Geodätische Linien und ihre Enveloppen auf dreiaxigen Flächen zweiten Grades.

Von

A. v. BRAUNMÜHL in München.

(Mit einer lithogr. Tafel.)

Einleitung.

Nachdem es Jacobi*) im Jahre 1838 gelungen war, das Problem der geodätischen Linien auf dem dreiaxigen Ellipsoide auf Quadraturen zurückzuführen, wodurch dasselbe zugleich für alle Flächen zweiten Grades gelöst erschien, wurde das gleiche Resultat theils geometrisch, theils algebraisch von Joachimsthal**), O. Bonnet***), Liouville†), Chasles††), Cayley†††) und anderen begründet. Die weitere Behandlung der Quadraturen erfolgte jedoch erst 1861 durch Weierstrass*†), welcher auf die Summe der beiden Abel'schen Integrale erster Gattung ($p = 2$), die in der Gleichung der geodätischen Linien auftreten, das Jacobi'sche Umkehrproblem anwandte und dadurch elegante Formeln erhielt, welche die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der geodätischen Linie auf dem dreiaxigen Ellipsoide durch hyperelliptische ϑ -Functionen von einem variablen Parameter abhängig machen. Diese Formeln wurden ohne Ableitung mitgetheilt, und Weierstrass bemerkt, dass sich für ein dreiaxiges Ellipsoid, das wenig von einem Sphäroid verschieden ist, rasch convergente Reihen zur Berechnung dieser Coordinaten angeben liessen, die er in einem spätern Aufsätze mitzutheilen verspricht. Meines Wissens ist jedoch die Publication dieser Formeln unterblieben.

*) Am 28. December 1838 theilte Jacobi seine Lösung der Pariser Akademie mit. Vergl. Journal von Crelle, Bd. 19, pag. 309. — Vorlesungen über Dynamik, herausgegeben von Clebsch, pag. 214.

**) Journal von Crelle, Bd. 26, pag. 155.

***) Journal de l'école polytechnique t. 19, pag. 137.

†) Journal des Mathématiques, t. 9, Serie I, pag. 401—409 und t. 11, pag. 21.

††) Journal des Mathématiques, t. 11, Serie I, pag. 5, 105, 111.

†††) Proceedings of the London mathematical Society, Vol. IV, pag. 191—211.

*†) Monatsberichte der Berliner Akademie, 1861, pag. 986—997.

Ich stellte mir nun im Folgenden die Aufgabe, die Weierstrass'schen Formeln für eine allgemeine geodätische Linie abzuleiten (§ 1 und 2), die dabei auftretenden Constanten in eine für die numerische Berechnung bequemere Form zu bringen (§ 3) und überhaupt das Problem soweit zu fördern, dass es für eine Berechnung unmittelbar tauglich sei. In § 4 theile ich dann die Resultate einer solchen numerischen Rechnung mit, da es mir nicht uninteressant erscheint, die Brauchbarkeit der *hyperelliptischen Functionen* zu diesem Zwecke einmal an einem Beispiele geprüft zu sehen, zumal da Cayley bereits in zwei grösseren Arbeiten die numerische Bestimmung einer allgemeinen geodätischen Linie auf dem einschaligen Hyperboloide*) und einer Linie durch die Kreispunkte auf dem dreiaxigen Ellipsoide**) mit directer *Berechnung der Quadraturen* ausführte.

Durch die letztere Arbeit veranlasst theile ich in § 5 Formeln mit, welche die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der geodätischen Linie durch die Kreispunkte auf dem Ellipsoide direct von einem Parameter abhängig machen. Eine numerische Rechnung wurde nicht beigelegt, da ausser Cayley auch Rohn***) bereits eine solche bewerkstelligt hat.

Die folgenden Paragraphen besprechen den Hauptgegenstand der vorliegenden Abhandlung. Ich greife nämlich auf einen frühern Aufsatz von mir zurück†). Anschliessend an die Bemerkung von Jacobi††), dass im Allgemeinen jede geodätische Linie nur bis zu einer gewissen Grenze die Eigenschaft hat, kürzeste Linie zu sein, und in Folge dessen ein Büschel geodätischer Linien eine Enveloppe besitzen wird, untersuchte ich damals die Gestalten dieser Enveloppen auf den Rotationsflächen zweiten Grades. Diese Untersuchung wird nun auf das dreiaxige Ellipsoid ausgedehnt. In § 6 werden die Integralgleichungen einer Enveloppe aufgestellt, und Grenzen angegeben, zwischen denen der Berührungspunkt einer beliebigen Linie mit ihrer Enveloppe liegt. In § 7 wird die Lage dieser Berührungspunkte für specielle geodätische Linien discutirt, zu diesem Zwecke ein Hilfssatz bewiesen, die Definition der halben Periode einer geodätischen Linie eingeführt und die Gestalt einer Enveloppe ins Auge gefasst. Zum Schlusse wird das gesammte Resultat in einem Satze vereinigt. § 8 enthält dann die Folgerungen, die sich aus diesem Satze in Bezug auf die drei Hauptschnitte ergeben, während § 9 die Mittel angiebt, Punkte der Enveloppe durch hyperelliptische Functionen zu berechnen.

*) Proceedings of the London mathematical Society, Vol. IV, p. 371—380.

**) Memoirs of the Royal Astronomical Society, Part. II, Vol. XXXIX, p. 44.

***). Mathematische Modelle, München, Serie I, Nr. 5. (Verlag v. L. Brill, Darmstadt.)

†) Diese Annalen Bd. XIV, p. 557—566.

††) Jacobi, Dynamik, pag. 46.

Die noch folgenden zwei Paragraphen sind dem dreiaxigen Hyperboloid mit zwei Mantelflächen gewidmet. Ihre Veranlassung finden sie in einem vor Jahresfrist erschienenen Aufsätze von Herrn v. Mangoldt*), der mit meinen früheren Untersuchungen in engem Zusammenhang steht. In § 10 wird ein Satz bezüglich der Linien, die durch die Kreispunkte der Fläche gehen, bewiesen, ferner werden die Beziehungen desselben zu der erwähnten Arbeit klar gelegt und endlich in § 11 die Gleichungen zur Berechnung der Grenzcurve aufgestellt, welche nach Herrn v. Mangoldt diejenigen Punkte der Fläche trennt, die als Ausgangspunkte geodätischer Linien genommen Enveloppen veranlassen oder nicht.

§ 1.

Gleichungen der geodätischen Linien auf dem Ellipsoide.

Als Ausgangspunkt für das Folgende dient uns das erste Integral der Differentialgleichung geodätischer Linien, wie es von Jacobi**) gegeben worden. Nur in der Bezeichnungsweise schliessen wir uns an Liouville***) an. Es seien nämlich die Gleichungen des Ellipsoids und der dazu confocalen Flächen

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{x^2}{\sigma^2} + \frac{y^2}{\sigma^2 - h^2} + \frac{z^2}{\sigma^2 - k^2} = 1, \\ \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - h^2} - \frac{z^2}{k^2 - \mu^2} = 1, \\ \frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{h^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{k^2 - \nu^2} = 1. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt die Bedingung

$$\infty > \sigma > k > \mu > h > \nu > 0.$$

Lässt man μ alle möglichen Werthe von $\mu = k$ bis $\mu = h$ annehmen, so bestimmen die beiden ersten dieser Gleichungen das eine System von Krümmungslinien des Ellipsoides, welches von allen confocalen einschaligen Hyperboloiden ausgeschnitten wird, und man kann somit μ als Parameter der Krümmungslinien dieses Systems auffassen. Dieselben liegen zwischen den Hauptschnitten $\mu = k$ (xy Ebene) und $\mu = h$ (xz Ebene). Lässt man ν von $\nu = 0$ bis $\nu = h$ variiren, so geben die erste und dritte Gleichung das zweite System von Krüm-

*) H. v. Mangoldt, Ueber diejenigen Punkte auf positiv gekrümmten Flächen, welche die Eigenschaft haben, dass die von ihnen ausgehenden geodätischen Linien nie aufhören, kürzeste Linien zu sein. Journal von Crelle-Borchardt. Bd. 91, pag. 23.

**) Dynamik, pag. 214.

***) Liouville. Note III zu Monge's Application de l'Analyse à la Géométrie, pag. 581.

mungslinien, das somit von den confocalen zweischaligen Hyperboloiden ausgeschnitten wird und zwischen den Hauptschnitten $v=h$ (xz Ebene) und $v=0$ (yz Ebene) liegt, v kann somit als Parameter des zweiten Systems aufgefasst werden. Beide Systeme vereinigen sich in den Kreispunkten, für welche $\mu = v = h$ ist.

Mit diesen Bezeichnungen wird dann die Gleichung der geodätischen Linien

$$(2) \quad \int_{k^2}^{\mu^2} \frac{(\sigma^2 - \mu^2) d(\mu^2)}{M} \pm \int_{h^2}^{v^2} \frac{(\sigma^2 - v^2) d(v^2)}{N} = u'^*).$$

Hier ist x eine durch Anfangswerthe zu bestimmende Constante,

$$M^2 = (\sigma^2 - \mu^2) (k^2 - \mu^2) (\mu^2 - \mu'^2) (\mu^2 - h^2) \mu^2,$$

während N^2 aus diesem Ausdrucke hervorgeht, indem man μ mit v vertauscht. Da die Differentialgleichung der geodätischen Linien vom zweiten Grade ist, so ist μ' die Constante der ersten Integration. Die geometrische Bedeutung dieser Constanten ergibt sich aus einer Form, in welche zuerst Liouville die Gleichung (2) gebracht hat.**)

Bezeichnet man nämlich mit i den Winkel, unter welchem eine geodätische Linie eine Krümmungslinie schneidet, so ist diese Gleichung:

$$(3) \quad \mu^2 \cos^2 i + v^2 \sin^2 i = \mu'^2.$$

Dieselbe wird für $\mu = \mu'$, $i = 0$ befriedigt. Somit ist μ' der Parameter jener Krümmungslinie, welche von der geodätischen berührt wird.

Giebt man also ein bestimmtes μ' , so sind dadurch alle unendlich vielen geodätischen Linien gegeben, welche die beiden Zweige der dem Werthe von μ' entsprechenden Krümmungslinie berührend um die Fläche oscilliren, während sie in das ausserhalb dieser Zweige befindliche Flächengebiet nicht eintreten. Giebt man in dem inzwischen liegenden Flächentheile einen Punkt $\mu_0 v_0$, so gehen durch diesen Punkt immer zwei geodätische Linien, deren Ausgangswinkel durch die Gleichung $\operatorname{tg} i = \pm \sqrt{\frac{\mu_0^2 - \mu'^2}{\mu'^2 - v_0^2}}$, die aus (3) folgt, gegeben ist. Es gehen also durch jeden Punkt der Fläche zwei geodätische Linien, die die Krümmungslinie μ' berühren. Nur für den Kreispunkt als Ausgangspunkt wird dieser Winkel unbestimmt, da $\mu_0 = \mu' = v_0 = h$ ist; somit kann man durch ihn unendlich viele Linien unter beliebigen Winkeln ziehen, welche bekanntlich insgesamt durch den gegenüberliegenden laufen.

Soll die geodätische Linie reell sein, so muss, wie man aus dem Radikale M sieht, entweder $k > \mu' > h$ oder $h > \mu' > 0$ sein. Im einen Falle berührt sie eine Krümmungslinie des ersten, im andern

*) Salmon-Fiedler: Raumgeometrie II. Theil, pag. 162.

**) Journal des Mathématiques, t. 9, Serie I, pag. 403.

Fälle eine des zweiten Systems. Den Uebergang vom *ersten* zum *zweiten System geodätischer Linien* (diese Unterscheidung wollen wir in Zukunft beibehalten) bildet dann die Linie durch die Kreispunkte. Wir setzen für das folgende voraus, μ' liege zwischen k und h .

§ 2.

Einführung der hyperelliptischen ϑ -Functionen.

