

18.

Développement de quelques intégrales définies, renfermant des fonctions trigonométriques.(Par Mr. le Dr. O. *Schlömilch*, professeur à l'université de Jena.)

Depuis longtemps les deux formules

$$\begin{aligned} 1. \quad \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \cos ux \, dx &= \frac{\Gamma(\mu) \cos(\mu \arctan u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}\mu}}, \\ 2. \quad \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \sin ux \, dx &= \frac{\Gamma(\mu) \sin(\mu \arctan u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}\mu}} \end{aligned}$$

sont connues, mais on n'a pas encore essayé d'en tirer des nouveaux résultats pour la théorie des intégrales définies. Or ces formules donnent différentes intégrales définies, si on les combine avec d'autres formules du même genre. Nous présenterons ici quelques exemples de ces combinaisons.

I.

Après avoir remplacé μ par p , nous multiplierons l'équation (1.) par $\frac{\partial u}{u^q}$ et en prendrons l'intégrale par rapport à u , entre les limites $u=0$ et $u=\infty$. Cela donne

$$3. \quad \int_0^\infty \frac{\partial u}{u^q} \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} \cos ux \, dx = \Gamma(p) \int_0^\infty \frac{\cos(p \arctan u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}p}} \cdot \frac{\partial u}{u^q}.$$

Quant à l'intégrale double à gauche, on en peut trouver la valeur en renversant l'ordre des intégrations. Par cela elle se change en

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} \, dx \int_0^\infty \frac{\cos xu}{u^q} \, du,$$

et en posant $u = \frac{t}{x}$, l'intégrale double se change en un produit de deux intégrales simples, savoir en

$$\left(\int_0^\infty x^{p+q-2} e^{-x} \, dx \right) \left(\int_0^\infty \frac{\cos t}{t^q} \, dt \right),$$

c'est à dire en

$$\Gamma(p+q-1) \cdot \frac{\pi}{2\Gamma(q) \cos \frac{1}{2}q\pi}, \quad 1 > q > 0.$$

Car comme $\frac{1}{t^q} = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^\infty z^{q-1} e^{-tz} \partial z$, il suit de là

$$\int_0^\infty \frac{\cos t}{t^q} \partial t = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^\infty \cos t \partial t \int_0^\infty z^{q-1} e^{-tz} \partial z,$$

et en renversant l'ordre des intégrations:

$$\int_0^\infty \frac{\cos t}{t^q} \partial t = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^\infty z^{q-1} \partial z \int_0^\infty e^{-zt} \cos t \partial t = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^\infty \frac{z^q \partial z}{1+z^2}.$$

La valeur de l'intégrale à droite se trouve à l'aide de la formule connue

$$\int_0^\infty \frac{z^{m-1} \partial z}{1+z^n} = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}, \quad n > m > 1,$$

donc on obtient

$$\int_0^\infty \frac{\cos t}{t^q} \partial t = \frac{1}{\Gamma(q)} \cdot \frac{\pi}{2 \sin \frac{1}{2}(q+1)\pi} = \frac{\pi}{2\Gamma(q) \cos \frac{1}{2}q\pi}, \quad 1 > q > 0;$$

et c'est là la formule ci-dessus.

En égalant cette expression à l'intégrale à droite dans (3.), on trouve

$$\int_0^\infty \frac{\cos(p \operatorname{arctang} u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}p}} \cdot \frac{\partial u}{u^q} = \frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \cdot \frac{\pi}{2 \cos \frac{1}{2}q\pi}; \quad 1 > q > 0.$$

En substituant $u = \operatorname{tang} \theta$, on obtient sans difficulté:

$$4. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{p-2} \theta \cot^q \theta \cos p\theta \partial \theta = \frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \cdot \frac{\pi}{2 \cos \frac{1}{2}q\pi}; \quad 1 > q > 0;$$

ce qui est une formule assez remarquable.

