Capacität die Reduction

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_1 \gamma &= -M \pi h \sqrt{\frac{L}{C_m}} = -M \frac{h}{2} \frac{T}{C_m} \\ &= -M \frac{T}{2 C_m} \frac{C_{n+1} - C_n}{\frac{1}{2} T} = -M \frac{Q_{n+1} - Q_n}{\frac{1}{2} (Q_n + Q_{n+1})}, \end{aligned} \right.$$

wobei h nach der Formel (13) derjenigen Halbooscillation entnommen ist, für deren Mitte der Wert von γ gilt. Q_n und Q_{n+1} sind zwei successive Werte aus der Columnne „ Q verbessert“ in der Tab. I.

2. Auf die volle Capacität 1,0119 Mikrof. und die entsprechende normale Ladung 231,98, welche die „definitive Ladung“ des Condensators ist, die Reduction

$$(19) \quad \Delta_2 \gamma = \frac{\pi}{4} W M \sqrt{\frac{C_m}{L}} \frac{C - C_m}{C_m} = \frac{1}{2} \gamma \frac{\Delta C}{C_m} = \frac{1}{2} \gamma \frac{\Delta Q}{\frac{1}{2} (Q_n + Q_{n+1})},$$

wobei $\Delta Q = 231,98 - \frac{1}{2} (Q_n + Q_{n+1})$ ist; den Wert von γ in der Formel (19) genügt es, angenähert anzusetzen.

Die Tab. II enthält die für γ berechneten Werte und braucht wohl keiner näheren Erklärung.

gross und zu klein, aber diese Variation beträgt in unserem Falle nur etwa 3 Einheiten der letzten Decimale und wird somit gänzlich durch die Beobachtungsfehler gedeckt.

Tabelle II.

$\pm (M_n - M_{n-1})$	$\log \text{ vulg}$ $\pm (M_n - M_{n-1})$	γ beobachtet	$\Delta_1 \gamma$	$\Delta_2 \gamma$	γ reducirt
$M_1 - M_0$	2,64579	—	—	—	—
$M_1 - M_2$	2,62262	[0,02392]	-86	+22	[0,02328]
$M_3 - M_2$	[2,59795]	[0,02362]	78	20	[0,02304]
$M_3 - M_4$	[2,57538]	[0,01997]	73	18	[0,01942]
$M_5 - M_4$	2,55800	[0,02020]	66	16	[0,01970]
$M_5 - M_6$	2,58499	0,02169	63	15	0,02121
$M_7 - M_6$	2,51461	0,02126	61	13	0,02078
$M_7 - M_8$	2,49247	0,02177	57	12	0,02132
$M_9 - M_8$	2,47108	0,02189	53	10	0,02146
$M_9 - M_{10}$	2,44868	0,02129	49	9	0,02089
$M_{11} - M_{10}$	2,42851	0,02084	45	8	0,02047
$M_{11} - M_{12}$	2,40700	0,02185	41	7	0,02151
$M_{13} - M_{12}$	2,38480	0,02295	36	6	0,02265
$M_{13} - M_{14}$	2,36110	0,02198	32	5	0,02171
$M_{15} - M_{14}$	2,34084	0,02098	30	5	0,02073
$M_{15} - M_{16}$	2,31915	0,02064	28	4	0,02040
$M_{17} - M_{16}$	2,29955	0,02089	28	3	0,02064
$M_{17} - M_{18}$	2,27738	0,02247	26	3	0,02224
$M_{19} - M_{18}$	2,25460	0,02265	23	2	0,02244
$M_{19} - M_{20}$	2,23208	—	—	—	—

Die eingeklammerten Zahlen hängen von dem zweiten Maximum ab.

Die reducirten Werte von γ wechseln ziemlich stark (zwischen 0,02040 und 0,02265, wenn die vier ersten nicht berücksichtigt werden). Die Variation wird wohl durch die Beobachtungsfehler verursacht, für welche das Dämpfungsverhältnis sehr empfindlich ist.

7. Für die Berechnung des definitiven Decrementes genügt es nicht, das arithmetische Mittel sämtlicher Werte „ γ reducirt“ zu nehmen, da in diesem nur die drei ersten und die drei letzten Extreme einwirken. Bildet man aber weitere Summen bei jedesmaligem Ausschiessen eines Wertes vom Anfange, und eines Wertes vom Ende der vorhergehenden Reihe, so bekommt man ungefähr gleich genaue Multipl. des Decrementes, aus welchen ein Endresultat zu ziehen ist.¹⁾

1) In diesen Summen heben sich auch die p. 80 in der Note erwähnten Variationen der γ im allgemeinen auf.

Am bequemsten führt man die Rechnung in einer compendiösen, in der Tab. III veranschaulichten Weise aus. Die $\log \pm (M_n - M_{n-1})$ werden so aufgeschrieben: der letzte unter den ersten, der vorletzte unter den zweiten etc., und die Differenzen werden gebildet. Von zwei successiven Differenzen nimmt man das Mittel, an welches die entsprechende Summe der Reductionen $A_1 \gamma + A_2 \gamma$ anzubringen ist, nämlich an das erste Mittel die Summe sämtlicher Reductionen, an das zweite die Summe aller Reductionen mit Ausnahme der ersten und der letzten etc. Die so erhaltenen Zahlen sind identisch mit den oben erwähnten Summen der γ -Werte und enthalten das reducirte Decrement 18, 16, 14 . . . 4, 2 mal.

Tabelle III.