Löst man die Gleichungen (1) nach x, y, z auf, so erhält man die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes auf dem Ellipsoide durch elliptische Coordinaten μ und ν ausgedrückt, in der Form:

$$(4)^*) \quad \begin{cases} x = \frac{\sigma}{hk} \cdot \mu \cdot \nu, \\ y = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{\sigma^2 - h^2}{k^2 - h^2}} \sqrt{(\mu^2 - h^2)(h^2 - \nu^2)}, \\ z = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\sigma^2 - k^2}{k^2 - h^2}} \sqrt{(k^2 - \mu^2)(k^2 - \nu^2)}. \end{cases}$$

Bringt man damit die durch die Gleichung (2) zwischen μ und ν gegebene Relation in Verbindung, so sind dies die Coordinaten eines Punktes der geodätischen Linie. Nimmt man nun mit Weierstrass**) zu der Gleichung (2) noch eine ähnlich gebildete

$$(5) \quad \int_{\mu^2}^{\mu^2} \frac{d(\mu^2)}{M} \pm \int_{\nu^2}^{\nu^2} \frac{d(\nu^2)}{N} = u$$

hinzu, wo $u = - \int \frac{ds}{(\sigma^2 - \mu^2)(\sigma^2 - \nu^2)}$ und ds das Bogendifferential der geodätischen Linie bedeutet, so ist u für die Punkte der geodätischen Linie variabel, und man kann auf (2) und (5) die Jacobi'sche Umkehr anwenden. Um die fernerer Entwicklungen mit den von Rosenhain***) gegebenen Formeln direct in Einklang zu bringen, wenden wir auf diese beiden Gleichungen die Substitution an

$$\begin{aligned} \mu^2 = \nu^2 = k^2 \frac{1 - \lambda^2 x}{1 - \varrho^2 x}, \quad \kappa^2 = \frac{\sigma^2 - h^2}{k^2 - h^2} \cdot \frac{k^2 - \mu'^2}{\sigma^2 - \mu'^2}; \quad \lambda^2 = \frac{k^2 - \mu'^2}{\sigma^2 - \mu'^2} \cdot \frac{\alpha^2}{k^2}, \\ \varrho^2 = \frac{k^2 - \mu'^2}{\sigma^2 - \mu'^2}, \end{aligned}$$

wodurch die Gleichungen (2) und (5) übergehen in:

*) Liouville. Note III zu Monge's Application etc. pag. 581.

**) Weierstrass a. a. O. pag. 994.

***) Rosenhain: Mémoires des savants étrangers. t. 11.

$$(6) \quad \begin{cases} \int_0^{x_1} \frac{1 - \varrho^2 x_1}{V X_1} dx_1 \pm \int_1^{\frac{x_2}{x^2}} \frac{1 - \varrho^2 x_2}{V X_2} dx_2 = u, \\ \int_0^{x_1} \frac{dx_1}{V X_1} \pm \int_1^{\frac{x_2}{x^2}} \frac{dx_2}{V X_2} = u', \end{cases}$$

wo $X = x(1-x)(1-\kappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\varrho^2 x)$ ist, während die Gleichungen (4) die Form annehmen:

$$(7) \quad \begin{cases} x^2 = a_1 \frac{(1 - \lambda^2 x_1)(1 - \lambda^2 x_2)}{(1 - \varrho^2 x_1)(1 - \varrho^2 x_2)}, \\ y^2 = -a_2 \frac{(1 - \kappa^2 x_1)(1 - \kappa^2 x_2)}{(1 - \varrho^2 x_1)(1 - \varrho^2 x_2)}, \\ z^2 = a_3 \frac{x_1 x_2}{(1 - \varrho^2 x_1)(1 - \varrho^2 x_2)}. \end{cases}$$

a_1, a_2, a_3 sind leicht zu bestimmende Constante.

Schreibt man jetzt die ersten 5 Formeln der von Rosenhain a. a. O. pag. 422 gegebenen Formeltafel in die bequemere Riemann'sche Bezeichnungsweise um, so hat man:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a)} \quad \kappa \lambda \varrho x_1 x_2 = \frac{\vartheta^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (v|w)}{\vartheta^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (v|w)}, \\ \text{b)} \quad -\frac{\kappa \lambda \varrho}{\kappa_1 \lambda_1 \varrho_1} (1 - x_1)(1 - x_2) = \frac{\vartheta^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (v|w)}{\vartheta^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (v|w)}, \\ \text{c)} \quad -\frac{\lambda \varrho}{\kappa_1 \lambda_\kappa \varrho_\kappa} (1 - \kappa^2 x_1)(1 - \kappa^2 x_2) = \frac{\vartheta^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (v|w)}{\vartheta^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (v|w)}, \\ \text{d)} \quad \frac{\kappa \varrho}{\lambda_1 \varrho_\lambda \lambda_\kappa} (1 - \lambda^2 x_1)(1 - \lambda^2 x_2) = \frac{\vartheta^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (v|w)}{\vartheta^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (v|w)}, \\ \text{e)} \quad \frac{\kappa \lambda}{\varrho_1 \varrho_\kappa \varrho_\lambda} (1 - \varrho^2 x_1)(1 - \varrho^2 x_2) = \frac{\vartheta^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (v|w)}{\vartheta^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (v|w)}, \end{array} \right.$$

und wenn man diese symmetrischen Functionen von x_1, x_2 in die Gleichungen (7) einführt, so folgt:

$$(9) \quad \begin{cases} x = \sqrt{\sigma^2} \sqrt[4]{\frac{\sigma^2 \mu'^2}{h^2 k^2}} \cdot \frac{\vartheta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (v|w)}{\vartheta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (v|w)}, \\ y = \sqrt{\sigma^2 - h^2} \sqrt[4]{\frac{(\sigma^2 - h^2)(\mu'^2 - h^2)}{h^2(k^2 - h^2)}} \cdot \frac{\vartheta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (v|w)}{\vartheta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (v|w)}, \\ z = \sqrt{\sigma^2 - k^2} \sqrt[4]{\frac{(\sigma^2 - k^2)(k^2 - \mu'^2)}{k^2(k^2 - h^2)}} \cdot \frac{\vartheta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (v|w)}{\vartheta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (v|w)}, \end{cases}$$

welche Gleichungen bis auf die Bezeichnung mit denen von Weierstrass a. a. O. erhaltenen übereinstimmen. Die ϑ -Functionen sind hier definiert durch die Gleichung:

$$\vartheta \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} p \begin{pmatrix} m + \frac{h_1}{2} \\ n \end{pmatrix} \cdot q \begin{pmatrix} n + \frac{h_2}{2} \end{pmatrix} \cdot e^{2 \left(m + \frac{h_1}{2} \right) \left(n + \frac{h_2}{2} \right) a_{1,2}} \cdot \cos \Omega_{m,n}^*,$$

$$\Omega_{m,n} = 2 \left(m + \frac{h_1}{2} \right) \left(v - \frac{g_1}{2} \right) \pi + 2 \left(n + \frac{h_2}{2} \right) \left(w - \frac{g_2}{2} \right) \pi,$$

während die seit Richelot gebräuchlichen Bezeichnungen $\lambda_1^2 = 1 - \lambda^2$, $\lambda_2^2 = \kappa^2 - \lambda^2$ etc. verwendet sind. Sollen nun die Gleichungen (9) die Coordinaten eines Punktes der geodätischen Linie darstellen, so müssen v und w linear abhängig sein von der Constanten u' und der Variablen u ; man muss also haben:

$$(10) \quad \begin{cases} v = \beta_{1,1} u + \beta_{1,2} u', \\ w = \beta_{2,1} u + \beta_{2,2} u'. \end{cases}$$

Die hier auftretenden Constanten sowie die Constanten $p, q, e^{\pm 2a_{1,2}}$ der ϑ -Functionen müssen nun noch passend bestimmt werden. Ist dieses geschehen, so sind v und w nur mehr von der einen Variablen u abhängig, und wenn u von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft, so geben die Gleichungen (9) sämtliche Punkte der geodätischen Linie.

§ 3.

Constantenbestimmung.

Die vier Constanten $\beta_{1,1}, \beta_{1,2}, \beta_{2,1}, \beta_{2,2}$ sind von Weierstrass durch die Periodicitätsmoduln der Integrale, die in den Gleichungen (2) und (5) auftreten, ausgedrückt. Diese Bestimmung kann jedoch durch eine für numerische Rechnung zweckmässigere ersetzt werden. Die Berechnung der erwähnten Moduln auf dem Wege der Quadratur

*) Vergl. Thomae: Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung von elliptischen und Rosenhain'schen Functionen gebraucht werden, pag. 9, Formel 101a und Weierstrass a. a. O. pag. 994 und 995.

erfordert nämlich schon in günstigen Fällen eine grosse Gliederzahl. Wir drücken sie daher durch Quotienten von ϑ -Functionen mit verschwindenden Argumenten aus, indem wir uns eines in dem Werke von Clebsch und Gordan: „Theorie der Abel'schen Functionen“ pag. 331 ausgesprochenen Gedankens bedienen.

Aus den Gleichungen (6) erhält man nämlich durch Auflösung nach dx_1 und dx_2

$$dx_1 = \frac{V\overline{X_1}}{\varrho^2(x_2 - x_1)} du - \frac{V\overline{X_1}(1 - \varrho^2 x_2)}{\varrho^2(x_2 - x_1)} du',$$

$$dx_2 = \frac{V\overline{X_2}}{\varrho^2(x_1 - x_2)} du - \frac{V\overline{X_2}(1 - \varrho^2 x_1)}{\varrho^2(x_1 - x_2)} du'.$$

Differentiirt man jetzt die Gleichungen a) und c) in (8), führt für die auftretenden Differentiale dx_1 , dx_2 die obigen Werthe ein und setzt dann $x_1=0$, $x_2=\frac{1}{\kappa^2}$, d. h. $v=w=0$, so gewinnt man die Formeln:

$$\frac{\vartheta' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_v}{\vartheta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} dv + \frac{\vartheta' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_w}{\vartheta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} dw = \frac{1}{2} \frac{\kappa}{\varrho} \sqrt{\frac{\kappa \lambda}{\varrho}} du - \frac{1}{2} \frac{\varrho \kappa^2}{\varrho} \sqrt{\frac{\lambda}{\kappa \cdot \varrho}} du',$$

$$\frac{\vartheta' \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_v}{\vartheta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} dv + \frac{\vartheta' \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_w}{\vartheta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} dw = \frac{1}{2 \varrho^2} \sqrt{\lambda \varrho \kappa_1 \lambda_x \varrho_x} du - \frac{1}{2 \varrho^2} \sqrt{\lambda \varrho \kappa_1 \lambda_x \varrho_x} du';$$

hierin ist $\vartheta \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix}_v$ der Werth, welchen die nach v gebildete Abgeleitete von $\vartheta \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix}(v|w)$ annimmt, wenn man $v=w=0$ setzt, während $\vartheta \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix}$ für $\vartheta \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix}(0|0)$ gesetzt wurde.

