Intorno alle superficie applicabili sulle quadriche ed alle loro trasformazioni.

(Di PASQUALE CALAPSO, a Palermo.)

Lo scopo principale della presente Memoria è di stabilire la teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche dal punto di vista intrinseco; cioè come trasformazioni delle soluzioni del sistema differenziale (21) della Memoria che ho pubblicata nel 1902 (*).

Occupandomi delle trasformazioni B_k , scoperte dal BIANCHI e recentemente raccolte dall'illustre geometra nel suo terzo volume delle *Lezioni*, vengo ad ottenere per le suddette trasformazioni, relative alle quadriche a centro, una rappresentazione analitica perfettamente analoga a quella stabilita dall'autore per i paraboloidi, che trovasi esposta nel Capitolo VI del volume III sopra citato.

Lo studio delle trasformazioni B_k dal nuovo punto di vista permette di scorgere un caso limite che sfugge alla rappresentazione ordinaria della B_k ; inoltre la nuova rappresentazione analitica di queste trasformazioni rende agevole il confronto fra le medesime e una classe di trasformazioni di GUICHARD.

Il metodo che viene seguito per giungere allo scopo suddetto consiste nell'esaminare dapprima il problema in un caso noto, cioè nel caso delle quadriche di rotazione per osservare l'effetto che le trasformazioni di BÄKLUND producono sugli integrali del sistema (21) della mia Memoria.

Esaminando attentamente le circostanze analitiche che permettono di generalizzare i risultati a quadriche qualunque si perviene a due tipi di trasformazioni. Uno di questi tipi si identifica colle trasformazioni B_k ; le trasformazioni dell'altro tipo costituiscono il caso limite che, come ho detto, sfugge alla rappresentazione ordinaria delle B_k . Le trasformazioni relative al caso limite vengono indicate, per ragioni che saran dette, con B_∞ .

Poichè non tutte le formole della trasformazione B_∞ sono deducibili da quelle della B_k col passaggio al limite, ho creduto opportuno occuparmi estesamente delle B_∞ e delle B_k dandone una trattazione parallela.

(*) P. CALAPSO, *Sulla deformazione delle quadriche* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XVI (1902), pagg. 297-326].

Premesse al § I le considerazioni relative alle quadriche di rotazione da cui le presenti ricerche hanno avuto origine, ho ordinato la materia in otto parti.

Nella parte prima viene stabilita con procedimento diretto l'esistenza delle trasformazioni B_∞ ; la dimostrazione è basata sul teorema fondamentale della mia Memoria del 1902; assumendo cioè l'equazione della quadrica sotto la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (1)$$

(a, b, c , assumendo costanti qualunque reali od immaginarie) e ponendo

$$x = a X_s, \quad y = b Y_s, \quad z = c Z_s, \quad (2)$$

condizione necessaria e sufficiente affinchè le (2) rappresentino la quadrica (1) riferita ad un sistema coniugato comune ad essa e ad una superficie applicabile, è che le funzioni X_s, Y_s, Z_s soddisfino al sistema:

$$\left. \begin{aligned} X_s^2 + Y_s^2 + Z_s^2 &= 1, \\ \Sigma \frac{\partial X_s}{\partial \alpha} \frac{\partial X_s}{\partial \beta} &= 0, \\ \Sigma \left(\frac{\partial X_s}{\partial \alpha} \right)^2 - \Sigma \left(\frac{\partial X_s}{\partial \beta} \right)^2 &= b^2 c^2 X_s^2 + c^2 a^2 Y_s^2 + a^2 b^2 Z_s^2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Le formole relative a questa trasformazione consistono in un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali di primo ordine, illimitatamente integrabile.

Nella parte II, seguendo un procedimento analogo a quello seguito nella parte I, si perviene alla nuova rappresentazione analitica delle B_k sotto il nuovo aspetto desiderato; lo studio di queste trasformazioni è accompagnato da un'accurata discussione sui casi singolari.