	$\log \pm (M_n - M_{n-1})$	Differenz	Mittel	Reduction $= \Sigma (A_1 \gamma + A_2 \gamma)$	Multipl. von γ	γ
$M_1 - M_0$	2,64579	0,41371	0,39086	— 697	$0,38389 = 18 \gamma$	0,02133
$M_{19} - M_{20}$	2,23208					
$M_1 - M_2$	2,62262	0,36802	[0,34430]	— 612	[0,33818] = 16γ	[0,02114]
$M_{19} - M_{18}$	2,25460					
$M_3 - M_2$	[2,59795]	[0,32057]	[0,29820]	— 531	[0,29289] = 14γ	[0,02092]
$M_{17} - M_{18}$	2,27738					
$M_3 - M_4$	[2,57538]	[0,27583]	[0,25734]	— 451	[0,25283] = 12γ	[0,02107]
$M_{17} - M_{16}$	2,29955					
$M_5 - M_4$	2,55800	0,23885	0,21650	— 377	$0,21273 = 10 \gamma$	0,02127
$M_{15} - M_{16}$	2,31915					
$M_5 - M_6$	2,53499	0,19415	0,17383	— 304	$0,17079 = 8 \gamma$	0,02135
$M_{15} - M_{14}$	2,34084					
$M_7 - M_6$	2,51461	0,15351	0,13059	— 229	$0,12830 = 6 \gamma$	0,02138
$M_{13} - M_{14}$	2,36110					
$M_7 - M_8$	2,49247	0,10767	0,08587	— 154	$0,08433 = 4 \gamma$	0,02108
$M_{13} - M_{12}$	2,38480					
$M_9 - M_8$	2,47108	0,06408	0,04213	— 77	$0,04136 = 2 \gamma$	0,02068
$M_{11} - M_{12}$	2,40700					
$M_9 - M_{10}$	2,44868	0,02017				
$M_{11} - M_{10}$	2,42851					

Schliesst man die eingeklammerten Zahlen aus, so bekommt man

$$48\gamma = 1,02140.$$

Man kann sagen, dass in dieser Summe ein Fehler in M_{20} einmal, in M_1 , M_9 , M_{11} und M_{19} dreimal, ein Fehler in M_{10} beinahe gar nicht, ein Fehler in den übrigen Ladungsextremen aber viermal wirkt. Begnügt man sich mit dieser Fehlerverteilung, wird als wahrscheinlichster Wert erhalten

$$\gamma = 0,02128 \pm 4,3,$$

$$k = 1,0502 \pm 1,0.$$

Von diesem Werte weichen die aus den Ladungsextremen berechneten γ teilweise stark ab (bis 137 Einheiten), wegen der Beobachtungsfehler. Der angegebene wahrscheinliche Fehler ist aus den oben angegebenen Specialwerten von γ berechnet, wobei die Multipelfactoren als zugehörige Gewichte angewandt wurden. Die Unsicherheit in den Werten von γ und k ist, wie ersichtlich, sehr klein.

8. Da die normale Ladung für jede Halboszillation durch die oben erwähnte Interpolation (Tab. I) bekannt ist, kann man k auch für jede Halboszillation aus zwei successiven Extremen berechnen. In der Tab. IV sind die so erhaltenen γ und die benutzten Werte von Q angeführt, ferner die Reductionen $\Delta_1 \gamma$ und $\Delta_2 \gamma$ (identisch mit den in der Tab. II erhaltenen Reductionen), sowie die reducirten γ . Von zwei successiven γ ist der mittlere Wert genommen („Mittel I“) und wieder der mittlere Wert von diesen Mitteln („Mittel II“). Diese letztgenannten Mittel hängen somit von vier successiven Extremen ab, wie die „ γ reducirt“ in Tab. II, und stimmen auch sehr nahe mit diesen überein.

Bildet man von den „reducirten γ “ in Tab. IV die Summen, wie oben für die reducirten γ in Tab. II beschrieben wurde, so bekommt man wieder Multipel von γ , in deren Summe die Fehler sämtlicher Extreme (mit Ausnahme des Minimums M_{10}) jeder einmal wirken. Mit Ausschlussung des Multipels 14γ , in welchem das zweite Maximum einwirkt, bekommt man

$$96\gamma = 2,04294,$$

$$\gamma = 0,02128 \pm 4,3,$$

genau wie früher, was zu erwarten war. Von den beiden Rechnungsmethoden ist die erste vorzuziehen, da man keine Amplituden zu berechnen braucht und da das Schema nach Tab. III die Rechnung ausserordentlich erleichtert und beschleunigt.

Tabelle IV.

Q	γ beob.	$A_1 \gamma$	$A_2 \gamma$	γ reducirt	Mittel I	Mittel II
226,74	0,02182	-96	+24	0,02110	—	—
227,21	0,02264	86	22	0,02200	0,02155	0,02330
227,64	[0,02869]	78	20	[0,02811]	0,02505	0,02300
228,03	[0,01435]	73	18	[0,01380]	0,02095	0,01938
228,40	0,02233	66	16	0,02183	0,01781	0,01974
228,74	0,02200	63	15	0,02152	0,02167	0,02119
229,06	0,02039	61	13	0,01991	0,02071	0,02079
229,37	0,02228	57	12	0,02183	0,02087	0,02132
229,66	0,02214	53	10	0,02171	0,02177	0,02147
229,93	0,02102	49	9	0,02062	0,02117	0,02087
230,18	0,02089	45	8	0,02052	0,02057	0,02048
230,41	0,02059	41	7	0,02025	0,02038	0,02153
230,62	0,02539	36	6	0,02509	0,02267	0,02267
230,80	0,02053	32	5	0,02026	0,02267	0,02165
230,96	0,02124	30	5	0,02099	0,02062	0,02071
231,12	0,02083	28	4	0,02059	0,02079	0,02038
231,27	0,01961	28	3	0,01936	0,01997	0,02066
231,41	0,02358	26	3	0,02335	0,02135	0,02226
231,54	0,02320	23	2	0,02299	0,02317	0,02242
231,66	0,02056	20	1	0,02037	0,02168	—

