SULLE EQUAZIONI A DERIVATE PARZIALI DEL 1° ORDINE

Nota del dott. **Giulio Vivanti**, a Mantova.

Adunanza del 4 marzo 1888.

1. Sia z una funzione delle due variabili indipendenti x, y , e sieno p, q le sue derivate parziali del 1° ordine. Il prof. Morera nella sua Nota: *Sulla integrazione delle equazioni a derivate parziali del primo ordine* (Giornale della Società di letture e conversazioni scientifiche in Genova; fasc. agosto-settembre 1887) ha dimostrato che:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione a derivate parziali:

$$H(x, y, p, q) = h$$

(dove h è una costante) ammetta una soluzione completa della forma:

$$z = f(x) + \varphi(y)$$

è che H soddisfaccia ad un'equazione funzionale della forma:

$$\varphi[\varphi_1(H, x, p), \varphi_2(H, y, q)] = 0.$$

Questo teorema può generalizzarsi come segue:

Se z è una funzione delle n variabili indipendenti $x_1, x_2, \dots, x_n$, e $p_1, p_2, \dots, p_n$ sono le sue derivate parziali del 1° ordine, la condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione:

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = h \quad (1)$$

ammetta una soluzione completa della forma :

$$z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n) \quad (2)$$

è che H soddisfaccia ad un'equazione funzionale della forma :

$$\varphi[\varphi_1(H, x_1, p_1), \varphi_2(H, x_2, p_2), \dots, \varphi_n(H, x_n, p_n)] = 0. \quad (3)$$

La dimostrazione è semplicissima. Supponendo dapprima che esista una soluzione della forma (2), ne segue che p_i sarà funzione della sola x_i ; quindi derivando la (1) rispetto ad x_i si ha :

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial x_i} = 0. \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Ora $\frac{\partial p_i}{\partial x_i}$ è funzione della sola x_i , o, se si vuole, delle due variabili p_i, x_i (p. es. se p_i contiene una costante arbitraria non additiva potrà $\frac{\partial p_i}{\partial x_i}$ esprimersi in funzione di p_i, x_i eliminando questa costante); denotando con $\psi_i(x_i, p_i)$ tale funzione, l'equazione precedente diviene :

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \psi_i(x_i, p_i) = 0. \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

Il sistema ausiliario di questa equazione è :

$$\frac{dx_i}{1} = \frac{dp_i}{\psi_i(x_i, p_i)} = \frac{dH}{0};$$

l'ultimo termine di esso ci dà $H = \text{costante}$, i due primi $\gamma_i(x_i, p_i) = \text{costante}$; sicchè l'integrale generale della (4) sarà, indicando con F_i una funzione arbitraria :

$$F_i[H, \gamma_i(x_i, p_i), x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_n] = 0.$$

Di qui si deduce notoriamente che l'integrale generale del sistema formato dalle n equazioni (4) sarà :

$$\Phi[H, \chi_1(x_1, p_1), \chi_2(x_2, p_2), \dots, \chi_n(x_n, p_n)] = 0, \quad (5)$$

o, ciò che è lo stesso :

$$\varphi[\varphi_1(H, x_1, p_1), \varphi_2(H, x_2, p_2), \dots, \varphi_n(H, x_n, p_n)] = 0. \quad (6)$$

Supponiamo ora, reciprocamente, che sussista la (6) o la (5), e dimostriamo che in questo caso la (1) ammette necessariamente una soluzione completa della forma (2). Per questo non abbiamo che a seguire la via tracciata dal Morera. Prese n costanti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ legate dalla relazione :

$$\Phi(h, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0,$$

e denotando con p_i la funzione di x_i definita dall'equazione :

$$\chi(x_i, p_i) = \alpha_i,$$

la funzione :

$$z = \sum_{i=1}^n \int p_i dx_i,$$

che ha la forma (2), è evidentemente una soluzione completa della (1).

Noteremo qui che la prima parte della dimostrazione del professore Morera non è valevole in alcuni casi in cui il teorema tuttavia sussiste. Sia p. es. l'equazione data

$$p x + q y = h,$$

essa ha l'integrale completo della forma (2):

$$z = a \log x + (h - a) \log y + b,$$

e l'equazione funzionale assume in questo caso la forma :

$$H - px - qy = 0.$$

Ora la dimostrazione del Morera non è applicabile a questo caso, come non lo è ad alcun altro in cui le

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial y}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial x}$$

sieno identicamente nulle.