Löst man diese Gleichungen nach dv und dw auf und vergleicht die Coefficienten von du , du' mit denen der Differentialquotienten der Gleichungen (10), so erhält man:

$$(11) \quad \begin{cases} \beta_{1,1} = \frac{1}{\Delta} \sqrt{\frac{\lambda}{\varrho^3}} \left\{ \sqrt{\kappa_1 \lambda_x \varrho_x} \vartheta' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_w - \sqrt{\kappa^3} \vartheta' \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_w \right\}, \\ \beta_{1,2} = \frac{1}{\Delta} \sqrt{\frac{\varrho_x \lambda}{\varrho^3}} \left\{ \sqrt{\frac{\varrho^3}{\kappa}} \vartheta' \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_w - \sqrt{\kappa_1 \lambda_x} \vartheta' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_w \right\}, \\ \beta_{2,1} = \frac{1}{\Delta} \sqrt{\frac{\lambda}{\varrho^3}} \left\{ \sqrt{\kappa^3} \vartheta' \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_v - \sqrt{\kappa_1 \lambda_x \varrho_x} \vartheta' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_v \right\}, \\ \beta_{2,2} = \frac{1}{\Delta} \sqrt{\frac{\varrho_x \lambda}{\varrho^3}} \left\{ \sqrt{\kappa_1 \lambda_x} \vartheta' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_v - \sqrt{\frac{\varrho^3}{\kappa}} \vartheta' \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_v \right\}. \end{cases}$$

Δ hat den Werth $2 \frac{\vartheta' \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_w \vartheta' \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_v - \vartheta' \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_v \vartheta' \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_w}{\vartheta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$. Dieser Werth

lässt sich noch für die Rechnung bequemer gestalten, wenn man die bekannte Formel

$$\begin{aligned} & \vartheta' \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_v \vartheta' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_w - \vartheta' \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_w \vartheta' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_v \\ &= -\pi^2 \vartheta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vartheta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vartheta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vartheta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} *) \text{ benützt} \end{aligned}$$

und $\vartheta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\vartheta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit den von Rosenhain a. a. O. pag. 418 gegebenen Formeln durch κ , λ , ϱ ausdrückt. Man erhält dann näm-

lich: $\Delta = -2\pi^2 \vartheta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^3 \frac{\varrho}{\lambda_1 \varrho_\kappa} \sqrt{\frac{\kappa_1 \varrho_1 \lambda_\kappa \varrho_\lambda}{\lambda}}$. Um aus diesen Formeln

die Constanten β zu berechnen, ist, wie man sieht, nur die Kenntniss von p , q , $e^{\pm a_{12}}$ nöthig.**) Diese kann man auf ähnliche Weise finden, wie man in der Theorie der elliptischen Functionen aus dem Modul κ den Werth von q bestimmt. Aus den 9 Gleichungen, die Rosenhain pag. 418 seiner schon öfters erwähnten Abhandlung angiebt, und welche die Beziehungen zwischen den Moduln κ , λ , ϱ und den ϑ -Quotienten mit verschwindenden Argumenten bestimmen, wählen wir diejenigen drei aus, in welche p , q und $e^{\pm 2a_{12}}$ nur in ganzzahligen Potenzen eingehen. Zieht man aus diesen die positiven vierten Wurzeln und setzt sie in unsere Bezeichnungsweise um, so lauten dieselben:

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\vartheta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{\vartheta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \sqrt[4]{\frac{\kappa_1^2 \varrho_1^2}{\lambda_1^2}} = \alpha, \\ \frac{\vartheta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{\vartheta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \sqrt[4]{\frac{\kappa^2 \varrho_1^2 \varrho_\lambda^2}{\lambda^2 \varrho_\kappa^2}} = \beta, \\ \frac{\vartheta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{\vartheta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \sqrt[4]{\frac{\kappa^2 \kappa_1^2 \varrho_\lambda^2}{\lambda^2 \lambda_1^2 \varrho_\kappa^2}} = \gamma. \end{cases}$$

*) Thomae a. a. O., p. 17, Formel 146, und Rosenhain a. a. O., p. 433.

**) Die von Thomae a. a. O., p. 12 angegebenen und p. 19 entwickelten Formeln zur Berechnung von p , q , $e^{\pm a_{12}}$ konnten nicht benützt werden, da sie mir nicht richtig zu sein scheinen. In den dort angegebenen Anfangsgliedern der ϑ -Reihen müssen nämlich statt der Glieder

$$2rp^3 = 2p^4 q (e^{2a_{12}} + e^{-2a_{12}}) \quad \text{und} \quad 2rq^3 = 2pq^4 (e^{2a_{12}} + e^{-2a_{12}})$$

die Glieder

$$2p^4 q (e^{4a_{12}} + e^{-4a_{12}}) \quad \text{und} \quad 2pq^4 (e^{4a_{12}} + e^{-4a_{12}})$$

stehen. Hierdurch werden aber die Formeln pag. 17 wesentlich geändert.

Setzt man in den ϑ -Functionen $e^{2a_1} + e^{-2a_1} = r$, so sind die Anfangsglieder derselben, welche für unsere späteren Zwecke genügen:

$$(13) \quad \begin{cases} \vartheta \begin{pmatrix} 00 \\ 00 \end{pmatrix} = 1 + 2p + 2q + 2pqr + 2p^4 + 2q^4 + 2(pq^4 + p^4q)(r^2 - 2) + \dots, \\ \vartheta \begin{pmatrix} 00 \\ 10 \end{pmatrix} = 1 - 2p + 2q - 2pqr + 2p^4 + 2q^4 - 2(pq^4 - p^4q)(r^2 - 2) + \dots, \\ \vartheta \begin{pmatrix} 00 \\ 11 \end{pmatrix} = 1 - 2p - 2q + 2pqr + 2p^4 + 2q^4 - 2(pq^4 + p^4q)(r^2 - 2) + \dots, \\ \vartheta \begin{pmatrix} 00 \\ 01 \end{pmatrix} = 1 + 2p - 2q - 2pqr + 2p^4 + 2q^4 + 2(pq^4 - p^4q)(r^2 - 2) + \dots. \end{cases}$$

Bildet man hieraus und aus (12) mit Thomae die Gleichungen:

$$(14) \quad \begin{cases} p_0 = \frac{1}{2} \frac{1 - \alpha - \beta + \gamma}{1 + \alpha + \beta + \gamma} = p + pq^4(r^2 - 2), \\ q_0 = \frac{1}{2} \frac{1 + \alpha - \beta - \gamma}{1 + \alpha + \beta + \gamma} = q + qp^4(r^2 - 2), \\ r_0 = \frac{1}{2} \frac{1 - \alpha + \beta - \gamma}{1 + \alpha + \beta + \gamma} = pqr, \end{cases}$$

so folgt, wenn man noch $q^1 - p^4$ vernachlässigt*), leicht:

$$(15) \quad \begin{cases} p = \frac{p_0 q_0}{q_0^2 + p_0^2 r_0^2}, \\ q = \frac{q_0^3}{q_0^2 + p_0^2 r_0^2}, \\ r = \frac{r_0}{pq}. \end{cases}$$

Bestimmt man hieraus den Werth von r , so ergibt sich a_{12} vermöge der Gleichung

$$(16) \quad e^{\pm 2a_{12}} = \frac{r \pm \sqrt{r^2 - 4}}{2};$$

Welcher von den hieraus folgenden reciproken Werthen von a_{12} ge-

nommen werden muss, kann aus dem Quotienten $\frac{\vartheta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (v | w)}{\vartheta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (v | w)}$, der

einerseits nahezu gleich $-\frac{e^{\frac{a_{12}}{2}} + e^{-\frac{a_{12}}{2}}}{\frac{a_{12}}{2} - e^{-\frac{a_{12}}{2}}}$, andererseits gleich $\sqrt[4]{\frac{\pi^2 \lambda_1^2 \vartheta_1^2}{\vartheta_x^2 \vartheta_x^2}}$ ist,

entnommen werden**).

*) Ueber die Gültigkeitsgrenzen dieser Formeln vergl. § 4.

**) Vergl. Thomae a. a. O. pag. 13.

§ 4.

Numerische Berechnung einer geodätischen Linie.

Die in Gleichung (2) auftretende Constante u' kann dadurch bestimmt werden, dass man die geodätische Linie durch einen bestimmten Punkt der xy -Ebene gehen lässt. Seine elliptischen Coordinaten sind dann $\mu = k$, $v = v_0$. Dann ist

$$u' = \int_k^{v_0} \frac{(\sigma^2 - v^2) d(v^2)}{N}.$$

Diese Constante verschwindet, wenn man v_0 mit k , d. h. den Anfangspunkt der geodätischen Linie mit dem einen Endpunkte der grossen Axe zusammenfallen lässt. Hierdurch wird die Gestalt der Linie nicht particularisirt, während die Rechnung sich vereinfacht, indem $v = \beta_{1,1}u$, $w = \beta_{2,1}u$ wird; deshalb sei für das Folgende diese Voraussetzung gemacht. In den Gleichungen (6) ist dann das untere Zeichen zu nehmen, und μ' liegt zwischen k und h . Für die numerische Rechnung bediente ich mich des Axenverhältnisses

$$\sigma^2 : (\sigma^2 - h^2) : (\sigma^2 - k^2) = \sqrt{3} : \sqrt{2} : \sqrt{1}.$$

Was die in § 2 gebrauchte Substitution anlangt, so sind für ihre Wahl drei Gesichtspunkte massgebend: einmal muss man trachten, die Werthe p , q , r und namentlich den letzten, welcher eine rasche Convergenz der ϑ -Reihe am meisten beeinträchtigt, möglichst klein zu machen, dann sind diejenigen ϑ -Functionen zu vermeiden, welche vermöge ihrer Bildung mehr Glieder beanspruchen, das sind die Reihen mit der Charakteristik $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix}$, und endlich muss man suchen, für u und u' reelle Werthe zu erhalten. Diese drei Bedingungen erfüllt die oben gewählte Substitution für Werthe von μ'^2 zwischen $\mu'^2 = \frac{1}{2}(k^2 + h^2)$ und $\mu'^2 = k^2$, während man für Werthe zwischen den Grenzen $\mu'^2 = h^2$ und $\mu'^2 = \frac{1}{2}(k^2 + h^2)$ besser

$$\mu^2 = v^2 = \frac{h^2 \mu'^2}{\mu'^2 - (\mu'^2 - h^2)x}$$

wählen wird. Begnügt man sich dann mit einer Genauigkeit von 4 Decimalen, so genügt die Gliederzahl in den Gleichungen (13) und die für die Rechnung nöthigen Anfangsglieder der ϑ -Functionen und ihrer Differentialquotienten sind folgende:

$$(17) \left\{ \begin{aligned} \vartheta \begin{pmatrix} 01 \\ 00 \end{pmatrix} (v|w) &= 2 \left\{ q^{\frac{1}{4}} \cos w\pi + q^{\frac{9}{4}} \cos 3w\pi \right. \\ &\quad + p q^{\frac{1}{4}} (e^{-a_{1,2}} \cos(2v-w)\pi + e^{a_{1,2}} \cos(2v+w)\pi) \\ &\quad \left. + p q^{\frac{9}{4}} (e^{-3a_{1,2}} \cos(2v-3w)\pi + e^{3a_{1,2}} \cos(2v+3w)\pi) + \dots \right\}, \\ \vartheta \begin{pmatrix} 01 \\ 01 \end{pmatrix} (v|w) &= 2 \left\{ q^{\frac{1}{4}} \sin w\pi - q^{\frac{9}{4}} \sin 3w\pi \right. \\ &\quad - p q^{\frac{1}{4}} (e^{-a_{1,2}} \sin(2v-w)\pi - e^{a_{1,2}} \sin(2v+w)\pi) \\ &\quad \left. + p q^{\frac{9}{4}} (e^{-3a_{1,2}} \sin(2v-3w)\pi - e^{3a_{1,2}} \sin(2v+3w)\pi) + \dots \right\}, \\ \vartheta \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix} (v|w) &= 2 \left\{ p^{\frac{1}{4}} \sin v\pi - p^{\frac{9}{4}} \sin 3v\pi \right. \\ &\quad - p^{\frac{1}{4}} q (e^{-a_{1,2}} \sin(v-2w)\pi + e^{a_{1,2}} \sin(v+2w)\pi) \\ &\quad \left. + p^{\frac{9}{4}} q (e^{-3a_{1,2}} \sin(3v-2w)\pi + e^{3a_{1,2}} \sin(3v+2w)\pi) + \dots \right\}, \\ \vartheta \begin{pmatrix} 00 \\ 00 \end{pmatrix} (v|w) &= 1 + 2p \cos 2v\pi + 2q \cos 2w\pi \\ &\quad + 2pq (e^{-2a_{1,2}} \cos 2(v-w)\pi + e^{2a_{1,2}} \cos 2(v+w)\pi) + \dots; \end{aligned} \right.$$

$$(18) \left\{ \begin{aligned} \vartheta' \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix}_v &= 2\pi \left\{ p^{\frac{1}{4}} - 3p^{\frac{9}{4}} - p^{\frac{1}{4}} q (e^{-a_{1,2}} + e^{a_{1,2}}) + 3p^{\frac{9}{4}} q (e^{-3a_{1,2}} + e^{3a_{1,2}}) + \dots \right\}, \\ \vartheta' \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix}_w &= 4\pi \left\{ p^{\frac{1}{4}} q (e^{-a_{1,2}} - e^{a_{1,2}}) + p^{\frac{9}{4}} q (e^{-3a_{1,2}} - e^{3a_{1,2}}) + \dots \right\}, \\ \vartheta' \begin{pmatrix} 01 \\ 01 \end{pmatrix}_v &= 4\pi \left\{ -p q^{\frac{1}{4}} (e^{-a_{1,2}} - e^{a_{1,2}}) + p q^{\frac{1}{4}} (e^{-3a_{1,2}} - e^{3a_{1,2}}) - \dots \right\}, \\ \vartheta' \begin{pmatrix} 01 \\ 01 \end{pmatrix}_w &= 2\pi \left\{ q^{\frac{1}{4}} - 3q^{\frac{9}{4}} + p q^{\frac{1}{4}} (e^{-a_{1,2}} + e^{a_{1,2}}) - 3p q^{\frac{9}{4}} (e^{-3a_{1,2}} + e^{3a_{1,2}}) + \dots \right\}. \end{aligned} \right.$$