Nella parte III vengono stabilite le relazioni tra la nuova rappresentazione della B_k e la sua forma originale, secondo la quale *per qualunque superficie S applicabile sopra una quadrica esistono ∞^2 congruenze rettilinee W che avendo S per prima falda focale hanno le loro seconde falde focali S_1 applicabili sulla medesima quadrica.*

Nella parte IV viene richiamata la trasformazione di GUICHARD del 1905, da me studiata in una precedente Memoria (*), che ho dimostrato essere ri-

(*) P. CALAPSO, *Intorno alle superficie applicabili sulle quadriche ed alle loro trasformazioni* [l. c., tomo XXXII (1911), pagg. 365-385].

ducibile ad una D_m (per un conveniente valore della costante m). Trovo che tale trasformazione appartiene ad un tipo più generale che si può definire nel modo seguente:

Se X'_s, Y'_s, Z'_s è una soluzione del sistema (3) e X''_s, Y''_s, Z''_s è la nuova soluzione (trasformata della prima), si consideri sulla sfera

$$X_s^2 + Y_s^2 + Z_s^2 = 1$$

la corrispondenza in cui al punto X'_s, Y'_s, Z'_s corrisponde il punto X''_s, Y''_s, Z''_s ; note le funzioni X'_s, Y'_s, Z'_s , si determinano X''_s, Y''_s, Z''_s , colla condizione che le tangenti alle linee α e β della suddetta sfera in punti corrispondenti si tagliano rispettivamente.

Nelle formole relative a questa trasformazione si può introdurre una costante arbitraria k ; sicchè indico essa con G_k .

La trasformazione del 1905 è in conseguenza indicata con G_{-c^2} .

Sussistono anche per le G_k le trasformazioni singolari G_∞ .

Indi vengono stabilite le formole relative alla trasformazione H del BIANCHI, riportata al Cap. V del volume III delle *Lezioni*; e ciò sempre dal nuovo aspetto da me considerato. Siffatta trasformazione involutoria (a periodo 2) fa passare da una deformata della quadrica (1) ad una deformata della quadrica

$$\frac{\mathbf{x}^2}{a'^2} + \frac{\mathbf{y}^2}{b'^2} + \frac{\mathbf{z}^2}{c'^2} = 1, \quad (1)$$

in cui

$$b'^2 c'^2 = -b^2 c^2, \quad c'^2 a'^2 = c^2 (a^2 - b^2), \quad a'^2 b'^2 = b^2 (a^2 - c^2).$$

Trovo allora l'importante teorema:

La trasformazione H cangia una coppia di superficie applicabili sulla (1) legate tra loro da una G_k in un'altra coppia di superficie applicabili sulla (1)' legate tra loro da una $G_{k'}$.

La relazione ben semplice fra k e k' è data dalla formola

$$\frac{a^2}{k} + \frac{a'^2}{k'} + 1 = 0. \quad (2')$$

Il teorema analogo per le trasformazioni B_k sussiste ed è stato stabilito dal BIANCHI (l. c., pag. 230); la relazione fra k e k' è sempre la (2)'.

Ora da questa per $k = -a^2$, si ha $k' = \infty$; dunque la considerazione delle B_∞ permette di enunciare il teorema senza eccezioni.

Nella parte V viene effettuato il confronto tra le trasformazioni G_k e le B_k , e si dimostra che componendo due B_k colla medesima costante k ed

opposte tra loro, si ottiene una G_k ; viceversa una trasformazione G_k può sempre ottenersi come prodotto di due B_k ; cioè si ha il teorema

$$G_k = B_k \cdot B'_k.$$

Questo teorema, già noto per le ricerche di BIANCHI (*), viene nella presente Memoria esteso al caso $k = \infty$; giacchè si ha pure

$$G_\infty = B_\infty B'_\infty.$$

In particolare riferendoci alla trasformazione di GUICHARD del 1905, si ha

$$G_{-\epsilon^2} = B_{-\epsilon^2} B'_{-\epsilon^2},$$

cioè essa è equivalente al prodotto di due B_k singolari.

Nella parte VI viene esposta una dimostrazione diretta di un importantissimo teorema dovuto al BIANCHI e detto dall'autore *di permutabilità* (l. c., Cap. IV); ed estendo il teorema anche alle trasformazioni singolari facendo entrare in composizione le B_∞ .

Nella parte VII stabilisco il modo di ottenere trasformazioni reali; discutendo separatamente le tre specie di quadriche reali.

Nelle quadriche a punti ellittici sussistono delle trasformazioni che conducono da superficie reali applicabili realmente sulla quadrica a superficie reali pure applicabili realmente sulla quadrica; esse si ottengono componendo due trasformazioni B_{k_1} , B_{k_2} , immaginarie coniugate (k_1 e k_2 costanti complesse coniugate).