Pour trouver une autre équation, analogue à la précédente, multiplions (2) par $\frac{\partial u}{u^q}$, après y avoir écrit p à la place de μ ; intégrant alors suivant u , on obtient

$$5. \quad \int_0^\infty \frac{\partial u}{u^q} \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} \sin ux \partial x = \Gamma(p) \int_0^\infty \frac{\sin(p \operatorname{arctang} u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}p}} \cdot \frac{\partial u}{u^q},$$

où l'intégrale double à gauche est aussi égale à l'expression

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} \partial x \int_0^\infty \frac{\sin xu}{u^q} \partial u,$$

qui, par la substitution de $u = \frac{t}{x}$ se change en

$$\left(\int_0^\infty x^{p+q-2} e^{-x} \partial x \right) \left(\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^q} \partial t \right) = \Gamma(p+q-1) \cdot \frac{\pi}{2\Gamma(q) \sin \frac{1}{2}q\pi}; \quad 2 > q > 0.$$

La valeur de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^q} \partial t$ peut être trouvée par un calcul tout à fait analogue à celui employé ci-dessus.

En égalant l'expression ci-dessus à l'intégrale à droite dans (5.), on obtient

$$\int_0^\infty \frac{\sin(p \operatorname{arctang} u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}p}} \cdot \frac{\partial u}{u^q} = \frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \cdot \frac{\pi}{2 \sin \frac{1}{2}q\pi}; \quad 2 > q > 0,$$

et en faisant $u = \operatorname{tang} \theta$, on en tire la formule

$$6. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{p-2}\theta \cot^q\theta \sin p\theta \partial\theta = \frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \cdot \frac{\pi}{2 \sin \frac{1}{2}q\pi}; \quad 2 > q > 0.$$

Les résultats trouvés (4. et 6.) présentent plusieurs formules déjà connues. Si par exemple on fait $q = 1$ dans (6.), on parvient à l'équation

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin p\theta}{\sin \theta} \cos^{p-1}\theta \partial\theta = \frac{1}{2}\pi,$$

trouvée par Mr. *Liouville* par une voie tout-différente. (Voyez tome 13. de ce journal page 232.).

II.

Pour faire une autre application de l'équation (1.), multiplions la par

$$\frac{u^m \partial u}{r^2 + u^2},$$

et prenons en l'intégrale suivant u entre les limites $u = 0$ et $u = \infty$. Cela donne

$$7. \quad \int_0^\infty \frac{u^m \cdot \partial u}{r^2 + u^2} \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \cos xu \partial x = \Gamma(\mu) \int_0^\infty \frac{\cos(\mu \operatorname{arctang} u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}\mu}} \cdot \frac{u^m \partial u}{r^2 + u^2}.$$

Cette intégrale double peut aussi être présentée sous la forme

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \partial x \int_0^\infty \frac{u^m \cos xu}{r^2 + u^2} \partial u,$$

où l'intégration suivant u peut être exécutée au moyen de la formule connue

$$\int_0^\infty \frac{u^m \cos xu}{r^2 + u^2} \partial u = (-1)^{\frac{1}{2}m} \frac{1}{2}\pi r^{m-1} e^{-rx},$$

qui suppose que m est un nombre pair. L'intégrale double se change alors en

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \partial x (-1)^{\frac{1}{2}m} \frac{1}{2}\pi r^{m-1} e^{-rx} = (-1)^{\frac{1}{2}m} \frac{1}{2}\pi r^{m-1} \frac{\Gamma(\mu)}{(1+r)^\mu},$$

ce qui est la valeur de l'expression à gauche dans l'équation (7.). On en tire

$$8. \quad \int_0^\infty \frac{\cos(\mu \operatorname{arctang} u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}\mu}} \cdot \frac{u^m \partial u}{r^2 + u^2} = (-1)^{\frac{1}{2}m} \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{r^{m-1}}{(1+r)^\mu}.$$

Avant de transformer cette intégrale en une autre, qui ne contienne que des fonctions trigonométriques, nous ferons voir qu'on en peut tirer deux autres formules plus générales.