Wählt man endlich die specielle geodätische Linie, die für

$$\mu'^2 = \frac{1}{2} (k^2 + h^2)$$

resultirt, so ergeben sich folgende Zahlenwerthe für die Constanten:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= 1,7320 \cdot 5, & \mu'^2 &= 0,5249 \cdot 4, & \kappa^2 &= 0,5857 \cdot 8, \\ k^2 &= 0,7320 \cdot 5, & & & \lambda^2 &= 0,4059 \cdot 4, \\ h^2 &= 0,3178 \cdot 3, & & & \varrho^2 &= 0,1715 \cdot 7. \end{aligned}$$

Die Formeln (12) und (13) ergeben dann die Werthe

$$\alpha = 0,8717 \cdot 8,$$

$$\beta = 0,9068 \cdot 8,$$

$$\gamma = 0,8686 \cdot 4,$$

und diese liefern mittelst der Formeln (14) und (15)

$$p_0 = 0,0123 \cdot 3, \quad p = 0,0123 \cdot 2,$$

$$q_0 = 0,0131 \cdot 9, \quad q = 0,0131 \cdot 9,$$

$$r_0 = 0,0228 \cdot 1, \quad r = 140,3160.$$

Die Formel (16) lässt hieraus $\log e^{+2a_1} = 7,85291^*)$ und $\log e^{-2a_2} = 2,14709$ folgen.

Mit diesen Werthen erhält man aus den Gleichungen (18)

$$\log \vartheta' \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix}_v = 0,25147,$$

$$\log \vartheta' \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix}_w = 9,80319,$$

$$\log -\vartheta' \begin{pmatrix} 01 \\ 01 \end{pmatrix}_v = 9,77984,$$

$$\log \vartheta' \begin{pmatrix} 01 \\ 01 \end{pmatrix}_w = 0,38357,$$

$$\log (-\Delta) = 0,97533.$$

Hieraus fließen mittelst der Gleichungen (11) die Werthe

$$\beta_{1,1} = 0,4288 \cdot 3,$$

$$\beta_{2,1} = 0,3648 \cdot 3,$$

Die Werthe von $\beta_{1,2}$ und $\beta_{2,2}$ können im vorliegenden Falle entbehrt werden, da $u' = 0$ ist. Die Logarithmen der in den Formeln (9) auftretenden Constanten sind dann der Reihe nach:

$$\log \sqrt{\sigma^2} \sqrt[4]{\frac{\sigma^2 \mu'^2}{k^2 h^2}} = 0,26726,$$

$$\log \sqrt{\sigma^2 - h^2} \sqrt[4]{\frac{(\sigma^2 - h^2)(\mu'^2 - h^2)}{h^2(k^2 - h^2)}} = 0,16208,$$

$$\log \sqrt{\sigma^2 - k^2} \sqrt[4]{\frac{(\sigma^2 - k^2)(k^2 - \mu'^2)}{k^2(k^2 - h^2)}} = 9,95861.$$

Mit diesen Constanten können nun zu jedem Werthe von u die Coordinaten x, y, z mittelst der Gleichungen (9) und (17) berechnet werden. Die folgende Tafel ist jedoch so angelegt, dass der eine Winkel v als unabhängige Veränderliche genommen und mittelst der aus (10) und der Bedingung $u' = 0$ folgenden Relation $\beta_{1,1} w = \beta_{2,1} v = 0$ der

*) Die Logarithmen sind sämmtlich Briggsche.

zugehörige Werth von w berechnet wurde. Der Vollständigkeit halber sind die entsprechenden Werthe von u ebenfalls notirt.

Die mit * bezeichneten Punkte sind die Berührungspunkte der geodätischen Linie mit der Krümmungslinie μ' . Da für sie $x_1 = 1$ sein muss, so erhält man die ihnen entsprechenden Werthe von u , indem man beachtet, dass in Gleichung (8) b) $\vartheta \begin{pmatrix} 10 \\ 01 \end{pmatrix} (v|w)$ verschwindet.

u	$v\pi$	$w\pi$	x	y	z
0	0	0	1,3160.7	0	0
0,2591.1	20°	17°,015	1,2641.8	0,2135.7	0,2121.7
0,5182.1	40	34,030	1,1052.5	0,4221.7	0,4107.0
0,7773.2	60	51,044	0,8352.2	0,6136.1	0,5752.1
1,1094.7*	85,636	72,855	0,3469.3	0,7990.4	0,6921.2
1,2955.3	100	85,074	0,0336.5	0,8667.4	0,6947.0
1,5546.4	120	102,09	−0,3951.5	0,8623.0	0,6197.1
1,8137.5	140	119,11	−0,7623.4	0,7909.5	0,4712.8
2,0728.9	160	136,12	−1,0342.9	0,6562.6	0,2790.6
2,3319.5	180	153,13	−1,2031.7	0,4747.5	0,0694.8
2,5910.6	200	170,15	−1,2717.3	0,2572.4	−0,1393.6
2,8501.9	220	187,16	−1,2406.9	0,0101.9	−0,3335.2
3,1092.9	240	204,18	−1,1059.2	−0,2581.1	−0,4967.4
3,3847.6*	261,27	222,27	−0,8477.4	−0,5458.3	−0,6119.5
3,6275.0	280	238,21	−0,5363.0	−0,7712.8	−0,6424.7
3,8866.4	300	255,22	−0,1536.0	−0,9474.6	−0,5930.4
4,1457.3	320	272,24	0,2307.7	−0,0308.8	−0,4667.4
4,4048.0	340	289,25	0,5747.2	−1,0144.2	−0,2887.9
4,6638.9	360	306,26	0,8439.6	−0,9065.2	−0,0877.6
4,9230.0	380	323,28	1,0361.4	−0,7189.5	0,1139.4
5,1822.9	400	340,30	1,1446.6	−0,4691.4	0,2964.6
5,4412.5	420	357,32	1,1652.4	−0,1654.4	0,4435.2
5,7551.4*	444,23	377,93	1,0666.7	0,2434.0	0,5488.2
5,9595.0	460	391,35	0,9310.0	0,5089.1	0,5625.6
6,2185.7	480	408,36	0,6897.2	0,8091.3	0,5123.1
6,4777.1	500	425,37	0,3940.4	1,0337.1	0,3934.3

§ 5.

Specielle Fälle.

Für den speciellen Fall $\mu' = k$ fällt die geodätische Linie mit dem Hauptschnitt in der xy -Ebene zusammen. Denn je mehr sich μ' dem Werthe k nähert, desto mehr rücken die beiden Aeste der Krümmungslinie von zwei Seiten an den Hauptschnitt heran, und da die geodätische Linie das Gebiet zwischen diesen Aesten nicht überschreitet, so muss sie in der Grenzlage mit dem Hauptschnitte selbst zusammenfallen; die Gleichung (2) geht dann in die Summe aus einem elliptischen Integral 3. Gattung und einer Constanten über. Aehnliches gilt für den Hauptschnitt der yz -Ebene.

Für $\mu' = h$ hingegen erhält man, wie bereits erwähnt, sämtliche durch die Kreispunkte gehende Linien, während Gleichung (2) in die Summe zweier elliptischer Integrale 3. Gattung übergeht. In der bereits in der Einleitung erwähnten Arbeit von Rohn*) wird nun diese Gleichung weiter behandelt, und schliesslich finden sich die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der Kreispunktslinie durch elliptische Functionen zweier Parameter ausgedrückt, die mit einander durch eine Gleichung verbunden sind. Nun lassen sich aber diese Coordinaten, wie im allgemeinen Falle, direct durch Functionen eines einzigen Parameters darstellen, wenn man sich ähnlicher Formeln bedient, wie sie Rosenhain im Eingang seiner Schrift bezüglich der Transscendenten 3. Gattung entwickelte**). Diese Formeln will ich im Folgenden angeben, da sie in engem Zusammenhang mit unsern Formeln einer allgemeinen geodätischen Linie stehen und auch für die Rechnung von Vortheil sein dürften.

Für $\mu' = h$ wird Gleichung (2)

$$\int_{\mu_0}^{\mu} \frac{(\sigma^2 - \mu^2) d(\mu^2)}{\mu^2 - h^2 M_h} - \int_0^{\nu} \frac{(\sigma^2 - \nu^2) d(\nu^2)}{(h^2 - \nu^2) N_h} = 0.$$

Hiebei bedeutet $\mu = \mu_0$ den Parameter des Schnittpunktes der Linie mit der yz -Ebene, während $M_h^2 = (\sigma^2 - \mu^2)(k^2 - \mu^2)\mu^2$ und $N_h^2 = (\sigma^2 - \nu^2) \cdot (k^2 - \nu^2)\nu^2$ ist. Setzt man in dieser Gleichung $\mu^2 = k^2 x_1$, $\nu^2 = k^2 x_2$, so geht sie über in:

*) Die erste Arbeit, in welcher Formeln zur Berechnung einer solchen Linie aufgestellt werden, mag wohl eine aus dem Nachlasse von Jacobi durch Luther in Schumachers astronomischen Nachrichten Bd. 41, pag. 210 publicirte Abhandlung sein.

**) Rosenhain a. a. O. pag. 376 bis 380.

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{(1 - \kappa^2 x_1) dx_1}{(1 - \lambda^2 x_1) \sqrt{X_1}} + \int_0^{x_2} \frac{(1 - \kappa^2 x_2) dx_2}{(1 - \lambda^2 x_2) \sqrt{X_2}} = 0,$$

$$X = x(1-x)(1-\kappa^2 x); \quad \kappa^2 = \frac{k^2}{\sigma^2}; \quad \lambda^2 = \frac{k^2}{h^2}; \quad \mu_0 = \kappa^2 x_0.$$

Verbindet man hiermit die Gleichung

$$\int_0^{x_1} \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \int_0^{x_2} \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} = u_1 + u_2 = u,$$

setzt $x_0 = \sin \text{ am } u'$, $\lambda^2 = \sin^2 \text{ am } \varepsilon$ und bedient sich im Folgenden der bekannten Indicesbezeichnung der vier elliptischen ϑ -Functionen*), so erhält man leicht die Gleichung:

$$(u-u') \frac{\vartheta_3'(\varepsilon)}{\vartheta_3(\varepsilon)} + \frac{1}{2} \log \frac{\vartheta_1(u_1 - \varepsilon) \vartheta_1(u_2 - \varepsilon) \vartheta_1(u' + \varepsilon)}{\vartheta_1(u_1 + \varepsilon) \vartheta_1(u_2 + \varepsilon) \vartheta_1(u' - \varepsilon)} + \frac{i\pi}{2} = 0^{**}.$$

Hieraus folgt, wenn man zur Abkürzung $(u-u') \frac{\vartheta_3'(\varepsilon)}{\vartheta_3(\varepsilon)} = v$ und $\frac{\vartheta_1(u' + \varepsilon)}{\vartheta_1(u' - \varepsilon)} = \varrho$ setzt,

$$e^{2v} = -\varrho \frac{\vartheta_1(u_1 - \varepsilon) \vartheta_1(u_2 - \varepsilon)}{\vartheta_1(u_1 + \varepsilon) \vartheta_1(u_2 + \varepsilon)}.$$