Si può anche ottenere una trasformazione reale con una sola B_k (k essendo una costante reale arbitrariamente presa fra convenienti limiti), per come ha stabilito il BIANCHI; essa conduce però da una superficie reale applicabile realmente (idealmente) sulla quadrica a superficie reali applicabili idealmente (realmente) sulla quadrica.

In quanto alle B_∞ , isolatamente applicate non conducono mai da una superficie reale a superficie reali; occorre sempre eseguirne un numero pari.

In particolare componendone due, si ha una G_∞ e sussiste il teorema:

La trasformazione G_∞ fa passare da una superficie reale applicabile idealmente sulla quadrica ad infinite nuove superficie reali applicabili idealmente sulla quadrica.

(*) *Sulle trasformazioni di GUICHARD delle superficie applicabili sulle quadriche* (Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, 5 febbraio 1911).

Donde poi segue:

La trasformazione $B_k G_\infty B_k$ (per convenienti valori di k e k') fa derivare da una superficie reale applicabile realmente sulla quadrica infinite superficie reali applicabili realmente sulla quadrica.

Nell'iperboloide ad una falda la trasformazione B_k , per k preso fra convenienti limiti, è reale; e trasforma sempre una superficie reale applicabile realmente (idealmente) sulla quadrica in superficie reali applicabili realmente (idealmente) sulla quadrica.

Anche in questo caso si ha il teorema:

La trasformazione G_∞ fa passare da una superficie reale applicabile idealmente sulla quadrica ad infinite nuove superficie reali applicabili idealmente sulla quadrica.

Nella parte VIII vengono stabilite alcune importanti proprietà geometriche delle trasformazioni B_k , donde le trasformazioni che abbiamo chiamato B_∞ appaiono dal punto di vista geometrico come caso limite delle B_k .

Quest'ultima ricerca, basata sulla considerazione delle deformazioni infinitesime che corrispondono alle B_k , mi è stata suggerita dal BIANCHI per corrispondenza del che vivamente ringrazio l'illustre geometra.

Nel caso delle B_∞ la deformazione infinitesima corrispondente si riduce ad una traslazione isotropa; e sembra assai notevole che ad ogni traslazione isotropa di una superficie applicabile sulla quadrica corrisponde una B_∞ e l'integrazione del relativo sistema differenziale si compie con soli calcoli algebrici e di derivazione.

Se in particolare la quadrica è una sfera si ha la proposizione seguente:

Data una superficie a curvatura costante S , le ∞^1 superficie derivate da S con la trasformazione complementare sono costruibili in termini finiti, quando si conosca la superficie $\mathbf{S}$ corrispondente ad S per trasformazione di HAZZIDAKIS.

In ciò che segue introdurremo secondo il solito le funzioni ausiliarie

$$E_0 = \Sigma \left(\frac{\partial X_3}{\partial \alpha} \right)^2, \quad G_0 = \Sigma \left(\frac{\partial X_3}{\partial \beta} \right)^2, \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial X_3}{\partial \alpha}, & X_2 &= \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial X_3}{\partial \beta}, \\ Y_1 &= \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial Y_3}{\partial \alpha}, & Y_2 &= \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial Y_3}{\partial \beta}, \\ Z_1 &= \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial Z_3}{\partial \alpha}, & Z_2 &= \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial Z_3}{\partial \beta}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ed il sistema di relazioni fondamentali

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial \alpha} &= -\frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} X_2 - \sqrt{E_0} X_3, & \frac{\partial X_1}{\partial \beta} &= \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} X_2, \\ \frac{\partial X_2}{\partial \alpha} &= \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} X_1, & \frac{\partial X_2}{\partial \beta} &= -\frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} X_1 - \sqrt{G_0} X_3, \\ \frac{\partial X_3}{\partial \alpha} &= \sqrt{E_0} X_1, & \frac{\partial X_3}{\partial \beta} &= \sqrt{G_0} X_2, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

colle analoghe in Y e Z ; e quando occorra considereremo le trasformazioni per tutto il sistema di funzioni

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{E_0}, & & \sqrt{G_0}, \\ X_1, & Y_1, & Z_1, \\ X_2, & Y_2, & Z_2, \\ X_3, & Y_3, & Z_3. \end{array}$$

§ I. LE TRASFORMAZIONI DI BÄKLUND PER LE QUADRICHE DI ROTAZIONE.