9. Um den zeitlichen Verlauf der Capacität zu ermitteln, wurden Ladungscurven ohne Inductionsspule aufgenommen. Diese Curven zeigen einerseits, dass die Capacität eines guten Glimmercondensators ihren vollen Wert erst nach etwa zwei Secunden erlangt, und andererseits, dass schon nach sehr kurzer Zeit der Unterschied der augenblicklichen Ladung von der maximalen nur wenige Zehntel Procent ist. Es ist daher sehr unwahrscheinlich, dass die normale Ladung z. B. bei

der Zeit des ersten Maximums nur 227,08 (Tab. I) sei oder mit 2,11 Proc. unter die definitive normale Ladung herabsinkt. Laut einer für die Daten $C = 1,0119$ Mikrof., $L = 0$, $W = 0,275$ Ohm ohne Spule aufgenommenen Curve würde man nach 2,5 m/sec. eine Ladung von etwa 99,44 Proc. erwarten. Es ist somit anzunehmen, dass die Capacität während der ersten Halbosscillation von einem unbekannten Anfangswerte nahe bis zu ihrer definitiven Grösse anwächst, infolge dessen das Dämpfungsverhältnis stark vergrösst werden muss. Hierdurch wird aber auch eine Versetzung der normalen Ladung von 227,08 etwas nach oben bedingt, damit die erste Amplitude gehörig vergrössert, die zweite verkleinert werde. Während der zweiten Halbosscillation sinkt die Capacität wieder herunter und das Dämpfungsverhältnis erscheint sehr erniedrigt, was auch die Verschiebung der normalen Ladung nach oben bewirkt, da die dritte Amplitude dadurch vergrössert wird. In dieser Weise steigt die Capacität während der ersten, dritten, fünften . . . Halbosscillation, und sinkt während der zweiten, vierten, sechsten . . . Halbosscillation. Die entsprechenden Variationen des Dämpfungsverhältnisses sind dadurch zu bewirken, dass man die Curve für die normale Ladung etwas höher zieht als die in der Tab. I interpolirte Curve, da die Gleichung (12) zu kleine Werte von Q liefert. Nimmt man nun vorläufig an, dass während zweier successiven Halbosscillationen das Steigen und das Sinken der Capacität gleichförmig und gleich stark sei, so ist nach der Gleichung (11) beim Steigen

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} W \sqrt{\frac{C_m}{L}} + \pi h \sqrt{\frac{L}{C_m}},$$

beim Sinken

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} W \sqrt{\frac{C_m}{L}} - \pi h \sqrt{\frac{L}{C_m}}.$$

Die an γ_1 und γ_2 anzubringenden Reductionen sind somit:

$$\Delta \gamma_1 = - M \pi h \sqrt{\frac{L}{C_m}} = - \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2},$$

$$\Delta \gamma_2 = + M \pi h \sqrt{\frac{L}{C_m}} = + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}.$$

Man berechnet nun $\pm \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)$ aus je zwei successiven Decrementen, setzt diese Zahlen graphisch aus und zieht eine Curve, aus welcher man die betreffende Reduction für jede Halbosscillation nehmen kann. Weiter hat man die beiden Reductionen $\Delta_1 \gamma$ und $\Delta_2 \gamma$ anzubringen, welche nach der neuen Curve der normalen Ladung zu berechnen sind. Aus den so erhaltenen γ zieht man den Mittelwert, wie früher bei der Tab. IV angeführt wurde. Wenn die neue Curve der normalen Ladung richtig getroffen ist, so muss das so erhaltene Decrement mit dem früher gefundenen stimmen. Bei der Versetzung der Ladungen Q nach oben ist darauf zu sehen, dass die Oscillationen der Capacität nicht zu stark werden, denn die Capacität darf nicht über ihren definitiven Wert wachsen.

Diese Rechnung ist für die betreffende Schwingungscurve ausgeführt worden, wobei jede Ladung Q der Tab. IV um ein Drittel des Unterschiedes gegen die definitive Ladung 231,98 aufwärts verschoben wurde. Nach der Reduction für die Oscillation der Capacität, die von 660 Einheiten für die erste bis zu 56 Einheiten für die letzte Halbosscillation herabsinkt, hat man noch zwei Drittel der Reductionen $\Delta_1 \gamma$ und $\Delta_2 \gamma$ der Tab. IV anzubringen. Als Resultat erhält man $\gamma = 0,02141 \pm 4,2$, was um 13 Einheiten von dem früher erhaltenen Werte abweicht. Man kann auch nicht ein besseres Uebereinstimmen erwarten, da die Gesetze für die Oscillationen der Capacität nicht bekannt sind, weshalb diese Rechnung nur als eine Näherung anzusehen ist.