A. A cet effet nous présenterons l'équation sous la forme suivante:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\mu \operatorname{arctang} u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}\mu}} \cdot \frac{u}{r^2 + u^2} u^{m-1} \partial u = (-1)^{\frac{1}{2}m} \frac{1}{2}\pi \cdot r^{m-1} (1+r)^{-\mu},$$

dont il est facile de prendre la dérivée $n^{\text{ième}}$ suivant r . En faisant usage de la formule connue

$$\frac{\partial^n [\varphi(r) \psi(r)]}{\partial r^n} = \varphi(r) \psi^{(n)}(r) + n_1 \varphi'(r) \psi^{(n-1)}(r) + n_2 \varphi''(r) \psi^{(n-2)}(r) + \dots$$

$$[n_1 = \frac{n}{1}, \quad n_2 = \frac{n(n-1)}{1.2}, \quad n_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}, \text{ etc.}],$$

on obtient sans difficulté:

$$9. \quad \int_0^\infty \frac{\cos(\mu \arctang u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}\mu}} \cdot \frac{\partial^n}{\partial r^n} \left[\frac{u}{r^2+u^2} \right] u^{m-1} \partial u$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}m+n} \pi (\mu, 1)^n \frac{r^{m-1}}{(1+r)^{\mu+n}} \left\{ 1 - \frac{(m-1)n_1}{\mu+n-1} \left(\frac{1+r}{r} \right) + \frac{(m-1)(m-2)n_2}{(\mu+n-1)(\mu+n-2)} \left(\frac{1+r}{r} \right)^2 - \dots \right\}$$

où $(\mu, 1)^n$ designe la factorielle $\mu(\mu+1) \dots (\mu+n-1)$.

Quant à la dérivée sous le signe de l'intégration, elle se trouve être:

$$\frac{\partial^n}{\partial r^n} \left[\frac{u}{r^2+u^2} \right] = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot \frac{\partial^n}{\partial r^n} \left[\frac{1}{r-u\sqrt{-1}} - \frac{1}{r+u\sqrt{-1}} \right]$$

$$= \frac{(-1)^n 1.2 \dots n}{2\sqrt{-1}} \left[\frac{1}{(r-u\sqrt{-1})^{n+1}} - \frac{1}{(r+u\sqrt{-1})^{n+1}} \right]$$

$$= \frac{(-1)^n (1, 1)^n}{2\sqrt{-1}} \cdot \frac{(r+u\sqrt{-1})^{n+1} - (r-u\sqrt{-1})^{n+1}}{(r^2+u^2)^{n+1}}.$$

En posant $r+u\sqrt{-1} = \varrho(\cos \omega + \sqrt{-1} \sin \omega)$, on aura aussi

$$\frac{\partial^n}{\partial r^n} \left[\frac{u}{r^2+u^2} \right] = (-1)^n (1, 1)^n \frac{\varrho^{n+1} \sin(n+1)\omega}{(r^2+u^2)^{n+1}},$$

et parcequ'en vertu de l'équation précédente on a $\varrho = \sqrt{r^2+u^2}$ et $\omega = \arctang \frac{u}{r}$:

$$\frac{\partial^n}{\partial r^n} \left[\frac{u}{r^2+u^2} \right] = (-1)^n (1, 1)^n \frac{\sin[(n+1) \arctang \frac{u}{r}]}{(r^2+u^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}}.$$

L'équation (9.) donne maintenant

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\mu \arctang u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}\mu}} \cdot \frac{\sin[(n+1) \arctang \frac{u}{r}]}{(r^2+u^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}} u^{m-1} \partial u$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}m+n} \pi \cdot \frac{(\mu, 1)^n}{(1, 1)^n} \cdot \frac{r^{m-1}}{(1+r)^{\mu+n}} \left\{ 1 - \frac{(m-1)n}{1.(\mu+n-1)} \left(\frac{1+r}{r} \right) + \frac{(m-1)(m-2).n(n-1)}{1.2.(\mu+n-1)(\mu+n-2)} \left(\frac{1+r}{r} \right)^2 - \dots \right\}$$

et en faisant $r=1$ et $u = \tan \theta$:

$$10. \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{\mu+n-1} \theta \operatorname{tang}^{m-1} \theta \cos \mu \theta \sin(n+1) \theta \partial \theta \\ = (-1)^{\frac{1}{2}m} \frac{\pi}{2^{\mu+n+1}} \cdot \frac{(\mu, 1)^n}{(1, 1)^n} \left\{ 1 - \frac{(m-1).n}{1.(\mu+n-1)} 2 + \frac{(m-1)(m-2).n(n-1)}{1.2.(\mu+n-1)(\mu+n-2)} 2^2 - \dots \right\}$$