1. Supponiamo che la quadrica (1) sia di rotazione ($a = b = 1$).

In tal caso, secondo è stato stabilito nella mia citata Memoria del 1902, per ottenere la soluzione più generale del sistema (2), basta assumere una soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \beta^2} + \sinh \theta \cosh \theta = 0, \quad (7)$$

ed integrare il sistema completo

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \alpha} &= e^\theta \lambda, \\ \frac{\partial u}{\partial \beta} &= e^\theta \mu, \\ \frac{\partial v}{\partial \alpha} &= -e^{-\theta} \lambda, \\ \frac{\partial v}{\partial \beta} &= e^{-\theta} \mu, \end{aligned} \right\} \quad (7)^*$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} = -(k_1 e^\theta + k_2 e^{-\theta}) u + (k_2 e^\theta + k_1 e^{-\theta}) v - \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \mu, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} = \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \mu, \\ \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} = \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \lambda, \\ \frac{\partial \mu}{\partial \beta} = -(k_1 e^\theta - k_2 e^{-\theta}) u + (k_2 e^\theta - k_1 e^{-\theta}) v - \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \lambda, \end{array} \right\} \quad (7)^*$$

in cui $4k_1 = \alpha^4 = 1$; $4k_2 = 2c^2 - 1$; ad opportune condizioni iniziali; cioè in modo da aversi

$$k_1 (u^2 + v^2) - 2k_2 uv + \lambda^2 + \mu^2 = 0. \quad (8)$$

In questo modo le funzioni

$$X_s = \frac{1 - uv}{u - v}, \quad Y_s = i \frac{1 + uv}{u - v}, \quad Z_s = \frac{u + v}{u - v}, \quad (8)^*$$

soddisferanno al sistema (3).

2. Partendo da una soluzione θ dell'equazione (7) e dal sistema di funzioni corrispondenti u, v, λ, μ , ed applicando la trasformazione di BÄKLUND

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha} = i \frac{\partial \theta}{\partial \beta} + i \sinh \sigma \sinh \theta \cosh \theta_1 + i \cosh \sigma \cosh \theta \sinh \theta_1, \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial \beta} = -i \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \sinh \sigma \cosh \theta \sinh \theta_1 + \cosh \sigma \sinh \theta \cosh \theta_1, \end{array} \right\} \quad (9)$$

avremo una nuova soluzione θ_1 dell'equazione (7); inoltre come sistema di funzioni corrispondenti possiamo assumere

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau u_1 = e^{\theta_1} \lambda - i e^{\theta_1} \mu - \frac{i}{2} \sinh \sigma (u + v) + \frac{i}{2} \cosh \sigma (u - v), \\ \tau v_1 = -e^{-\theta_1} \lambda - i e^{-\theta_1} \mu - \frac{i}{2} \sinh \sigma (u + v) - \frac{i}{2} \cosh \sigma (u - v), \\ \tau \lambda_1 = -(k_1 e^\theta + k_2 e^{-\theta}) u + (k_2 e^\theta + k_1 e^{-\theta}) v + B \mu + i A \lambda, \\ \tau \mu_1 = i (k_1 e^\theta - k_2 e^{-\theta}) u - i (k_2 e^\theta - k_1 e^{-\theta}) v - i D \mu + C \lambda, \end{array} \right\} \quad (10)$$

in cui abbiamo posto per brevità

$$\left. \begin{aligned} A &= \sinh \sigma \sinh \theta \sinh \theta_1 + \cosh \sigma \cosh \theta \cosh \theta_1, \\ B &= \sinh \sigma \sinh \theta \cosh \theta_1 + \cosh \sigma \cosh \theta \sinh \theta_1, \\ C &= \sinh \sigma \cosh \theta \sinh \theta_1 + \cosh \sigma \sinh \theta \cosh \theta_1, \\ D &= \sinh \sigma \cosh \theta \cosh \theta_1 + \cosh \sigma \sinh \theta \sinh \theta_1 \quad (*) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

e τ indica una costante qualunque di proporzionalità.