2. Il teorema precedente non sussiste più quando H contiene anche la z . In questo caso però si può dimostrare che, quando esiste un integrale della forma (2), la H deve necessariamente soddisfare ad una equazione funzionale di forma determinata ; al contrario l'esistenza di una tale equazione *non* implica necessariamente l'esistenza d'un integrale della forma (2).

Supponiamo che l'equazione

$$H(z, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = b$$

ammetta un integrale della forma (2), cioè che p_i sia funzione della sola x_i . Derivando rispetto ad x_i si avrà :

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial p_i}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0,$$

ossia, ponendo come prima $\frac{\partial p_i}{\partial x_i} = \psi_i(x_i, p_i)$:

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial H}{\partial z} + \psi_i(x_i, p_i) \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0. \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

Il sistema ausiliario della (7) è :

$$\frac{dx_i}{1} = \frac{dz}{p_i} = \frac{dp_i}{\psi_i(x_i, p_i)} = \frac{dH}{0}.$$

L'ultimo termine ci dà $H = a$, il primo ed il terzo insieme $\gamma_i(x_i, p_i) = b_i$, donde $p_i = \lambda_i(x_i, b_i)$; per tale sostituzione il secondo termine diviene $\frac{d\gamma}{\lambda(x_i, b_i)}$, ed uguagliandolo al primo si ottiene un nuovo integrale:

$$\gamma + \mu(x_i, b_i) = c_i,$$

ossia, rimettendo per b_i il suo valore:

$$\gamma + \mu[x_i, \gamma_i(x_i, p_i)] = c_i,$$

che si può anche scrivere così:

$$\gamma + \theta_i(x_i, p_i) = c_i.$$

L'integrale generale della (7) è adunque:

$$F_1[H, \gamma + \theta_1(x_1, p_1), \gamma_1(x_1, p_1), x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_n] = 0.$$

Di qui si deduce che l'integrale generale del sistema costituito dalle n equazioni (7) è:

$$\Phi[H, \gamma + \theta_1(x_1, p_1) + \dots + \theta_n(x_n, p_n), \gamma_1(x_1, p_1), \dots, \gamma_n(x_n, p_n)] = 0, \quad (8)$$

o, ciò che è lo stesso:

$$\varphi[\gamma + \theta_1(x_1, p_1) + \dots + \theta_n(x_n, p_n), \varphi_1(H, x_1, p_1), \dots, \varphi_n(H, x_n, p_n)] = 0. \quad (9)$$

Vediamo ora, reciprocamente, se possano trovarsi n funzioni $f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)$ tali che $\gamma = f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n)$ sia un integrale dell'equazione:

$$H = b$$

e soddisfa la (8) [o la (9)]. Dalla (8) si ha:

$$\gamma + \theta_1(x_1, p_1) + \dots + \theta_n(x_n, p_n) = \Psi[H, \gamma_1(x_1, p_1), \dots, \gamma_n(x_n, p_n)].$$

Ponendo per χ l'espressione $\sum_{i=1}^n f_i(x_i)$, e rammentando che per

tale valore di χ H si riduce ad una costante h , e p_i è funzione della sola x_i , si ha :

$$\sum_{i=1}^n [f_i(x_i) + w_i(x_i)] = \Psi[h, \xi_1(x_1), \dots, \xi_n(x_n)],$$

dove :

$$w_i(x_i) = \theta_i \left(x_i, \frac{\partial f_i(x_i)}{\partial x_i} \right), \quad \xi_i(x_i) = \chi_i \left(x_i, \frac{\partial f_i(x_i)}{\partial x_i} \right).$$

Ora è chiaro che *solo per certe forme speciali della Φ* potranno trovarsi n funzioni f_i tali che la Ψ si riduca ad una somma di funzioni rispettivamente di $x_1, x_2, \dots, x_n$; e ciò prova l'asserto.

Mantova, 26 febbrajo 1888.

VIVANTI.