10. Einen interessanten Vergleich der beiden Rechnungen mit den Beobachtungen erhält man folgenderweise. An die gefundenen Endwerte von γ werden sämtliche Reductionen rückwärts angebracht und das wahrscheinliche Decrement für jede Halbosscillation ermittelt. Mit diesen Decrementen werden dann die successiven Amplituden berechnet, wobei als erste Amplitude die erste normale Ladung benutzt wird. Aus den Amplituden gehen dann die Ladungsextreme hervor, welche mit den beobachteten Extremen zu vergleichen sind. In der Tab. V sind die zurückbleibenden Fehler angeführt, sowohl für die Rechnung ohne Annahme einer Oscillation der Capacität ($\gamma = 0,02128$), wie auch bei oscillirender Capacität ($\gamma = 0,02141$).

Tabelle V.

Fehler der Ladungsextreme. Beobachtung — Rechnung.

Ladungs- extreme	Ohne Oscillation der Capacität	Mit oscillirender Capacität	Ladungs- extreme	Ohne Oscillation der Capacität	Mit oscillirender Capacität
M_1	+0,09	−0,10	M_{11}	+0,34	+0,23
M_2	+0,26	+0,39	M_{12}	−0,62	−0,44
M_3	−3,28	−3,47	M_{13}	−0,45	−0,52
M_4	−0,05	+0,14	M_{14}	+0,17	+0,30
M_5	−0,18	−0,35	M_{15}	−0,09	−0,15
M_6	+0,26	+0,46	M_{16}	−0,08	0,00
M_7	+0,26	+0,10	M_{17}	+0,50	+0,45
M_8	−0,06	+0,14	M_{18}	−0,04	−0,01
M_9	−0,09	−0,23	M_{19}	−0,31	−0,37
M_{10}	−0,12	+0,08	M_{20}	+0,12	+0,05

Nur das zweite Maximum (M_3) weicht stark vom berechneten Werte ab. Alle übrigen Abweichungen stehen weit unter einem Scalenteile. Die Summe der Fehlerquadrate ist 1,38 in der Columnne ohne Oscillation und 1,57 in der Columnne mit Oscillation (beim Ausschiessen des zweiten Maximums).

11. Man erhält folgenderweise eine Formel, welche ermöglicht, den bei der Anwendung der Formel (15) in γ entstehenden Fehler zu schätzen.

Zuerst nimmt man an, dass die Capacität und damit die normale Ladung gleichförmig wächst. Laut der Formel (19) oben wächst dann auch das logarithmische Decrement gleichförmig mit der Capacität. Das geometrische Mittel zweier Dämpfungsverhältnisse, die gleich weit nach beiden Seiten von einer gewissen Capacität liegen, ist sehr nahe gleich dem zu dieser Capacität gehörenden Dämpfungsverhältnisse. Bezeichnet man die zu den successiven Halboscillationen gehörenden normalen Ladungen mit $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$ ¹⁾, so hat man, wenn man von der Ladung $Q_{p+\frac{1}{2}}$ nach beiden Seiten geht:

1) Um den Nenner 2 nicht überall gebrauchen zu müssen, sind die Indices von Q mit der Zahl $\frac{1}{2}$ grösser angesetzt als in Art. 4. Die Indices von k und M stimmen mit der früheren Bezeichnung überein.

$$\begin{aligned}
 k_p^2 &= \frac{M_{p-1} - Q_p}{Q_p - M_p} \frac{Q_{p+1} - M_p}{M_{p+1} - Q_{p+1}}, \\
 &= \frac{Q_{p-1} - M_{p-2}}{M_{p-1} - Q_{p-1}} \frac{M_{p+1} - Q_{p+2}}{Q_{p+2} - M_{p+2}}, \\
 &= \frac{M_{p-3} - Q_{p-2}}{Q_{p-2} - M_{p-2}} \frac{Q_{p+3} - M_{p+2}}{M_{p+3} - Q_{p+3}}, \\
 &\dots \dots \dots \\
 &= \frac{M_{p-q+1} - Q_{p-q+2}}{Q_{p-q+2} - M_{p-q+2}} \frac{Q_{p+q-1} - M_{p+q-2}}{M_{p+q-1} - Q_{p+q-1}}, \\
 &= \frac{Q_{p-q+1} - M_{p-q}}{M_{p-q+1} - Q_{p-q+1}} \frac{M_{p+q-1} - Q_{p+q}}{Q_{p+q} - M_{p+q}}.
 \end{aligned}$$

Durch Multiplication sämtlicher Werte erfolgt:

$$(20) \left\{ \begin{aligned} k_p^{2q} &= \frac{Q_{p-q+1} - M_{p-q}}{M_{p-q+1} - Q_{p-q+1}} \frac{M_{p-q+1} - Q_{p-q+2}}{Q_{p-q+2} - M_{p-q+2}} \dots \frac{M_{p-1} - Q_p}{Q_p - M_p}, \\ &\frac{Q_{p+1} - M_p}{M_{p+1} - Q_{p+1}} \dots \frac{Q_{p+q-1} - M_{p+q-2}}{M_{p+q-1} - Q_{p+q-1}} \frac{M_{p+q-1} - Q_{p+q}}{Q_{p+q} - M_{p+q}}. \end{aligned} \right.$$

Mittels logarithmischer Differentiation berechnet man hieraus bis auf kleine Grössen höherer Ordnung genau denjenigen Fehler $\Delta \alpha_p$, der in α_p entsteht, wenn man die Ladungen Q im zweiten, dritten . . . letzten Zähler zur Gleichheit mit Q im ersten, zweiten . . . vorletzten Nenner abändert, sowie Q_{p-q+1} im ersten Zähler und Q_{p+q} im letzten Nenner mit $Q_{p+1/2}$ ersetzt. Man erhält:

$$(21) \quad 2q \Delta \alpha_p = \pm \left\{ \frac{1 + k^{2q-1}}{1 + k} \frac{k}{A_{p-q}} + (q - \frac{1}{2}) \frac{A_{p-q} + A_{p+q}}{A_{p-q} A_{p+q}} \right\} g, \\
 q = 1, 2, 3 \dots,$$

wo A die Amplituden sind, g die Zunahme von Q während einer Halboszillation bedeutet, und das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $p - q$ und $p + q$ die Indices zweier Minima (beide gerade) oder die Indices zweier Maxima (beide ungerade) sind.