Infatti si verifica con facile calcolo che le funzioni $u_1, v_1, \lambda_1, \mu_1$ soddisfano alle equazioni

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} &= e^{\theta_1} \lambda_1, \\ \frac{\partial u_1}{\partial \beta} &= e^{\theta_1} \mu_1, \\ \frac{\partial v_1}{\partial \alpha} &= -e^{-\theta_1} \lambda_1, \\ \frac{\partial v_1}{\partial \beta} &= e^{-\theta_1} \mu_1, \\ \frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha} &= -(k_1 e^{\theta_1} + k_2 e^{-\theta_1}) u_1 + (k_2 e^{\theta_1} + k_1 e^{-\theta_1}) v_1 - \frac{\partial \theta_1}{\partial \beta} \mu_1, \\ \frac{\partial \lambda_1}{\partial \beta} &= \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha} \mu_1, \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \theta_1}{\partial \beta} \lambda_1, \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial \beta} &= -(k_1 e^{\theta_1} - k_2 e^{-\theta_1}) u_1 + (k_2 e^{\theta_1} - k_1 e^{-\theta_1}) v_1 - \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha} \lambda_1; \end{aligned} \right.$$

d'altra parte si ha identicamente

$$\begin{aligned} & \tau^2 \left[k_1 (u_1^2 + v_1^2) - 2 k_2 u_1 v_1 + \lambda_1^2 + \mu_1^2 \right] = \\ &= \left[2 k_2 - \frac{1}{2} (\cosh^2 \sigma + \sinh^2 \sigma) \right] \left[k_1 (u^2 + v^2) - 2 k_2 u v + \lambda^2 + \mu^2 \right], \end{aligned}$$

(*) Vedasi la ricerca analoga del BIANCHI, relativa ai paraboloidi, l. c., pag. 272 e 273.

e quindi in forza della (8) sarà pure

$$k_1 (u_1^2 + v_1^2) - 2 k_2 u_1 v_1 + \lambda_1^2 + \mu_1^2 = 0.$$

Se ora poniamo

$$X'_s = \frac{1 - u_1 v_1}{u_1 - v_1}, \quad Y'_s = i \frac{1 + u_1 v_1}{u_1 - v_1}, \quad Z'_s = \frac{u_1 + v_1}{u_1 - v_1}, \quad (12)$$

avremo una nuova soluzione del sistema differenziale (3).

Il passaggio dalla soluzione X_s, Y_s, Z_s alla soluzione X'_s, Y'_s, Z'_s costituisce la trasformazione che volevamo ottenere.

La nuova soluzione X'_s, Y'_s, Z'_s contiene due costanti arbitrarie, cioè la costante σ che compare esplicitamente nelle (9) e la costante introdotta dall'integrazione.

3. Ora se scriviamo le prime due delle relazioni (10) sotto la forma

$$e^{\theta_1} (\lambda - i \mu) = \tau u_1 + \frac{i}{2} \sinh \sigma (u + v) - \frac{i}{2} \cosh \sigma (u - v),$$

$$e^{-\theta_1} (\lambda + i \mu) = -\tau v_1 - \frac{i}{2} \sinh \sigma (u + v) - \frac{i}{2} \cosh \sigma (u - v),$$

e moltiplichiamo membro a membro, tenendo conto della (8), dopo semplificazione avremo

$$\left. \begin{aligned} & \left[2 k_2 - \frac{1}{2} (\cosh^2 \sigma + \sinh^2 \sigma) \right] u v + \tau^2 u_1 v_1 + \\ & + i \frac{\tau}{2} \sinh \sigma (u + v) (u_1 + v_1) + i \frac{\tau}{2} \cosh \sigma (u - v) (u_1 - v_1) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Sicchè se escludiamo il valore $\cosh \sigma = \pm \frac{c}{a}$, per il quale il coefficiente di $u v$ è nullo, e indichiamo con k la costante arbitraria $-\frac{c^2}{\cosh^2 \sigma}$, possiamo assumere

$$\tau = \frac{c}{\sqrt{k}} \sqrt{a^2 + k}, \quad \sinh \sigma = \frac{i}{\sqrt{k}} \sqrt{c^2 + k}, \quad \cosh \sigma = -\frac{i c}{\sqrt{k}},$$