Wendet man nun auf diese Gleichung die Additionsformeln an, oder transformirt man kürzer die von Rosenhain pag. 379 unter Nr. 27 und 380 unter Nr. 28 gegebenen Formeln, indem man daselbst $a = \varepsilon + iK'$ und statt e^{-v} überall $-\varrho e^{-v}$ setzt, so folgen die Formeln:

$$\kappa \sqrt{x_1 x_2} = \frac{\vartheta_1(\varepsilon)}{\vartheta(\varepsilon)} \cdot \frac{\varrho e^{-v} \vartheta_1(u - \varepsilon) - e^v \vartheta_1(u + \varepsilon)}{\varrho e^{-v} \vartheta(u - \varepsilon) + e^v \vartheta(u + \varepsilon)},$$

$$\frac{\kappa}{x_1} \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)} = \frac{\vartheta_2(\varepsilon)}{\vartheta(\varepsilon)} \cdot \frac{\varrho e^{-v} \vartheta_2(u - \varepsilon) - e^v \vartheta_2(u + \varepsilon)}{\varrho e^{-v} \vartheta(u - \varepsilon) + e^v \vartheta(u + \varepsilon)},$$

$$\frac{1}{x_1} \sqrt{(1-\kappa^2 x_1)(1-\kappa^2 x_2)} = \frac{\vartheta_3(\varepsilon)}{\vartheta(\varepsilon)} \cdot \frac{\varrho e^{-v} \vartheta_3(u - \varepsilon) - e^v \vartheta_3(u + \varepsilon)}{\varrho e^{-v} \vartheta(u - \varepsilon) + e^v \vartheta(u + \varepsilon)},$$

$$\sqrt{-(1-\lambda^2 x_1)(1-\lambda^2 x_2)} = \frac{\vartheta(0) \vartheta_2(\varepsilon) \vartheta_3(\varepsilon) \sqrt{\varrho}}{\vartheta_2(0) \vartheta_3(0) \vartheta_1(\varepsilon)} \cdot \frac{2 \vartheta_1(u)}{\varrho e^{-v} \vartheta(u - \varepsilon) + e^v \vartheta(u + \varepsilon)}.$$

Wendet man dann auf die Gleichungen (4) $\mu^2 = v^2 = k^2 x$ an und führt aus obigen Formeln die hiedurch auftretenden symmetrischen Functionen von x_1, x_2 ein, so ergibt sich für die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der geodätischen Linie:

*) Vergl. Jacobi, Werke, neue Ausgabe, Bd. I, pag. 501. Oder Rosenhain a. a. O. pag. 368.

**) Diese Gleichung stimmt bis auf die Bezeichnung mit der von Rohn a. a. O. entwickelten überein.

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\sigma^2}{k^2} \frac{\vartheta_1(\varepsilon)}{\vartheta(\varepsilon)} \frac{\varrho e^{-v} \vartheta_1(u-\varepsilon) - e^v \vartheta_1(u+\varepsilon)}{\varrho e^{-v} \vartheta(u-\varepsilon) + e^v \vartheta(u+\varepsilon)}, \\
 y &= h^2 \sqrt{\frac{\sigma^2 - h^2}{k^2 - h^2}} \frac{\vartheta_2(\varepsilon)}{\vartheta_2(0)} \frac{\vartheta_3(\varepsilon)}{\vartheta_3(0)} \frac{\vartheta(0)}{\vartheta_1(\varepsilon)} \sqrt{\varrho} \frac{2 \vartheta_1(u)}{\varrho e^{-v} \vartheta(u-\varepsilon) + e^v \vartheta(u+\varepsilon)}, \\
 z &= \sqrt{k^2 - h^2} \frac{\vartheta_2(\varepsilon)}{\vartheta(\varepsilon)} \frac{\varrho e^{-v} \vartheta_3(u-\varepsilon) - e^v \vartheta_3(u+\varepsilon)}{\varrho e^{-v} \vartheta(u-\varepsilon) + e^v \vartheta(u+\varepsilon)}.
 \end{aligned}$$

Hierdurch sind, wie im allgemeinen Falle, die rechtwinkligen Coordinaten durch die eine Variable u ausgedrückt.

Eine Vereinfachung erfahren diese Formeln noch, wenn man die Linie durch den Endpunkt der mittleren Axe gehen lässt, wodurch dieselbe nicht specialisirt wird. Dann ist nämlich $u' = K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{X}}$, somit $v = (K - u) \frac{\vartheta_3'(\varepsilon)}{\vartheta_3(\varepsilon)}$ und $\varrho = 1$. Für die in der Formel von y auftretende Constante ergibt sich dann leicht ein vereinfachter Werth, so dass man hat:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\sigma^2}{k} \frac{\vartheta_1(\varepsilon)}{\vartheta(\varepsilon)} \frac{e^{-v} \vartheta_1(u-\varepsilon) - e^v \vartheta_1(u+\varepsilon)}{e^{-v} \vartheta(u-\varepsilon) + e^v \vartheta(u+\varepsilon)}, \\
 y &= h \sqrt{\sigma^2 - h^2} \sqrt{\frac{\sigma \pi}{k h}} \frac{\vartheta_3(\varepsilon)}{\vartheta_3(\varepsilon)} \frac{2 \vartheta_1(u)}{e^{-v} \vartheta(u-\varepsilon) + e^v \vartheta(u+\varepsilon)}, \\
 z &= \sqrt{k^2 - h^2} \frac{\vartheta_2(\varepsilon)}{\vartheta(\varepsilon)} \frac{e^{-v} \vartheta_3(u-\varepsilon) - e^v \vartheta_3(u+\varepsilon)}{e^{-v} \vartheta(u-\varepsilon) + e^v \vartheta(u+\varepsilon)}.
 \end{aligned}$$

§ 6.

Gleichungen für eine Enveloppe geodätischer Linien und Discussion derselben.

An die bereits in der Einleitung erwähnte Bemerkung von Jacobi, dass ein Büschel geodätischer Linien auf positiv gekrümmten Flächen im Allgemeinen eine Enveloppe besitzt, anknüpfend, hat O. Bonnet*) gezeigt, dass dies bei allen geschlossenen positiv gekrümmten Flächen eintreten muss. Auf solchen Flächen sind also dann alle geodätischen Linien nur bis zu einer gewissen Grenze, nämlich bis zum Berührungspunkte mit ihrer gemeinsamen Enveloppe kürzeste Linien. Für das dreiaxige Ellipsoid lässt sich eine solche Enveloppe auf folgende Art durch Gleichungen bestimmen:

Setzt man den Werth der Constanten u' in Gleichung (2) § 1.

*) Sur quelques propriétés des lignes géodésiques. Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris. t. 40, pag. 1311—1313.

dadurch fest, dass man die geodätische Linie durch den Punkt $\mu = \mu_0$, $\nu = \nu_0$ gehen lässt, so nimmt die Gleichung die Gestalt an:

$$(19) \quad \int_{\mu_0^2}^{\mu^2} \frac{d(\mu^2) (\sigma^2 - \mu^2)}{M} \pm \int_{\nu_0^2}^{\nu^2} \frac{d(\nu^2) (\sigma^2 - \nu^2)}{N} = 0.$$

Hier hat man sich des unteren Zeichens zu bedienen, wenn μ und ν zugleich wachsen oder abnehmen, des oberen im Gegenfalle. Da durch den Parameter μ'^2 , der in M und N auftritt, die einzelnen Linien des Büschels mit dem Mittelpunkte μ_0 , ν_0 individualisirt sind, so hätte man obige Gleichung nach μ'^2 zu differentiiren und aus dem Differential und der vorliegenden Gleichung μ'^2 zu eliminiren, um die Gleichung der Enveloppe in elliptischen Coordinaten zu erhalten. Die durch Differentiation resultirende Gleichung ist:

$$(20) \quad \int_{\mu_0^2}^{\mu^2} \frac{(\sigma^2 - \mu^2) d(\mu^2)}{(\mu^2 - \mu'^2) M} \mp \int_{\nu_0^2}^{\nu^2} \frac{(\sigma^2 - \nu^2) d(\nu^2)}{(\mu'^2 - \nu^2) N} = 0,$$

und da eine Elimination natürlich explicite nicht möglich ist, so müssen uns die beiden Gleichungen (19) und (20) miteinander die Curve bestimmen.

Aus dem Büschel geodätischer Linien greifen wir jetzt eine heraus, für welche μ' zwischen den Grenzen $\nu = 0$ und $\nu = h$ liegen möge, dann ist $\nu_0 > \mu'$, und lässt man die Linie von einem Punkte beschreiben, der seine Bewegung in A beginnt, so wird, welche Werthe auch μ durchläuft, das erste Integral in (20) sein Zeichen beibehalten, da es für die angenommenen Grenzen von μ' weder Null noch unendlich werden kann. Setzt man also den Anfangswerth beider Integrale als positiv voraus und lässt den die Linie beschreibenden Punkt von A gegen den Hauptschnitt der mittleren und kleinen Axe emporsteigen, während er sich zugleich dem Hauptschnitte der grossen und kleinen Axe nähert, (in der Pfeilrichtung von A nach B in Fig. 2), so nimmt anfangs μ gegen h und ν gegen 0 ab, die beiden Integrale haben also gleiches, positives Zeichen, und folglich ist in (19) das obere Zeichen zu nehmen. Während nun das erste Integral stets positiv bleibt, wächst das zweite von Null für $\nu = \nu_0$ beginnend bis $+\infty^*$) (für $\nu = \mu'$, Punkt B in Fig 2.), springt in diesem Punkte auf $-\infty$ über und langt in $\nu = \nu_0'$ (Punkt C) mit dem positiven

*) Das Integral wird in Folge des Factors $\frac{1}{(\mu'^2 - \nu^2)^{\frac{3}{2}}}$ für $\nu = \mu'$ unstetig

und zwar von der Ordnung $\frac{3}{2}$, somit wechselt es in diesem Punkte sein Zeichen und springt von $+\infty$ auf $-\infty$ über.

Periodicitätsmodul $J_0 = 2 \int_{\nu_0}^{\mu'} \frac{d(\nu^2) (\sigma^2 - \nu^2)}{(\mu^2 - \mu'^2) N} *)$ an. Hierbei bedeutet

$\nu_0' = \nu_0$ den andern Zweig der Krümmungslinie ν_0 , auf welchem der Ausgangspunkt A nicht liegt.

Zwischen $\nu = \mu'$ und $\nu = \nu_0'$ hat also das zweite Integral negative Werthe; die Gleichung (20) kann also nur für solche Werthe von ν befriedigt werden, welche *nach der Culmination der Linie in $\nu = \mu'$ und vor Erreichung der Krümmungslinie ν_0' liegen*, also liegt der Berührungspunkt X der betreffenden geodätischen Linie mit ihrer Enveloppe zwischen diesen Grenzen.

Unter allen Linien, die von A ausgehen, befindet sich eine, die die Krümmungslinie ν_0 in A berührt, für sie ist also $\mu' = \nu_0$; ich behaupte, ihr Berührungspunkt mit der Enveloppe tritt dann ein, wenn die Linie den zweiten Ast ν_0' der Krümmungslinie tangirt. Denn nimmt man μ' wenig verschieden **) von ν_0 , so liegt, wie eben gezeigt, der Berührungspunkt dieser Linie mit der Enveloppe *nach $\nu = \mu'$ und vor $\nu = \nu_0'$* . Nähert sie sich also der in A tangirenden Geodätischen, so rückt μ' dem $\nu_0' = \nu_0$ unendlich nahe, und folglich nähert sich der Berührungspunkt X zugleich mit dem Punkte B immer mehr dem Punkte C auf der Krümmungslinie ν_0' , um in der Grenze mit ihm auf ν_0' zusammenzufallen. Das Gleiche gilt natürlich auch für jene geodätische Linie des Büschels, welche in A die Krümmungslinie $\mu = \mu_0$ berührt; ihr Berührungspunkt mit der Enveloppe tritt dann ein, wenn die geodätische Curve den zweiten Ast μ_0' tangirt.