Wendet man jetzt die Formel (21) zur Fehlerschätzung bei der Formel (15) an, so erhält man z. B. für die drei ersten nach der Tab. V corrigirten Extreme $M_0 (=0)$, M_1 , M_2 , wobei also $p = q = 1$ ist,

$$\Delta \alpha_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{A_0} + \frac{1}{2} \frac{A_0 + A_2}{A_0 A_2} \right) g = \frac{(1+k)^2}{4 A_0} g_{12},$$

oder für $\gamma_1 + 95$ Einheiten. Für M_1, M_2, M_3 ist $p=2, q=1$ und es folgt

$$\Delta \alpha_2 = - \frac{k(1+k)^2}{4 A_0} g_{23} = - \frac{(1+k)^2}{4 A_1} g_{23},$$

sowie für $\gamma_2 - 91$ Einheiten. Setzt man laut Formel (15) $\gamma_{1/2} = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)$, so wird $\gamma_{1/2}$ fehlerhaft um nur etwa 2 Einheiten. Wenn k nicht viel von der Einheit abweicht, wird somit der Fehler sehr unbedeutend.

Bei grösserem k kann man einen Schritt weiter gehen. Man hat nämlich, falls g einigermaassen constant ist,

$$\Delta \alpha_{1/2} = \frac{1}{2}(\Delta \alpha_1 + \Delta \alpha_2) = \frac{(1-k)(1+k)^2}{8 A_0} g,$$

$$\Delta \alpha_{3/2} = \frac{1}{2}(\Delta \alpha_2 + \Delta \alpha_3) = - \frac{k(1-k)(1+k)^2}{8 A_0} g.$$

Setzt man nun $\alpha_2 = \frac{1}{2}(\alpha_{1/2} + \alpha_{3/2})$, so wird dieser Wert fehlerhaft nur um

$$\frac{1}{2}(\Delta \alpha_{1/2} + \Delta \alpha_{3/2}) = \frac{(1-k)^2(1+k)^2}{16 A_0} g.$$

Bei grossem k nimmt man daher zweckmässig die Mittel zweier successiven „ γ beobachtet“ der Tab. II, an welche dann die Reductionen $\Delta_1 \gamma$ und $\Delta_2 \gamma$ anzubringen sind, oder bedient sich vielleicht noch besser der Methode von Tab. IV.

Decrement der Ladungsschwingungen.

12. Es handelt sich jetzt darum, die aus den experimentellen Bestimmungen der Maxima und Minima von Ladungscurven nach den oben gegebenen Methoden berechneten Decremente mit der Theorie zu vergleichen. Zu diesem Zwecke sind zuerst in der folgenden Tabelle die Decremente derjenigen Curven zusammengestellt, für welche Beobachtungen der Maxima und Minima gemacht wurden. Ausser den charakteristischen Daten der Curven giebt die Tabelle sowohl die ohne eine Oscillation der Capacität, wie die mit oscillirender Capacität, einer Erhöhung der normalen Ladung um $\frac{1}{2} \Delta Q$ entsprechend, berechneten Decremente. Die Curven ordnen sich zu vier Serien zusammen, mit demselben Werte von L und C und verschiedenen Werten von W innerhalb jeder Serie. Ausserdem kommen einige einzeln stehende Curven vor, welche für einen besonderen Zweck in Art. 16 verwendet werden.