e la (13) prende la forma

$$\begin{aligned} & c \sqrt{a^2 + k} (1 - u v) (1 - u_1 v_1) - c \sqrt{a^2 + k} (1 + u v) (1 + u_1 v_1) + \\ & + \sqrt{c^2 + k} (u + v) (u_1 + v_1) = c (u - v) (u_1 - v_1), \end{aligned}$$

ossia per le (8)* e (12)

$$c\sqrt{a^2+k}X_sX'_s+c\sqrt{a^2+k}Y_sY'_s+\sqrt{c^2+k}Z_sZ'_s=c;$$

e tenendo conto della condizione $a=b=1$ scriveremo meglio per simmetria nel seguente modo:

$$bc\sqrt{a^2+k}X_sX'_s+ca\sqrt{b^2+k}Y_sY'_s+ab\sqrt{c^2+k}Z_sZ'_s=abc. \quad (14)$$

Nel caso escluso $\cosh \sigma = \pm \frac{c}{a}$ la (13) diventa

$$\tau u_1 v_1 + \frac{i}{2} \sinh \tau (u+v)(u_1+v_1) + \frac{i}{2} \cosh \sigma (u-v)(u_1-v_1) = 0,$$

ossia

$$\frac{\tau}{2}(X'_s+iY'_s)(X_s-iY_s)-i\sinh \sigma Z_sZ'_s=i\cosh \sigma. \quad (15)$$

Infine assumendo

$$\cosh \sigma = 0, \quad \sinh \sigma = i, \quad \tau = c,$$

la (13) prende la forma

$$c\left[(1-uv)(1-u_1v_1)-(1+uv)(1+u_1v_1)\right]+(u+v)(u_1+v_1)=0,$$

ossia

$$c(X_sX'_s+Y_sY'_s)+Z_sZ'_s=0,$$

che scriveremo meglio per simmetria nel seguente modo:

$$bcX_sX'_s+caY_sY'_s+abZ_sZ'_s=0. \quad (16)$$

4. Nel caso particolare $a=b=c=1$, in cui la quadrica si riduce alla sfera di raggio 1, la trasformazione ultimamente osservata si interpreta così:

Sia S una superficie a curvatura costante positiva, coll'elemento lineare

$$ds^2 = \sinh^2 \omega d\alpha^2 + \cosh^2 \omega d\beta^2, \quad (17)$$

e siano ξ, η, ζ le coordinate di un punto della superficie. Applichiamo alla

superficie S la trasformazione complementare

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \xi - \frac{\sinh \omega_1}{\sinh \omega} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} - \frac{i \cosh \omega_1}{\cosh \omega} \frac{\partial \xi}{\partial \beta}, \\ \eta_1 &= \eta - \frac{\sinh \omega_1}{\sinh \omega} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} - \frac{i \cosh \omega_1}{\cosh \omega} \frac{\partial \eta}{\partial \beta}, \\ \zeta_1 &= \zeta - \frac{\sinh \omega_1}{\sinh \omega} \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} - \frac{i \cosh \omega_1}{\cosh \omega} \frac{\partial \zeta}{\partial \beta}, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ω_1 essendo una soluzione qualunque del sistema completo

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha} &= -i \frac{\partial \omega}{\partial \beta} + \sinh \omega \cosh \omega_1, \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial \beta} &= i \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + i \cosh \omega \sinh \omega_1; \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

otteniamo così una nuova superficie S_1 a curvatura costante positiva coll'elemento lineare

$$ds^2 = \sinh^2 \omega_1 d\alpha^2 + \cosh^2 \omega_1 d\beta^2. \quad (20)$$

La trasformazione di HAZZIDAKIS cangia la coppia di superficie S, S_1 in un'altra coppia $\mathbf{S}, \mathbf{S}_1$; e se X_s, Y_s, Z_s è la soluzione del sistema (3) corrispondente a $\mathbf{S}$, e X'_s, Y'_s, Z'_s quella corrispondente ad $\mathbf{S}_1$; sarà