Nun scheiden aber diese beiden Geodätischen das Büschel in A gleichsam in 4 Quadranten, und da jede mit der Krümmungslinie μ_0' oder ν_0' , wie unmittelbar einzusehen, zwei Berührungspunkte haben wird, da sie nach zwei Richtungen von A ausläuft, so sind hierdurch 4 Enveloppenpunkte bestimmt, die analog den vier Quadranten die Einhüllende in vier Theile scheiden werden. In der That: in jedem solchen Punkte schliessen sich zwei Zweige der Enveloppe *tangential* an die Krümmungslinie μ_0' resp. ν_0' an, da man von A aus zu der im Ausgangspunkte berührenden Curve zwei ***) in verschiedene Quadranten auslaufende, ihr unendlich benachbarte Linien ziehen

*) Diesen Modul kann man durch partielle Integration so umgestalten, dass er für $\nu = \mu'$ nicht mehr ∞ wird; man erhält dann:

$$J_0 = \frac{2}{\mu'^2} \int_{\mu_0}^{\nu_0'} \frac{\nu}{V \mu'^2 - \nu^2} \cdot \frac{(\sigma^2 - \nu^2)(h^2 - \nu^2) + (\sigma^2 - h^2)(k^2 - \nu^2)}{V(\sigma^2 - \nu^2)(k^2 - \nu^2)^3(h^2 - \nu^2)^3} d(\nu^2),$$

und da $\mu' < \nu_0$ ist, so muss J_0 positiv sein.

**) Vergl. v. Mangoldt, a. a. O. pag. 48, Anmerk.

***) Vergl. § 1. am Ende.

kann, welche sich von zwei verschiedenen Seiten her an sie anschliessen (vergl. Fig. 2). Diese vier Punkte sind massgebend sowohl für die Gestalt als auch für die Lage der Enveloppe. Wir haben also zunächst ihre gegenseitige Stellung in's Auge zu fassen.

§ 7.

Aufstellung eines allgemeinen Satzes über die Lage des Berührungspunktes einer geodätischen Linie mit ihrer Enveloppe und Gestalt der letzteren.

Wir beweisen vorerst folgende Ungleichungen:

$$(21) \left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad 2 \int_{\frac{k^2}{v_0^2}}^{\frac{h^2}{v_0^2}} \frac{V\sigma^2 - \mu^2 d(\mu^2)}{V(k^2 - \mu^2)(\mu^2 - v_0^2)(\mu^2 - h^2)\mu^2} < 2 \int_{\frac{v_0^2}{v^2}}^{\frac{0}{v^2}} \frac{V\sigma^2 - v^2 d(v^2)}{V(k^2 - v^2)(h^2 - v^2)(v_0^2 - v^2)v^2}, \\ \text{wo } 0 < v_0 < h \text{ ist;} \\ \text{(b)} \quad 2 \int_{\frac{\mu_0^2}{\mu^2}}^{\frac{k^2}{\mu^2}} \frac{V\sigma^2 - \mu^2 d(\mu^2)}{V(k^2 - \mu^2)(\mu^2 - \mu_0^2)(\mu^2 - h^2)\mu^2} < 2 \int_{\frac{0}{v}}^{\frac{h^2}{v}} \frac{d(v^2) V\sigma^2 - v^2}{V(k^2 - v^2)(h^2 - v^2)(\mu_0^2 - v^2)v}, \\ \text{wo } k > \mu_0 > h \text{ ist.} \end{array} \right.$$

Dabei sind die Integrale so zu verstehen, dass die Integrationsvariable von der untern Grenze beginnend, die obere umläuft und wieder nach ihrem Ausgangspunkte zurückkehrt.

Um die erste Ungleichung zu beweisen, vergrössern wir das Integral links, indem wir statt $\sqrt{\sigma^2 - \mu^2}$ $\sqrt{\sigma^2 - h^2}$ setzen, während wir zur Verkleinerung des zweiten statt $\sqrt{\sigma^2 - v^2}$ $\sqrt{\sigma^2 - v_0^2}$ einführen. Hierdurch gehen die beiden Integrale in elliptische der ersten Gattung über. Um diese bezüglich ihrer Grösse zu vergleichen, setzen wir links

$$\mu^2 = \frac{h^2(k^2 - v_0^2) - v_0^2(k^2 - h^2)y}{k^2 - v_0^2 - (k^2 - h^2)y} \quad \text{und rechts} \quad v^2 = \frac{k^2 v_0^2}{k^2 - v_0^2 - v_0^2 y};$$

dann gehen sie beide in vollständige Integrale mit dem nämlichen Modul $\kappa^2 = \frac{v_0^2(k^2 - h^2)}{h^2(k^2 - v_0^2)}$ über und unterscheiden sich nur durch die constanten Factoren, so dass man mit Benutzung der Jacobi'schen Bezeichnung für das vollständige Integral erster Gattung hat:

$$\frac{2}{h} \sqrt{\frac{\sigma^2 - h^2}{k^2 - v_0^2}} K < \frac{2}{v_0} \sqrt{\frac{\sigma^2 - v_0^2}{k^2 - v_0^2}} K,$$

was unmittelbar einleuchtet, da $v_0 < h$ vorausgesetzt wurde. Also muss um so mehr obige Ungleichung (a) bestehen.

Zum Beweise der zweiten Ungleichung sei das Integral links vergrössert, indem man statt $\sqrt{\sigma^2 - \mu^2}$ $\sqrt{\sigma^2 - \mu_0^2}$ einführt, und das Integral rechts verkleinert, indem man an Stelle von $\sqrt{\sigma^2 - v^2}$ $\sqrt{\sigma^2 - h^2}$ setzt. Macht man dann resp. die Substitutionen

$$\mu_2 = \frac{k^2 \mu_0^2}{\mu_0^2 + (k^2 - \mu_0^2) y} \quad \text{und} \quad v^2 = - \frac{k^2 h^2 y}{k^2 - h^2 + h^2 y},$$

so erhält man, wie oben, zwei elliptische Integrale mit dem gleichen Modul $\kappa^2 = \frac{h^2(k^2 - \mu_0^2)}{\mu_0^2(k^2 - h^2)}$, und es besteht die Ungleichung:

$$\frac{2}{\mu_0} \sqrt{\frac{\sigma^2 - \mu_0^2}{k^2 - h^2}} K < \frac{2}{\mu_0} \sqrt{\frac{\sigma^2 - h^2}{k^2 - h^2}} \cdot K,$$

da $\mu_0 > h$ ist. Somit ist auch die Richtigkeit der zweiten Ungleichheit um so mehr einleuchtend.

Verfolgt man jetzt die geodätische Linie, welche v_0 im Ausgangspunkte A berührt, indem man den Zweig betrachtet, der von A aufwärts über den Hauptschnitt der grossen und kleinen Axe emporsteigt, so wird die eine Coordinate v des die Linie beschreibenden Punktes von $v = v_0$ über $v = 0$ nach $v = v_0'$ laufen (vergl. Fig. 2), um v_0' in A' zu tangiren, das zweite Integral in Gleichung (19) hat dann

den Werth $2 \int_{v_0'}^0 \frac{d(v^2) \sqrt{\sigma^2 - v^2}}{\sqrt{(k^2 - v^2)(h^2 - v^2)(v_0'^2 - v^2)v^2}}$ erlangt; inzwischen muss

aber die andere Coordinate des Punktes von $\mu = \mu_0$ über $\mu = h$ und $\mu = k$ nach $\mu = \mu_0'$ gelangt und diesen Werth bereits überschritten haben, da der bis zu $\mu = \mu_0'$ erlangte Integralwerth

$$2 \int_{k^2}^{h^2} \frac{\sqrt{\sigma^2 - \mu^2} d(\mu^2)}{\sqrt{(k^2 - \mu^2)(\mu^2 - v_0'^2)(\mu^2 - h^2)\mu^2}}$$

nach der ersten Ungleichung in (20) noch kleiner ist als

$$2 \int_{v_0'}^{v^2} \frac{d(v^2) \sqrt{\sigma^2 - v^2}}{\sqrt{(k^2 - v^2)(v_0'^2 - v^2)(h^2 - v^2)v^2}},$$

den er doch erreichen soll. Also kann der Berührungspunkt der geodätischen Linie mit v_0' , d. h. der eine dieser vier ausgezeichneten Enveloppenpunkte, erst dann auftreten, wenn die Linie μ_0' (von oben kommend) bereits durchsetzt hat*).

Genau ebenso zeigt sich, wenn man jenen Zweig der Linie in's Auge fasst, der von A abwärts dem Hauptschnitte der grossen und mittleren Axe zustrebt, dass derselbe von unten kommend μ_0' bereits durchsetzt hat, bevor er v_0' berührt. Die beiden Berührungspunkte der in

*) Dieser Satz stimmt mit einem erst vor Kurzem in einer Abhandlung: „Ueber Fadenconstructionen des Ellipsoides“, diese Annalen Bd. XX, pag. 160, von Herrn Staudé veröffentlichten überein. Er war mir schon lange Zeit bekannt, und da mein Beweis sich wesentlich von dem dort pag. 161 gegebenen unterscheidet, so erlaubte ich mir, ihn mitzutheilen.

A die Krümmungslinie ν_0 tangirenden geodätischen Linie mit ν_0' oder die Berührungspunkte der Enveloppe mit dieser Krümmungslinie liegen somit zu verschiedenen Seiten der Krümmungslinie μ_0' .

Fasst man ferner jene Curve in's Auge, welche μ_0 im Ausgangspunkte berührt, und zwar den Zweig derselben, welcher sich von *A* gegen den Hauptschnitt der mittleren und kleinen Axe erstreckt, so muss μ , bis es die Linie μ_0' tangirt, von μ_0 über k nach μ_0' gegangen sein; somit hat das erste Integral in (19) den Werth

$$2 \int_{\mu_0^2}^{k^2} \frac{d(\mu^2) \sqrt{\sigma^2 - \mu^2}}{V(k^2 - \mu^2) (\mu^2 - \mu_0^2) (\mu^2 - h^2) \mu^2}$$

erlangt. Damit nun aber auch das zweite Integral den gleichen Werth bekommt, darf ν von ν_0 über 0 und h laufend den Werth ν_0' noch nicht erlangt haben, da sonst das Integral auf

$$2 \int_0^{h^2} \frac{d(\nu^2) \sqrt{\sigma^2 - \nu^2}}{V(k^2 - \nu^2) (h^2 - \nu^2) (\mu_0^2 - \nu^2) \nu^2}$$

angewachsen wäre, welcher Werth nach der zweiten Ungleichung in (21) grösser als

$$2 \int_{\mu_0^2}^{k^2} \frac{d(\mu^2) \sqrt{\sigma^2 - \mu^2}}{V(k^2 - \mu^2) (\mu^2 - \mu_0^2) (\mu^2 - h^2) \mu^2}$$

ist. Also tritt der fragliche Berührungspunkt der Linie mit μ_0' ein, bevor sie ν_0' schneidet. Ganz ebenso folgt, dass der zweite Zweig der Linie, welcher von *A* gegen den Hauptschnitt der grossen und kleinen Axe strebt, μ_0' berührt, bevor er ν_0' erreicht. Also liegen auch die zwei Berührungspunkte der Enveloppe mit μ_0' zu verschiedenen Seiten von ν_0' .

Da nun die geodätischen Linien des Büschels continuirlich auf einander folgen, so sind diese vier charakteristischen Punkte durch vier Zweige mit einander verbunden und zwar zu einer ähnlichen sternförmigen Figur wie auf den Rotationsellipsoiden. Je ein solcher Zweig kommt durch alle diejenigen Linien zu Stande, welche von *A* aus in einen der oben erwähnten vier Quadranten eintreten. Dabei ist nach diesen Betrachtungen klar, dass sämtliche geodätische Linien, die eine Krümmungslinie des Systemes ν tangiren, ihre Enveloppe erst dann berühren, wenn sie den Werth μ_0' überschritten haben, dass hingegen zwei unendlich benachbarte Linien des ersten Systems, welche eine Krümmungslinie μ berühren, schon zusammen treffen, bevor sie noch ν_0' erreicht haben. Die Linie durch die Kreis-

punkte, welche zu beiden Systemen gehört, genießt natürlich auch beide Eigenschaften.