B. L'équation (8.) peut aussi être présentée sous la forme

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\mu \operatorname{arctang} u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}\mu}} \cdot \frac{r}{r^2+u^2} u^m \partial u = (-1)^{\frac{1}{2}m} \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{r^m}{(1+r)^\mu}.$$

En la différentiant n fois de suite, et se reportant à la formule

$$\frac{\partial^n}{\partial r^n} \left[\frac{r}{r^2+u^2} \right] = (-1)^n (1, 1)^n \frac{\cos[(n+1) \operatorname{arctang} \frac{u}{r}]}{(r^2+u^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}},$$

on en tire

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\mu \operatorname{arctang} u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}\mu}} \cdot \frac{\cos[(n+1) \operatorname{arctang} \frac{u}{r}]}{(r^2+u^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}} u^m \partial u \\ = (-1)^{\frac{1}{2}m} \frac{1}{2}\pi \frac{(\mu, 1)^n}{(1, 1)^n} \cdot \frac{r^m}{(1+r)^{\mu+n}} \left\{ 1 - \frac{m.n}{1.(\mu+n-1)} \left(\frac{1+r}{r} \right) + \frac{m(m-1).n(n-1)}{1.2.(\mu+n-1)(\mu+n-2)} \left(\frac{1+r}{r} \right)^2 - \dots \right\}$$

Cela, pour $r = 1$, $u = \operatorname{tang} \theta$, donne

$$11. \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{\mu+n-1} \theta \operatorname{tang}^m \theta \cos \mu \theta \cos(n+1) \theta \partial \theta \\ = (-1)^{\frac{1}{2}m} \frac{\pi}{2^{\mu+n+1}} \cdot \frac{(\mu, 1)^n}{(1, 1)^n} \left\{ 1 - \frac{m.n}{1.(\mu+n-1)} 2 + \frac{m(m-1).n(n-1)}{1.2.(\mu+n-1)(\mu+n-2)} 2^2 - \dots \right\}$$

Voilà une formule correspondante avec celle (10.).

Des calculs tout analogues peuvent être appliqués à la formule (2.).

En la multipliant par

$$\frac{u^{m+1} \partial u}{r^2+u^2}$$

et l'intégrant suivant u , entre les limites $u = 0$, $u = \infty$, on obtient

$$12. \int_0^\infty \frac{u^{m+1} \partial u}{r^2+u^2} \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \sin xu \partial x = \Gamma(\mu) \int_0^\infty \frac{\sin(\mu \operatorname{arctang} u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}\mu}} \cdot \frac{u^{m+1} \partial u}{r^2+u^2}.$$

L'intégrale double à gauche peut être transformée en

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \partial x \int_0^\infty \frac{u^{m+1} \sin xu}{r^2+u^2} \partial u,$$

où l'intégration peut être opérée suivant u , si l'on fait usage de la formule

$$\int_0^\infty \frac{u^{m+1} \sin xu}{r^2+u^2} = (-1)^{\frac{1}{2}m} \frac{1}{2}\pi r^m e^{-rx},$$

qui suppose m pair. L'intégrale en question se change maintenant en

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \partial x (-1)^{\frac{1}{2}m} \frac{1}{2}\pi r^m e^{-rx} = (-1)^{\frac{1}{2}m} \frac{1}{2}\pi r^m \frac{\Gamma(\mu)}{(1+r)^\mu},$$

et à l'aide de l'équation (12.) on obtient

$$13. \int_0^\infty \frac{\sin(\mu \arctan u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}\mu}} \cdot \frac{u^{m+1} \partial u}{r^2 + u^2} = (-1)^{\frac{1}{2}m} \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{r^m}{(1+r)^u}.$$