Bezeichnung der Curve	L in Henry	C in Mikrof.	W in Ohm	Definitives Decrement γ		
				Ohne osc. Cap.	Mit osc. Cap.	
Serie Ia	Nr. 1	0,5933	0,5071	3,217	0,02841 $\pm$ 4,0	0,02843 $\pm$ 3,5
	Nr. 2	0,5933	0,5071	12,563	0,03437 $\pm$ 4,3	0,03441 $\pm$ 4,3
	Nr. 3	0,5933	0,5071	24,693	0,04237 $\pm$ 1,5	0,04239 $\pm$ 1,2
Serie Ib	Nr. 1	0,5933	1,0119	3,191	0,02126 $\pm$ 1,1	0,02138 $\pm$ 1,2
	Nr. 2	0,5933	1,0119	6,356	0,02647 $\pm$ 1,2	0,02652 $\pm$ 1,8
	Nr. 3	0,5933	1,0119	12,577	0,03019 $\pm$ 1,7	0,03024 $\pm$ 1,8
	Nr. 4	0,5933	1,0119	18,679	0,03551 $\pm$ 4,8	0,03554 $\pm$ 4,9
	Nr. 5	0,5933	1,0119	24,725	0,04089 $\pm$ 4,7	0,04091 $\pm$ 4,5
Serie Ic	Nr. 1	0,5933	1,5182	3,193	0,01902 $\pm$ 4,8	0,01911 $\pm$ 4,9
	Nr. 2	0,5933	1,5182	12,556	0,02895 $\pm$ 4,3	0,02906 $\pm$ 3,1
	Nr. 3	0,5933	1,5182	24,674	0,04255 $\pm$ 0,7	0,04262 $\pm$ 1,3
Serie Id	Nr. 1	0,5933	2,0229	3,224	0,01703 $\pm$ 4,9	0,01713 $\pm$ 5,4
	Nr. 2	0,5933	2,0229	6,369	0,02194 $\pm$ 3,2	0,02197 $\pm$ 3,7
	Nr. 3	0,5933	2,0229	12,594	0,02954 $\pm$ 2,2	0,02961 $\pm$ 2,3
	Nr. 4	0,5933	2,0229	18,647	0,03719 $\pm$ 3,1	0,03721 $\pm$ 3,3
	Nr. 5	0,5933	2,0229	24,710	0,04447 $\pm$ 2,4	0,04452 $\pm$ 3,2
	Nr. 6	0,5933	2,0229	42,121	0,06615 $\pm$ 2,7	0,06617 $\pm$ 4,0
	Nr. 7	0,5933	2,0229	65,148	0,09567 $\pm$ 16,8	0,09580 $\pm$ 19,8
(A)	0,1926	2,0229	1,801	0,02384 $\pm$ 1,9	0,02389 $\pm$ 1,6	
(B)	1,1854	2,0229	6,158	0,01504 $\pm$ 5,6	0,01507 $\pm$ 5,4	
(C)	0,5933	0,2033	3,171	0,04294 $\pm$ 7,8	0,04305 $\pm$ 6,0	
(D)	0,08875	2,0229	1,250	0,04447 $\pm$ 6,5	0,04443 $\pm$ 7,0	
(E)	0,3843	2,0229	3,450	0,01941 $\pm$ 0,7	0,01942 $\pm$ 1,0	
(F)	0,8409	2,0229	5,123	0,01655 $\pm$ 0,5	0,01660 $\pm$ 0,6	

Die mit Oscillation der Capacität berechneten Werte des Decrementes sind wie ersichtlich fast ohne Ausnahme nur ganz unbedeutend grösser als die für nicht oscillirende Capacität sich ergebenden Werte. Der Unterschied rührt wohl hauptsächlich von der Berechnungsmethode der Decimente mit Oscillation her, welche ein willkürliches Element, die Versetzung der normalen Ladung, in sich schliesst, und dürften die ohne Oscillation der Capacität berechneten Werte als etwas zuverlässiger in Betracht kommen.

13. In Uebereinstimmung mit der Differentialgleichung (3) soll zwischen dem Widerstande W des Stromkreises und dem

definitiven logarithmischen Decremente der Schwingungen eine lineare Relation

$$(22) \quad \gamma = a + b W$$

bestehen, worin die Coefficienten die Werte

$$(23) \quad a = M \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right); \quad b = M \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

haben.

Setzt man die Werte von γ der obigen Tabelle für jede der vier Serien I graphisch aus, so sieht man, dass die erhaltenen Punkte überhaupt sehr gut in gerader Linie liegen. Nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet man die folgenden linearen Relationen zwischen W und γ , wobei auch die wahrscheinlichen Fehler der Coefficienten a und b in Einheiten der letzten Decimale angegeben sind.

Nicht oscillirende Capacität.

- Serie Ia: $\gamma = \{0,02628 \pm 7\} + \{0,0006505 \pm 42\} W$,
 „ Ib: $\gamma = \{0,01914 \pm 34\} + \{0,0008815 \pm 210\} W$,
 „ Ic: $\gamma = \{0,01539 \pm 19\} + \{0,0010967 \pm 117\} W$,
 „ Id: $\gamma = \{0,01350 \pm 15\} + \{0,0012588 \pm 48\} W$.

Oscillirende Capacität.

- Serie Ia: $\gamma = \{0,02630 \pm 6\} + \{0,0006500 \pm 36\} W$,
 „ Ib: $\gamma = \{0,01925 \pm 33\} + \{0,0008774 \pm 208\} W$,
 „ Ic: $\gamma = \{0,01550 \pm 17\} + \{0,0010956 \pm 107\} W$,
 „ Id: $\gamma = \{0,01354 \pm 15\} + \{0,0012595 \pm 47\} W$.

14. Die erhaltenen Coefficienten a und b sollen jetzt näher discutirt werden, wobei der Anfang mit dem Coefficienten a gemacht werden mag. Weil die Grössen R und r , d. h. der Isolationswiderstand des Condensators und der Widerstand der isolirenden Schichten der Inductionsspule bez., nicht direct gemessen worden sind, was besonders in Bezug auf die nicht genau definirbare Grösse r schwerlich ausführbar gewesen wäre, so ist eine Berechnung des theoretischen Wertes von a nicht möglich. Nichtsdestoweniger erlaubt die erste Formel (23) einige interessante Schlüsse betreffend der Grössen R und r und deren Einfluss auf die Dämpfung der Schwingungen zu ziehen. Aus dem beobachteten Werte von a lässt sich, weil

L und C bekannt sind, die Grösse $1/R + 1/r$ oder ihr reziproker Wert

$$(24) \quad w = \frac{Rr}{R+r}$$

berechnen. Man erhält hierbei, wenn man sich auf die ohne Oscillation der Capacität berechneten Werte des Decrementes beschränkt, folgende Zusammenstellung:

Serie	w in Ohm
Ia	28090
Ib	27290
Ic	27700
Id	27380

Diese Werte zeigen, dass w innerhalb der Fehlergrenzen constant bleibt, denn ihr Mittel beträgt

$$w = 27\,620 \pm 120$$

und der wahrscheinliche Fehler einer einzelnen Bestimmung $240 = 0,9$ Proc., während das Mittel der wahrscheinlichen Fehler der Coefficienten a (p 92) gleich $1,1$ Proc. ist.