Geht eine geodätische Linie von einem Punkte der Krümmungslinie μ_0 oder ν_0 aus, berührt dann μ' , das zum einen oder andern System gehören kann, durchschneidet μ_0 resp. ν_0 abermals und erstreckt sich bis zum zweiten Aste der Krümmungslinie μ'_0 oder ν'_0 , so nenne ich das so beschriebene Stück der Linie *ihre halbe Periode**) (Fig 2 das Stück ABD). Mit Einführung dieser Bezeichnung kann man dann die durch obige Untersuchung gewonnenen Resultate in folgendem Satze vereinigen: „*Alle geodätischen Linien eines Ellipsoides, die von einem Punkte ausgehen, bilden eine Enveloppe und zwar treffen die Linien des ersten Systems ihre Enveloppe vor Vollendung ihrer halben Perioden, während dies für geodätische Linien des zweiten Systems erst nach Vollendung ihrer halben Perioden eintritt.*“**)

§ 8.

Grenzen, bis zu welchen die drei Hauptschnitte des Ellipsoids kürzeste Linien sind.

Bezeichnet man der Kürze halber die drei Hauptschnitte mit ihren elliptischen Coordinaten (vergl. § 1.) und verlegt den Büschelmittelpunkt A in irgend einen Punkt des Axenschnittes $\mu = k$, so ist die Lage dieses Punktes auf demselben durch einen gewissen Werth ν_0 bestimmt. Die ν_0 im Ausgangspunkte berührende geodätische Linie tangirt dann ν'_0 nach Vollendung ihrer halben Periode, die Enveloppe liegt symmetrisch in Bezug auf den Axenschnitt, zwei ihrer Spitzen befinden sich auf demselben, während die andern zwei auf ν'_0 liegen. Rückt A in den Endpunkt der mittleren Axe, so fallen ν_0 und ν'_0 mit $\nu = 0$ zusammen, und die zwischen ihnen sich bewegende geodätische Linie geht in den Axenschnitt selbst über, derselbe ist daher geodätische Linie; da er aber seine Enveloppe nach Vollendung seiner halben Periode, das heisst nachdem er $\mu = k$ durchsetzt hat, berührt, so ist er in einer Ausdehnung *kürzeste Linie*, die grösser als die halbe Peripherie der von ihm ausgeschnittenen Ellipse ist. Da ferner für dieselbe Lage von A μ_0 mit $\mu = k$ zusammenfällt, diese Linie aber vor Erreichung der halben Periode die Enveloppe berührt, so ist der Axenschnitt $\mu = k$ in einer Ausdehnung *kürzeste Linie*, die kleiner als der halbe Ellipsenumfang ist.

*) Vergl. meinen Aufsatz a. a. O. pag. 558.

**) Dieser Satz entspricht genau dem in meinem Aufsatze pag. 561 für beide Rotationsellipsoide gegebenen. Das dreiaxige Ellipsoid besitzt eben zwei Systeme geodätischer Linien, wovon das eine die Eigenschaften der Linien auf dem verlängerten, das andere die der Linien auf dem abgeplatteten Ellipsoide genießt.

Wandert jetzt A auf $v = 0$ weiter, so wird seine Lage durch eine gewisse Krümmungslinie μ_0 festgelegt, und die Grenzpunkte, bis zu welchen die μ_0 berührende Geodätische kürzeste Linie ist, d. h. die auf ihr liegenden Enveloppenspitzen treten stets auf, bevor sie $v = 0$ wieder trifft. Langt daher A im Endpunkte der kleinen Axe an, so folgt, dass der Hauptschnitt $\mu = h$ von diesem Punkte aus gerechnet in einer kleineren Ausdehnung kürzeste Linie ist als der halbe Ellipsenbogen beträgt, während der Schnitt $v = 0$ die nämliche Eigenschaft behielt, die er für den Endpunkt der mittleren Axe als Ausgangspunkt der Linien besass.

Rückt der Büschelmittelpunkt auf $\mu = h$ gegen den Endpunkt der grossen Axe, so wird seine Lage bis zum Kreispunkte durch eine Coordinate $v = v_0$ bestimmt, und die Grenzpunkte der v_0 berührenden Linie liegen also nach Vollendung der halben Perioden, d. h. nachdem die Linie bereits $v = h$ wieder durchschnitten hat, während die beiden andern Spitzen dem Hauptschnitte angehören und so liegen, dass derselbe stets in einer kleineren Ausdehnung kürzeste Linie ist, als die halbe Ellipsenperipherie; er rechnet ja von $v = 0$ bis $v = h$ zum Systeme der Krümmungslinien μ . Dabei zeigt sich ferner, dass die Envelope sich immer mehr zusammenzieht, bis A den Kreispunkt erreicht, in welchem Falle sämtliche Geodätischen des Büschels A durch den entgegengesetzten Kreispunkt laufen, welcher dann die Envelope repräsentirt.

Bewegt sich A noch weiter gegen den Endpunkt der grossen Axe, so wird seine Lage durch einen Werth $\mu = \mu_0$ festgelegt, und folglich liegen die Spitzen auf der μ_0 tangirenden geodätischen Linie stets vor Vollendung der Periode, d. h. bevor sie $\mu = h$ zum zweiten Male trifft, während $\mu = h$ in einer die Länge des halben Ellipsenbogens übertreffenden Ausdehnung kürzeste Linie ist, da dieser Hauptschnitt vom Kreispunkte bis zum Endpunkte der grossen Axe der Schaar der Krümmungslinien v angehört.

Fällt endlich der Büschelmittelpunkt mit dem Endpunkte der grossen Axe zusammen, so folgt, dass $\mu = k$ in einer Länge kürzeste Linie ist, die die halbe Ellipsenperipherie nicht erreicht.

Fassen wir diese Resultate in einen Satz, so folgt: „Die beiden Hauptschnitte der grossen und mittleren, der mittleren und kleinen Axe sind von irgend einem ihrer Punkte aus gerechnet in einer Ausdehnung kürzeste Linien, welche bezüglich die halbe Ellipsenperipherie (dieser Schnitte) nicht erreicht oder übertrifft. Der Axenschnitt der grossen und kleinen Axe hingegen übertrifft als kürzeste Linie aufgefasst die halbe Ellipsenperipherie an Länge, wenn man von einem Punkte aus zählt, der dem durch zwei Kreispunkte begrenzten Stücke angehört, welches den Endpunkt der grossen Axe enthält, während er von seinen

übrigen Punkten aus gerechnet in einer Länge, kleiner als der halbe Ellipsenumfang, kürzeste Linie ist.“*)

§ 9.

Bestimmung der Enveloppe durch hyperelliptische Functionen.

Will man Gleichungen, um die einzelnen Punkte einer Enveloppe rechnerisch zu bestimmen, oder will man mit andern Worten angeben, wie weit irgend eine vorgelegte geodätische Linie, von irgend einem Punkte aus gerechnet kürzeste Linie ist, so kann man sich diese leicht folgendermassen verschaffen. Fasst man nämlich die Gleichungen in's Auge:

$$(22) \quad \begin{cases} a) \int_{k^2}^{\mu^2} \frac{d(\mu^2)}{M} \pm \int_{h^2}^{v^2} \frac{d(v^2)}{N} = u, \\ b) \int_{k^2}^{\mu^2} \frac{d(\mu^2) (\sigma^2 - \mu^2)}{(\mu^2 - \mu'^2) M} \pm \int_{h^2}^{v^2} \frac{d(v^2) (\sigma^2 - v^2)}{(\mu'^2 - v^2) N} = u'', \end{cases}$$

von denen die erste mit Gleichung (5) übereinstimmt, während die zweite mit Gleichung (19) zusammenfällt, indem die Constante u'' nur von der Wahl des Ausgangspunktes abhängt, so kann man mit Hilfe von a) die zweite Gleichung, die aus zwei hyperelliptischen Integralen zweiter Gattung besteht, in die Form bringen:

$$(23) \quad Av + A_1 w + c_1 \frac{\partial \log \vartheta \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) (v|w)}{\partial v} + c_2 \frac{\partial \log \vartheta \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) (v|w)}{\partial w} = C; **)$$

v und w hängen durch die Gleichungen (10) von u ab. Die Constanten lassen sich durch ϑ -Quotienten mit verschwindenden Argumenten ausdrücken in Verbindung mit den Grössen $\beta_{p,q}$ des § 3.***)

Giebt man nun einen bestimmten Werth von μ' , d. h. wählt man eine geodätische Linie des Büschels aus, so sind damit die Constanten in Gleichung (23) bestimmt. Löst man daher diese Gleichung nach u auf und führt den gefundenen Werth u_0 in die Gleichungen (9) der geodätischen Linien ein, so hat man die rechtwinkligen Coordinaten des Berührungspunktes der Linie mit ihrer Enveloppe.

*) Diesem Satze entspricht ein ähnlicher für die beiden Rotationsellipsoide, lautend: „Der Aequatorkreis eines verlängerten Ellipsoides ist in einer Ausdehnung, kleiner als der Halbkreis, der Aequator eines Sphäroids aber in einer Länge, grösser als derselbe, kürzeste Linie.“

**) Weierstrass a. a. O. pag. 995 giebt eine ähnliche Gleichung zur Bestimmung der Länge eines geodätischen Bogens.

***) Vergl. L. Schleiermacher: „Ueber die Bewegung eines schweren Punktes auf dem verlängerten Rotationsellipsoide“. Inauguraldissertation, Erlangen, pag. 18.

§ 10.

Geodätische Linien auf dem zweischaligen Hyperboloide.

Auf dem zweischaligen Hyperboloide giebt es, wie auf dem Ellipsoide, zwei Schaaren Krümmungslinien, die von den confocalen Ellipsoiden und den einschaligen Hyperboloiden ausgeschnitten werden; die elliptischen Coordinaten eines Punktes der Fläche sind somit nach den Gleichungen (1) σ und μ , während ν constant bleibt*).

Die von den einschaligen Hyperboloiden ausgeschnittenen Krümmungslinien durchziehen die ganze Fläche und können analytisch durch das Unendliche von einem Mantel auf den andern fortgesetzt werden, während die Krümmungslinien des andern Systems geschlossene Curven sind, die auf je einem Mantel verlaufen. Für $\sigma = \mu = k$ erhält man den Axenschnitt $z = 0$ (vergl. pag. 559), d. h. derselbe gehört den Krümmungslinien beider Systeme an, während das eine System durch die Kreispunkte in das andere übergeht. Analytisch besteht also zwischen den Verhältnissen auf dem Hyperboloid und dem Ellipsoid bezüglich der Krümmungslinien kein Unterschied. Dasselbe gilt, wie man sich leicht überzeugt, von den geodätischen Linien. Die Differentialgleichung derselben ist:

$$\text{wo:} \quad \frac{(\sigma^2 - \nu^2) d(\sigma^2)}{S} \pm \frac{(\mu^2 - \nu^2) d(\mu^2)}{M} = 0,$$

$$S^2 = (\sigma^2 - k^2) (\sigma^2 - \mu'^2) (\sigma^2 - h^2) (\sigma^2 - \nu^2) \sigma^2,$$

$$M^2 = (\mu^2 - k^2) (\mu^2 - \mu'^2) (\mu^2 - h^2) (\mu^2 - \nu^2) \mu^2.$$

Sie zeigt, dass jede geodätische Linie auf der einen Flächenhälfte nach zwei Richtungen hin in's Unendliche läuft. Einer der beiden Zweige berührt seine zugehörige Krümmungslinie $\mu = \mu'$ oder $\sigma = \mu'$ auf derselben Flächenhälfte, wo er beginnt, während der zweite durch's Unendliche fortgesetzt den andern Ast der Krümmungslinie auf dem zweiten Flächenmantel tangirt. Betrachtet man also die beiden Flächenmäntel als zusammengehörig, so oscilliren die Linien ebenso um die Fläche wie im Falle des Ellipsoides.