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \left(\frac{\partial X_s}{\partial \alpha} \right)^2 &= \cosh^2 \omega, \quad \Sigma \frac{\partial X_s}{\partial \alpha} \frac{\partial X_s}{\partial \beta} = 0, \quad \Sigma \left(\frac{\partial X_s}{\partial \beta} \right)^2 = \sinh^2 \omega, \\ \Sigma \left(\frac{\partial X'_s}{\partial \alpha} \right)^2 &= \cosh^2 \omega_1, \quad \Sigma \frac{\partial X'_s}{\partial \alpha} \frac{\partial X'_s}{\partial \beta} = 0, \quad \Sigma \left(\frac{\partial X'_s}{\partial \beta} \right)^2 = \sinh^2 \omega_1. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Ora si verifica, tenendo presenti le (19) e le (6), che si passa dalla soluzione X_s, Y_s, Z_s all'altra X'_s, Y'_s, Z'_s ponendo

$$\left. \begin{aligned} X'_s &= \cosh \omega_1 X_s + i \sinh \omega_1 X_2, \\ Y'_s &= \cosh \omega_1 Y_s + i \sinh \omega_1 Y_2, \\ Z'_s &= \cosh \omega_1 Z_s + i \sinh \omega_1 Z_2, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

donde segue subito la relazione

$$X_s X'_s + Y_s Y'_s + Z_s Z'_s = 0.$$

Dunque denotando con H la trasformazione di HAZZIDAKIS e con B la trasformazione complementare, potremo rappresentare la trasformazione osservata con

$$H^{-1} B H.$$

È dimostrato in ciò che segue che le relazioni (14) e (16) individuano per sè sole le trasformazioni osservate; di più esse sussistono per quadriche generali, ritenendo cioè per a, b, c costanti qualunque.

Passiamo quindi allo studio delle trasformazioni individuate rispettivamente dalle relazioni (14) e (16), trattando d'ora innanzi il problema per quadriche generali.

P A R T E I.

Le trasformazioni individuate dalla relazione (16)

§ II. LE FUNZIONI TRASFORMATRICI.

1. In questo paragrafo stabiliremo un sistema di formole relative alla soluzione X_3, Y_3, Z_3 , del sistema (2) e alla soluzione X'_3, Y'_3, Z'_3 , legata alla prima dalla relazione (16).

Introduciamo secondo il solito le funzioni ausiliarie relative alla soluzione nuova X'_3, Y'_3, Z'_3 ; cioè:

$$E'_0 = \Sigma \left(\frac{\partial X'_3}{\partial \alpha} \right)^2, \quad G'_0 = \Sigma \left(\frac{\partial X'_3}{\partial \beta} \right)^2, \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} X'_1 &= \frac{1}{\sqrt{E'_0}} \frac{\partial X'_3}{\partial \alpha}, & X'_2 &= \frac{1}{\sqrt{G'_0}} \frac{\partial X'_3}{\partial \beta}, \\ Y'_1 &= \frac{1}{\sqrt{E'_0}} \frac{\partial Y'_3}{\partial \alpha}, & Y'_2 &= \frac{1}{\sqrt{G'_0}} \frac{\partial Y'_3}{\partial \beta}, \\ Z'_1 &= \frac{1}{\sqrt{E'_0}} \frac{\partial Z'_3}{\partial \alpha}, & Z'_2 &= \frac{1}{\sqrt{G'_0}} \frac{\partial Z'_3}{\partial \beta}, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

per le quali sussistono le relazioni

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X'_1}{\partial \alpha} &= -\frac{1}{\sqrt{G'_0}} \frac{\partial \sqrt{E'_0}}{\partial \beta} X'_2 - \sqrt{E'_0} X'_3, & \frac{\partial X'_1}{\partial \beta} &= \frac{1}{\sqrt{E'_0}} \frac{\partial \sqrt{G'_0}}{\partial \alpha} X'_2, \\ \frac{\partial X'_2}{\partial \alpha} &= \frac{1}{\sqrt{G'_0}} \frac{\partial \sqrt{E'_0}}{\partial \beta} X'_1, & \frac{\partial X'_2}{\partial \beta} &= -\frac{1}{\sqrt{E'_0}} \frac{\partial \sqrt{G'_0}}{\partial \alpha} X'_1 - \sqrt{G'_0} X'_3, \\ \frac{\partial X'_3}{\partial \alpha} &= \sqrt{E'_0} X'_1, & \frac{\partial X'_3}{\partial \beta} &= \sqrt{G'_0} X'_2, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

colle analoghe in Y e Z .