Sämtliche Serien gehören derselben Combination von Windungsgruppen an der Inductionsspule und somit demselben Werte des Selbstinductionscoefficienten an. Es verbleibt also r derselbe in allen Serien. Dagegen variiert R von Serie zu Serie, weil die Capacität eine andere ist. Da w jedoch constant bleibt, so muss R überhaupt so gross sein, dass w von R unabhängig ist, und

$$(25) \quad w = r$$

zu nehmen ist. Dies stimmt auch mit der Erfahrung, dass der Isolationswiderstand eines guten Glimmercondensators noch in Megohm zu zählen ist.

Mit der Combination von Windungsgruppen an der Inductionsspule zeigte sich w als wesentlich veränderlich.¹⁾

In der experimentellen Bestimmung des Coefficienten a der Formel (22) besitzt man nach dem oben Gefundenen ein Mittel zur Messung des Isolationswiderstandes einer Inductionsspule.

1) Hj. Tallqvist, Untersuchungen über elektrische Schwingungen I. p. 96.

Die Differentialgleichung (3) nimmt die Form der Differentialgleichung (2) an, wenn man statt des wirklichen Widerstandes W des Stromkreises die Grösse

$$W' = W + \frac{L}{C} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right)$$

als einen neuen (fictiven) Widerstand einführt. Für die Differenz der beiden Widerstände

$$(26) \quad W' - W = \frac{L}{C} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right) = \frac{L}{C} \frac{1}{w}$$

ergibt sich bei den obigen Serien:

Serie	$W' - W$ in Ohm
Ia	41,65
Ib	21,48
Ic	14,11
Id	10,71

Diese Widerstände sind somit von derselben Grössenordnung wie die Widerstände W des Stromkreises und üben folglich einen wesentlichen Einfluss auf die Dämpfung der Ladungsschwingungen aus.

Schliesslich ist noch zu erwähnen, dass *die experimentelle Bestimmung des Coefficienten a der Formel (22) benutzt werden kann, um das Leitungsvermögen von schwach leitenden Substanzen zu messen*, indem man elektrische Oscillationen hervorruft, das eine Mal in einem Stromkreise, wie es für den gegenwärtigen Zweck construiert war, das andere Mal in demselben Stromkreise, nachdem der isolirende Körper der Inductionsspule oder dem Condensator parallel geschaltet worden ist.

15. Von grösserem Interesse noch als der Coefficient a ist der Coefficient b . Nach der zweiten Formel (23) ist der theoretische Wert von b

$$b = M \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Die folgende Tabelle giebt einen Vergleich zwischen den beobachteten und den berechneten Werten von b :

Nicht oscillirende Capacität				
Serie	Ia	Ib	Ic	Id
<i>b</i> beobachtet	0,0006505	0,0008815	0,0010967	0,0012588
<i>b</i> berechnet	0,0006307	0,0008909	0,0010913	0,0012596
<i>b</i> beob. — <i>b</i> ber.	+ 198	— 94	+ 54	— 8
Diff. in Proc.	+ 3,1	— 1,1	+ 0,5	— 0,1
Quadratsumme	51020			

Oscillirende Capacität				
Serie	Ia	Ib	Ic	Id
<i>b</i> beobachtet	0,0006500	0,0008774	0,0010956	0,0012595
<i>b</i> berechnet	0,0006307	0,0008909	0,0010913	0,0012596
<i>b</i> beob. — <i>b</i> ber.	+ 193	— 135	+ 43	— 1
Diff. in Proc.	+ 3,1	— 1,5	+ 0,4	0,0
Quadratsumme	57324			

Die Summe der Quadrate der Differenzen „*b* beob. — *b* ber.“, ist somit etwas grösser für die mit oscillirender Capacität berechneten *b*-Werte, als für die ohne Oscillation der Capacität gefundenen Werte. Die letzteren scheinen also auch hier etwas genauer als die ersteren zu sein. In den Columnen Ia, Ib, Ic, und Id sind für nicht oscillirende Capacität die wahrscheinlichen Fehler der beobachteten Werte von *b* bez. 0,7, 2,4, 1 und 0,4 Proc., und es geht somit hervor, dass die Differenzen „*b* beob. — ber.“ im allgemeinen innerhalb der Fehlergrenzen liegen. Nur die erste Differenz macht eine kleine Ausnahme, welche jedenfalls sehr erklärlich ist, wenn man bedenkt, dass die entsprechende Grösse „*b* beob.“ aus nur drei Decrementsbestimmungen hervorgegangen ist, und der wahrscheinliche Fehler somit ganz zufällig relativ klein ausgefallen sein kann, obgleich die Grösse selbst in der Wirklichkeit nicht unbedeutend fehlerhaft sein mag. In der zur Columnen Ia gehörenden linearen Relation $\gamma = a + bW$ scheint *a* zu klein und *b* zu gross erhalten worden zu sein. Jedenfalls geht das wichtige Resultat hervor: *In Bezug auf den*

Coefficienten b der Gleichung (22) stimmen Theorie und Erfahrung miteinander überein.

Anwendungen.