Da nun $\mu' = k$ werden kann, so wird es auch eine Linie geben, die die Krümmungslinien der beiden Systeme zugleich berührt, was nur im Kreispunkte eintreten kann, und da ferner μ' für alle Punkte der Geodätischen constant bleibt, so folgt, dass auch auf dieser Fläche *die von einem Kreispunkte auslaufende Linie durch den entgegengesetzten Kreispunkt gehen muss*. Daraus ist es aber evident, dass sich zwei unendlich benachbarte geodätische Linien, die von einem Kreispunkte

*) Durch Herrn F. Klein wurde ich aufmerksam gemacht, dass es eine Collineation giebt, welche ein zweischaliges Hyperboloid und die geodätischen Linien auf ihm in ein Ellipsoid mit seinen geodätischen Linien verwandelt, woraus dann unmittelbar die Uebereinstimmung der folgenden Resultate mit den für das Ellipsoid gewonnenen ersichtlich ist.

auslaufen, niemals auf dem Flächenmantel schneiden können, auf welchem der Ausgangspunkt liegt. Dieser Satz wurde von Herrn v. Mangoldt in dem bereits in der Einleitung erwähnten Aufsätze durch Transformation der Gleichung (24) mit elliptischen Functionen (was für $\mu' = k$ möglich ist) analytisch bewiesen*). Nach seiner Bezeichnung sind dann die Kreispunkte Punkte erster Art, während er unter Punkten zweiter Art solche versteht, durch welche zwei unendlich benachbarte geodätische Linien gehen, die sich treffen, bevor sie das Unendliche erreichen.

§ 11.

Grenzcurve auf dem Hyperboloid für den Bereich der Punkte, die zu Enveloppen Anlass geben.

In meiner bereits mehrfach erwähnten Abhandlung habe ich darauf aufmerksam gemacht, dass beim zweischaligen Rotationshyperboloide der Fall eintreten kann, dass die ganze Envelope, die ja immer existirt, wenn man die beiden Flächentheile als zusammengehörig betrachtet, ganz auf dem zweiten Flächenmantel liegt, der den Büschelmittelpunkt der erzeugenden geodätischen Linien nicht enthält. Im gewöhnlichen Falle hingegen liegt die dem Ausgangspunkt zugekehrte Spitze mit ihm auf demselben Mantel, während die andern drei sich auf der zweiten Flächenhälfte befinden. Der Zwischenfall ist natürlich dann vorhanden, wenn die dem Büschelmittelpunkt zunächst gelegene Spitze gerade auf den unendlich fernen Kreis der Fläche fällt. Der Büschelmittelpunkt, der zu einer solchen Envelope Anlass giebt, wird dann wegen der Symmetrie der Fläche stets auf einem gewissen Parallelkreise r_0 liegen, für dessen Berechnung ich damals eine Integralgleichung aufstellte**).

Herr von Mangoldt fasst nun in der angeführten Abhandlung nur einen Mantel der Fläche ins Auge und betrachtet nur diejenigen Schnittpunkte unendlich benachbarter geodätischer Linien, welche auf demselben Flächentheile mit dem Büschelmittelpunkte liegen. Deshalb ist für ihn der erwähnte Parallelkreis die Grenze, welche die Punkte erster und zweiter Art von einander trennt. Die Punkte erster Art liegen in dem den Scheitel der Fläche einschliessenden Theile, während die zweiter Art in dem äussern Raume liegen. Der Radius dieses Grenzkreises r_0 findet sich a. a. O. pag. 40 durch Einführung elliptischer Functionen berechnet. Die hierzu verwandte Gleichung unterscheidet sich nicht wesentlich von der erwähnten Gleichung in meinem Aufsätze.

Nun überzeugt man sich durch ähnliche Betrachtungen wie beim dreiaxigen Ellipsoide leicht, dass der Verlauf der Envelope auf dem dreiaxigen Hyperboloide mit zwei Mantelflächen wenig verschieden ist

*) v. Mangoldt a. a. O. pag. 49–52.

• **) A. a. O. pag. 564.

von dem Verlauf derselben auf dem Rotationshyperboloide, so dass also auch auf jener Fläche eine Grenzcurve für die Lage der Punkte erster und zweiter Art existiren wird*). Die ungefähre Gestalt dieser Curve bei verschiedenen Axenverhältnissen der Fläche wurde von Herrn v. Mangoldt angegeben. Es lässt sich aber auch, und zwar ausgehend von denselben geometrischen Betrachtungen, die ich früher für das Rotationshyperboloid angestellt, eine Gleichung zur Bestimmung dieser Curve angeben.

Wie bei der Rotationsfläche, so erhält man auch hier die Punkte der Grenzcurve, wenn man fragt, welche Punkte als Büschelmittelpunkte geodätischer Linien genommen, Enveloppen erzeugen können, deren dem Ausgangspunkte zunächst gelegene Spitze gerade auf der unendlich fernen Krümmungslinie der Fläche liegt. Diese Krümmungslinie gehört natürlich zum Systeme σ . Die Spitze muss aber auch noch auf einer andern Krümmungslinie, nämlich auf μ_0' liegen, wenn μ_0' den Zweig von μ_0 bedeutet, auf welchem der Ausgangspunkt nicht liegt. Denn μ_0 wird ja im Büschelmittelpunkte von einer geodätischen Linie tangirt, deren Berührungspunkt mit $\mu_0' = \mu_0$ die Spitze festlegt (vergl. Ellipsoid § 6). Für alle Punkte der Grenzcurve liegt also μ_0 stets zwischen $\mu = k$ und $\mu = h$.

Die Integralgleichung der geodätischen Linien ist dann für σ_0 und μ_0 als Coordinaten des Ausgangspunktes:

$$(25a) \quad \int_{\sigma_0^2}^{\sigma^2} \frac{(\sigma^2 - v^2) d(v^2)}{S} + \int_{\mu_0^2}^{\mu^2} \frac{(\mu^2 - v^2) d(\mu^2)}{M} = 0.$$

Da wir nur diejenige Linie ins Auge fassen, welche die μ_0 im Ausgangspunkte berührt, so haben wir statt μ' in dieser Gleichung μ_0 zu setzen, und da sich die auf $\mu_0' = \mu_0$ gelegene Spitze im Unendlichen befinden soll, so muss für sie $\sigma = \infty$ sein; ihre Lage bestimmt sich somit aus der Gleichung

$$(25b) \quad \int_{\sigma_0^2}^{\infty} \frac{(\sigma^2 - v^2) d(v^2)}{S_0} + 2 \int_{\mu_0^2}^{h^2} \frac{(\mu^2 - v^2) d(\mu^2)}{N_0} = 0.$$

S_0 und N_0 sind die Werthe von S und N für $\mu' = \mu_0$. Lässt man in dieser Gleichung μ_0 alle Werthe von k bis h durchlaufen, so erhält man aus ihr jedesmal einen zugehörigen Werth σ_0 , welcher mit μ_0 einen Punkt der Grenzcurve festlegt.

Es sei jetzt

$$\sigma^2 = \mu^2 = \frac{x(\mu_0^2 - h^2)v^2 - (\mu_0^2 - v^2)h^2}{x(\mu_0^2 - h^2) - (\mu_0^2 - v^2)}, \quad x^2 = \frac{\mu_0^2 - h^2}{\mu_0^2 - v^2} \cdot \frac{k^2 - v^2}{k^2 - h^2},$$

*) v. Mangoldt a. a. pag. 48.

$$\lambda^2 = \frac{\mu_0^2 - h^2}{\mu_0^2 - v^2}, \quad \varrho^2 = \frac{\mu_0^2 - h^2}{\mu_0^2 - v^2} \cdot \frac{v^2}{h^2}.$$

Dann geht (25 b) über in

$$\int_1^{x_1^0} \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} - 2 \int_1^{x_2^0} \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} = 0,$$

wo $X = x(1-x)(1-x^2x)(1-\lambda^2x)(1-\varrho^2x)$ ist und x_1^0 dem Werthe σ_0 entspricht.

Um diese Gleichung nach x_1^0 aufzulösen, betrachten wir, wie in § 1, das Gleichungssystem:

$$(26) \quad \begin{cases} \int_1^{x_1} \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \int_1^{x_2} \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} = u', \\ \int_1^{x_1} \frac{x_1(1-\lambda^2x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}} + \int_1^{x_2} \frac{x_2(1-\lambda^2x_2)dx_2}{\sqrt{X_2}} = u. \end{cases}$$

Transformirt man die ϑ -Charakteristiken in den Gleichungen (8) § 2 auf die Anfangswerthe $x_1 = \frac{1}{\lambda^2}$, $x_2 = 1$, so erhält man aus den Gleichungen b), d) und e) folgende drei:

$$(27) \quad \begin{cases} -\frac{\kappa \lambda \varrho}{\lambda_1 \varrho_1 \lambda_1} (1-x_1)(1-x_2) = \frac{\vartheta^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (v|w)}{\vartheta^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (v|w)}, \\ \frac{\kappa \varrho}{\lambda_1 \varrho_1 \lambda_1} (1-\lambda^2x_1)(1-\lambda^2x_2) = \frac{\vartheta^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (v|w)}{\vartheta^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (v|w)}, \\ \frac{\kappa \lambda}{\varrho_1 \varrho_2 \varrho_2} (1-\varrho^2x_1)(1-\varrho^2x_2) = \frac{\vartheta^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (v|w)}{\vartheta^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (v|w)}. \end{cases}$$

Macht man jetzt wieder die beiden unbeschränkt variablen Grössen v und w von u und u' abhängig, indem man

$$\begin{aligned} v &= \beta_{1,1}u + \beta_{1,2}u', \\ w &= \beta_{2,1}u + \beta_{2,2}u' \end{aligned}$$

setzt, und die β auf dieselbe Art bestimmt, wie dies in § 3 für das Ellipsoid geschehen, so sind, da u' constant, ja in unserm Falle sogar Null ist, v und w nur mehr von der einen Variablen u abhängig, und die obigen Formeln gehören den Punkten einer geodätischen Linie zu.

Die geodätische Linie, welche wir ins Auge fassen, berührt im Unendlichen die Krümmungslinie μ_0' ; für diesen Punkt ist $x_1 = \frac{1}{\lambda^2}$, $x_2 = 1$, somit $u = 0$, und aus der ersten Formel (27) folgt $\vartheta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (v|w) = 0$. Diese ϑ -Function verschwindet aber nicht bloss für $u = 0$, sondern so oft $\mu = \mu_0$ wird. Denkt man sich also jetzt umgekehrt die Linie im unendlich fernen Berührungspunkte mit μ_0' ($x_1 = \frac{1}{\lambda^2}$, $x_2 = 1$) beginnend, so wird $\vartheta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (v|w)$ alsbald verschwinden, wenn die geodätische Linie den andern Zweig μ_0 der Krümmungslinie tangirt, d. h. in dem gesuchten Punkte der Grenzcurve.

Bestimmt man also aus der Gleichung

$$(28) \quad \vartheta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (v|w) = 0$$

die Wurzel u_0 , so legt diese den Schnittpunkt der Krümmungslinie μ_0 mit unserer Grenzcurve fest.

Ferner folgt aus der oben gebrauchten Substitution und der dritten und zweiten der Gleichungen (27)

$$(29) \quad \sigma = v \sqrt{\frac{h}{\mu_0}} \sqrt[4]{\frac{k^2 - v^2}{h^2 - v^2}} \cdot \frac{\vartheta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (v|w)}{\vartheta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (v|w)},$$

und u_0 in diese Gleichung eingeführt, liefert den verlangten Parameter σ_0 , der mit μ_0 einen Punkt der Grenzcurve festlegt. Natürlich wäre es auch leicht, die rechtwinkligen Coordinaten dieses Punktes als Functionen von u darzustellen.

Durch die Gleichungen (28) und (29) ist somit die Grenzcurve vollkommen bestimmt.

München im Juli 1882.