La différentiation n fois répétée de cette équation, donne

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\mu \arctan u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}\mu}} \cdot \frac{\sin[(n+1) \arctan \frac{u}{r}]}{(r^2 + u^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}} \partial u \\ = (-1)^{\frac{1}{2}m} \frac{1}{2}\pi \frac{(\mu, 1)^n}{(1, 1)^n} \cdot \frac{r^m}{(1+r)^{u+n}} \left\{ 1 - \frac{m \cdot n}{1 \cdot (\mu+n-1)} \left(\frac{1+r}{r}\right) + \frac{m(m-1) \cdot n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot (\mu+n-1)(\mu+n-2)} \left(\frac{1+r}{r}\right)^2 - \dots \right\}$$

et pour $r = 1$, $u = \tan \theta$:

$$14. \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{\mu+n-1} \theta \tan^m \theta \sin \mu \theta \sin(n+1) \theta \partial \theta \\ = (-1)^{\frac{1}{2}m} \frac{\pi}{2^{u+n+1}} \cdot \frac{(\mu, 1)^n}{(1, 1)^n} \left\{ 1 - \frac{m \cdot n}{1 \cdot (\mu+n-1)} 2 + \frac{m(m-1) \cdot n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot (\mu+n-1)(\mu+n-2)} 2^2 - \dots \right\}.$$

Mettant $m-2$ à la place de m et multipliant par r , la différentiation donne

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\mu \arctan u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}\mu}} \cdot \frac{\cos[(n+1) \arctan \frac{u}{r}]}{(r^2 + u^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}} u^{m-1} \partial u \\ = (-1)^{\frac{1}{2}m+1} \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{(\mu, 1)^n}{(1, 1)^n} \cdot \frac{r^{m-1}}{(1+r)^{u+n}} \left\{ 1 - \frac{(m-1) \cdot n}{1 \cdot (\mu+n-1)} \left(\frac{1+r}{r}\right) + \frac{(m-1)(m-2) \cdot n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot (\mu+n-1)(\mu+n-2)} \left(\frac{1+r}{r}\right)^2 - \dots \right\}$$

et pour $r = 1$, $u = \tan \theta$:

$$15. \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{\mu+n-1} \theta \tan^{m-1} \theta \sin \mu \theta \cos(n+1) \theta \partial \theta \\ = (-1)^{\frac{1}{2}m+1} \frac{\pi}{2^{u+n+1}} \cdot \frac{(\mu, 1)^n}{(1, 1)^n} \left\{ 1 - \frac{(m-1)n}{1 \cdot (\mu+n-1)} 2 + \frac{(m-1)(m-2) \cdot n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot (\mu+n-1)(\mu+n-2)} 2^2 - \dots \right\}.$$

Voilà la dernière formule correspondante à celles (10., 11. et 14.). Comme toutes ces intégrales contiennent trois nombres μ , m , n , dont le premier est absolument arbitraire, on en peut tirer beaucoup de formules particulières plus ou moins connues.

III.

Passons maintenant à une troisième application des équations (1.) et (2). Multipliant par

$$\frac{\partial u}{(r^2 + u^2)^{n+1}}$$

et intégrant suivant u , on tire de (1):

$$16. \int_0^\infty \frac{\partial u}{(r^2 + u^2)^{n+1}} \int_0^\infty x^{u-1} e^{-x} \cos ux \partial x = \Gamma(u) \int_0^\infty \frac{\cos(\mu \arctan u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}\mu}} \cdot \frac{\partial u}{(r^2 + u^2)^{n+1}}.$$