16. Nach dem Verhalten der normalen Ladung bei der in den Art. 4 bis 10 behandelten Schwingungscurve könnte man vermuten, dass die Capacität des Condensators sich während der Schwingungen schneller dem definitiven Werte nähert als bei „directer“ Ladung, ohne merkbare Induction im Stromkreise. Man hat nämlich nach neunzehn Halbosscillationen nach der Tabelle I die normale Ladung 231,47, somit die Differenz $231,98 - 231,47 = 0,51$ oder 0,22 Proc., während aus einer Ladungscurve ohne Induction die Differenz von etwa 0,5 Proc. wahrzunehmen ist. Um hierüber zu entscheiden, ist die folgende Tabelle zusammengestellt, welche sämtliche (p. 91) angeführten Curven umfasst. Die Tabelle giebt den Unterschied des Wertes der normalen Ladung „Q verb.“ am Ende der zehnten vollen Oscillation, welcher Wert von den eventuell vorhandenen Oscillationen der Capacität höchst unbedeutend beeinflusst sein dürfte, gegen die definitive Ladung in Procenten der letzteren an. Ferner enthält die Tabelle den Wert, den der Unterschied zwischen dem definitiven und dem augenblicklichen Werte der Capacität am Ende der für zehn volle Oscillationen verwendeten Zeit bei directer Ladung haben würde, für dieselbe Combination von Capacität und Anzahl Accumulatoren im Stromkreise, und zwar in Procenten der definitiven Capacität. Die letzteren Werte sind den p. 85, Art. 9 erwähnten Ladungscurven ohne Inductionsspule entnommen.

Der Unterschied zwischen den beiden Mitteln: 0,51 für oscillirende Ladung, und 0,48 für nicht oscillirende Ladung ist so gering, dass mit Beachtung auch der Unsicherheit dieser Art von Untersuchungen überhaupt der Schluss berechtigt ist: *Nach relativ kurzer Zeit, vom Anfang der Ladung an gerechnet, erreicht die Capacität eines guten Glimmercondensators denselben Wert, es mag die Ladung eine oscillirende oder nicht oscillirende sein.* Natürlich müssen die Schwingungen gedämpft sein, so dass die Amplituden nach der in Frage stehenden Zeit schon ziemlich klein geworden sind.

Nr. der Curven		Capacitäts- differenz bei Schwingungen	Capacitäts- differenz bei directer Ladung	Differenz
Serie Ia	Curve Nr. 1	0,58	0,49	+ 0,09
	„ „ 2	0,64	0,49	+ 0,15
	„ „ 3	0,34	0,49	– 0,15
Serie Ib	„ „ 1	0,10	0,47	– 0,37
	„ „ 2	0,61	0,47	+ 0,14
	„ „ 3	0,33	0,47	– 0,14
	„ „ 4	0,45	0,47	– 0,02
	„ „ 5	0,41	0,47	– 0,06
Serie Ic	„ „ 1	1,06	0,45	+ 0,61
	„ „ 2	0,43	0,45	– 0,02
	„ „ 3	0,34	0,45	– 0,11
Serie Id	„ „ 1	0,66	0,42	+ 0,24
	„ „ 2	0,58	0,42	+ 0,16
	„ „ 3	0,35	0,42	– 0,07
	„ „ 4	0,63	0,42	+ 0,21
	„ „ 5	0,32	0,42	– 0,10
	„ „ 6	0,29	0,42	– 0,13
	„ „ 7	0,35	0,42	– 0,07
Curve (A)		0,64	0,57	+ 0,07
„ (B)		0,63	0,38	+ 0,25
„ (C)		0,98	0,74	+ 0,24
„ (D)		0,32	0,59	– 0,27
„ (E)		0,68	0,54	+ 0,14
„ (F)		0,42	0,53	– 0,11
Mittel:		0,51	0,48	+ 0,03

17. Weil die experimentell gefundenen Werte der Coefficienten b mit den theoretischen Werten stimmen, kann man sie für die Bestimmung von Selbstinductionscoefficienten und Capacitäten verwenden. In dem gegebenen Stromkreise mit unveränderter Capacität und Selbstinduction, aber wenigstens zwei verschiedenen Widerständen werden elektrische Oscillationen hervorgerufen, die Oscillationszeit T und der Coefficient b bestimmt. Alsdann kann man C und L berechnen. Die Bestimmung dieser beiden Grössen wird folglich auf Zeit- und Widerstandsmessungen allein zurückgeführt. Für die Berechnung von C und L hat man die aus den Formeln

$$T = 2\pi \sqrt{LC}$$

und

$$b = M \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

folgenden Ausdrücke

$$(27) \quad C = \frac{1}{M\pi^2} T b = 0,23330 T b,$$

$$(28) \quad L = \frac{M}{4} \frac{T}{b} = 0,10857 \frac{T}{b},$$

wobei für T die auf definitive Capacität corrigirten Werte zu gebrauchen sind. Diese Correction ist sonst sehr klein; für die unten gegebenen Schwingungszeiten

$$\Delta T = T \frac{1}{2} \frac{\Delta C}{C} = \text{etwa } 0,0022 T.$$

Für die Serien Ib, Ic und Id hat man folgende Zusammenstellung:

Serie:	Ib	Ic	Id
Oscillationszeit T in Millisecunden:	4,840	5,920	6,867
Coefficient „ b beob.“ in 10^{-9} sec/cm:	0,0008815	0,0010967	0,0012588

und berechnet mittels der Formeln (27) und (28)

Capacität in Mikrofarad:	0,995	1,515	2,017
Selbstinductionscoefficient in Henry:	0,5961	0,5861	0,5923

welche Werte alle annehmbar sind. Das Mittel der Werte von L ist 0,5915, somit sehr gut.

(Eingegangen 27. October 1900.)