Renversant l'ordre des intégration, l'intégrale à gauche se change en

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \partial x \int_0^\infty \frac{\cos xu \partial u}{(r^2 + u^2)^{n+1}},$$

où l'intégration suivant u peut être effectuée par le secours de la formule connue

$$\int_0^\infty \frac{\cos xu \partial u}{(r^2 + u^2)^{n+1}} = \frac{\pi e^{-rx}}{2^{n+1} \Gamma(n+1)} \left\{ M_0 \frac{x^n}{r^{n+1}} + M_2 \frac{x^{n-1}}{r^{n+2}} + M_4 \frac{x^{n-2}}{r^{n+3}} + \dots \right\},$$

dans laquelle les coefficients M_0, M_2, M_4 etc. sont déterminés par les équations

$$17. \quad M_0 = 1, \quad M_2 = \frac{1}{2}(n+1)n, \quad M_4 = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2.4}, \\ M_6 = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4.6}, \quad \text{etc.}$$

Maintenant on obtient

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \partial x \int_0^\infty \frac{\cos xu \partial u}{(r^2 + u^2)^{n+1}} \\ = \frac{\pi}{2^{n+1} \Gamma(n+1)} \left\{ \frac{M_0}{r^{n+1}} \int_0^\infty x^{\mu+n-1} e^{-(1+r)x} \partial x + \frac{M_2}{r^{n+2}} \int_0^\infty x^{\mu+n-2} e^{-(1+r)x} \partial x \right. \\ \left. + \frac{M_4}{r^{n+3}} \int_0^\infty x^{\mu+n-3} e^{-(1+r)x} \partial x + \dots \right\}$$

et en opérant les intégrations indiquées à droite, on trouve que l'intégrale double mentionnée est égale à la série finie

$$\frac{\pi}{2^{n+1} \Gamma(n+1)} \left\{ \frac{M_0}{r^{n+1}} \cdot \frac{\Gamma(\mu+n)}{(1+r)^{\mu+n}} + \frac{M_2}{r^{n+2}} \cdot \frac{\Gamma(\mu+n-1)}{(1+r)^{\mu+n-1}} + \frac{M_4}{r^{n+3}} \cdot \frac{\Gamma(\mu+n-2)}{(1+r)^{\mu+n-2}} + \dots \right\},$$

ou bien à

$$\frac{\pi}{\Gamma(n+1)(2r)^{n+1}(1+r)^{\mu+n}} \left\{ M_0 \Gamma(\mu+n) + M_2 \Gamma(\mu+n-1) \frac{1+r}{r} \right. \\ \left. + M_4 \Gamma(\mu+n-2) \left(\frac{1+r}{r} \right)^2 + \dots \right\}$$

En observant qu'en vertu des propriétés des intégrales Euleriennes on a

$$\Gamma(\mu+n-1) = \frac{\Gamma(\mu+n)}{\mu+n-1} \quad \text{et} \quad \Gamma(\mu+n-2) = \frac{\Gamma(\mu+n)}{(\mu+n-1)(\mu+n-2)} \quad \text{etc.,}$$

la série précédente peut aussi être présentée sous la forme

$$\frac{\pi \Gamma(\mu+r)}{\Gamma(n+1)(2r)^{n+1}(1+r)^{\mu+n}} \left\{ M_0 + \frac{M_2(1+\frac{1}{r})}{\mu+n-1} + \frac{M_4(1+\frac{1}{r})}{(\mu+n-1)(\mu+n-2)} + \dots \right\}.$$

Cela étant la valeur de l'intégrale double en (16.), nous avons maintenant:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\mu \arctang u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}\mu}} \cdot \frac{\partial u}{(r^2+u^2)^{n+1}}$$

$$\frac{\pi \Gamma(\mu+n) : \Gamma(\mu)}{\Gamma(n+1)(2r)^{n+1}(1+r)^{\mu+n}} \left\{ M_0 + \frac{M_2(1+\frac{1}{r})}{\mu+n-1} + \frac{M_4(1+\frac{1}{r})^2}{(\mu+n-1)(\mu+n-2)} + \dots \right\},$$

où $\frac{\Gamma(\mu+n) : \Gamma(\mu)}{\Gamma(n+1)}$ peut être remplacé par

$$\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)\dots(\mu+n-1)}{1.2.3\dots n} = \frac{(\mu, 1)^n}{(1, 1)^n}.$$

Fesant enfin $r=1$, $u = \text{tang } \theta$, nous aurons en vertu des valeurs de M_0 , M_2 , M_4 etc.

$$18. \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{\mu+2n} \theta \cos \mu \theta \partial \theta$$

$$= \frac{\pi}{2^{\mu+2n+1}} \cdot \frac{(\mu, 1)^n}{(1, 1)^n} \left\{ 1 + \frac{(n+1)n}{1.(\mu+n-1)} + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1.2.(\mu+n-1)(\mu+n-2)} + \dots \right\}.$$

Un calcul semblable donnera un théorème analogue; car de (2.) on tire

$$19. \int_0^\infty \frac{u \partial u}{(r^2+u^2)^{n+1}} \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \sin ux \partial x = \Gamma(\mu) \int_0^\infty \frac{\sin(\mu \arctang u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}\mu}} \cdot \frac{u \partial u}{(r^2+u^2)^{n+1}},$$

où l'intégrale double peut être transformée en

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \partial x \int_0^\infty \frac{u \sin xu \partial u}{(r^2+u^2)^{n+1}}.$$

La valeur de cette intégrale par rapport à u est, comme on sait,

$$\frac{\pi e^{-rx}}{2^{n+1} \Gamma(n+1)} \left\{ N_0 \frac{x^n}{r^n} + N_2 \frac{x^{n-1}}{r^{n+1}} + N_4 \frac{x^{n-2}}{r^{n+2}} + \dots \right\},$$

où

$$N_0 = 1, \quad N_2 = \frac{1}{2}(n-1), \quad N_4 = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4},$$

$$N_6 = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.6}, \quad \text{etc.}$$

Delà on tire sans difficulté la valeur suivante de l'intégrale double:

$$\frac{\pi}{2^{n+1} \Gamma(n+1)} \left\{ \frac{N_0}{r^n} \cdot \frac{\Gamma(\mu+n)}{(1+r)^{\mu+n}} + \frac{N_2}{r^{n+1}} \cdot \frac{\Gamma(\mu+n-1)}{(1+r)^{\mu+n-1}} + \frac{N_4}{r^{n+2}} \cdot \frac{\Gamma(\mu+n-2)}{(1+r)^{\mu+n-2}} + \dots \right\},$$

ou bien

$$\frac{r\pi \Gamma(\mu+n)}{\Gamma(n+1)(2r)^{n+1}(1+r)^{\mu+n}} \left\{ N_0 + \frac{N_2(1+\frac{1}{r})}{\mu+n-1} + \frac{N_4(1+\frac{1}{r})^2}{(\mu+n-1)(\mu+n-2)} + \dots \right\},$$

et en égalant cette valeur à l'intégrale à droite dans (19.):

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\mu \arctan u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}\mu}} \cdot \frac{u \partial u}{(r^2+u^2)^{n+1}}$$

$$= \frac{r\pi\Gamma(\mu+n):\Gamma(\mu)}{\Gamma(n+1)(2r)^{n+1}(1+r)^{\mu+n}} \left\{ N_0 + \frac{N_2(1+\frac{1}{r})}{\mu+n-1} + \frac{N_4(1+\frac{1}{r})}{(\mu+n-1)(\mu+n-2)} + \dots \right\}$$

Fesant enfin $r = 1$, $u = \tan \theta$, on obtient

$$20. \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{\mu+2n}\theta \sin \mu\theta \tan \theta \partial\theta$$

$$= \frac{\pi}{2^{\mu+2n+1}} \cdot \frac{(\mu, 1)^n}{(1, 1)^n} \left\{ 1 + \frac{n(n-1)}{1.(\mu+n-1)} + \frac{(n-1)n(n-1)(n-2)}{1.2.(\mu+n-1)(\mu+n-2)} + \dots \right\}$$

Il est à remarquer qu'il n'est pas permis de supposer $\mu = 0$, ou négatif, dans toutes les formules que nous venons de présenter, parceque le calcul a été fondé sur les propriétés des intégrales Eulériennes qui n'ont lieu que pour des valeurs positives de la variable.