Indi poniamo

$$b c X_i X'_k + c a Y_i Y'_k + a b Z_i Z'_k = \Psi_{ik}. \quad (26)$$

Avremo subito in base alla (16)

$$\Psi_{33} = 0. \quad (27)$$

Inoltre tenendo conto che le nove funzioni

$$\left. \begin{array}{ccc} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{array} \right\} \quad (28)$$

costituiscono un determinante ortogonale, e così pure le funzioni

$$\left. \begin{array}{ccc} X'_1 & Y'_1 & Z'_1 \\ X'_2 & Y'_2 & Z'_2 \\ X'_3 & Y'_3 & Z'_3 \end{array} \right\} \quad (29)$$

avremo dalle (26)

$$\left. \begin{aligned} b c X'_1 &= \Psi_{11} X_1 + \Psi_{21} X_2 + \Psi_{31} X_3, \\ c a Y'_1 &= \Psi_{11} Y_1 + \Psi_{21} Y_2 + \Psi_{31} Y_3, \\ a b Z'_1 &= \Psi_{11} Z_1 + \Psi_{21} Z_2 + \Psi_{31} Z_3, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$$\left. \begin{aligned} b c X'_2 &= \Psi_{12} X_1 + \Psi_{22} X_2 + \Psi_{32} X_3, \\ c a Y'_2 &= \Psi_{12} Y_1 + \Psi_{22} Y_2 + \Psi_{32} Y_3, \\ a b Z'_2 &= \Psi_{12} Z_1 + \Psi_{22} Z_2 + \Psi_{32} Z_3, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

$$\left. \begin{aligned} b c X'_3 &= \Psi_{13} X_1 + \Psi_{23} X_2, \\ c a Y'_3 &= \Psi_{13} Y_1 + \Psi_{23} Y_2, \\ a b Z'_3 &= \Psi_{13} Z_1 + \Psi_{23} Z_2, \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

$$\left. \begin{aligned} b c X_1 &= \Psi_{11} X'_1 + \Psi_{12} X'_2 + \Psi_{13} X'_3, \\ c a Y_1 &= \Psi_{11} Y'_1 + \Psi_{12} Y'_2 + \Psi_{13} Y'_3, \\ a b Z_1 &= \Psi_{11} Z'_1 + \Psi_{12} Z'_2 + \Psi_{13} Z'_3, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} b c X_2 &= \Psi_{21} X'_1 + \Psi_{22} X'_2 + \Psi_{23} X'_3, \\ c a Y_2 &= \Psi_{21} Y'_1 + \Psi_{22} Y'_2 + \Psi_{23} Y'_3, \\ a b Z_2 &= \Psi_{21} Z'_1 + \Psi_{22} Z'_2 + \Psi_{23} Z'_3, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$$\left. \begin{aligned} b c X_3 &= \Psi_{31} X'_1 + \Psi_{32} X'_2, \\ c a Y_3 &= \Psi_{31} Y'_1 + \Psi_{32} Y'_2, \\ a b Z_3 &= \Psi_{31} Z'_1 + \Psi_{32} Z'_2. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

2. Per mezzo di queste formole possiamo ricavare varie espressioni delle Ψ_{ik} procedendo nel seguente modo.

Derivando la (13) e tenendo presenti le (6) e le (25) otteniamo

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{E'_0} \Psi_{31} + \sqrt{E_0} \Psi_{13} &= 0, \\ \sqrt{G'_0} \Psi_{32} + \sqrt{G_0} \Psi_{23} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (35)^*$$

D'altra parte dalle (32) e (35) quadrando e sommando si ricavano le relazioni

$$\begin{aligned} \Psi_{13}^2 + \Psi_{23}^2 &= b^2 c^2 X_3'^2 + c^2 a^2 Y_3'^2 + a^2 b^2 Z_3'^2, \\ \Psi_{31}^2 + \Psi_{32}^2 &= b^2 c^2 X_3^2 + c^2 a^2 Y_3^2 + a^2 b^2 Z_3^2, \end{aligned}$$

che per la terza del sistema (3) si possono scrivere

$$\begin{aligned} \Psi_{13}^2 + \Psi_{23}^2 &= E'_0 - G'_0, \\ \Psi_{31}^2 + \Psi_{32}^2 &= E_0 - G_0. \end{aligned}$$

Da queste e dalle (35)* troviamo

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{13} &= \sqrt{E'_0}, & \Psi_{23} &= i \sqrt{G'_0}, \\ \Psi_{31} &= -\sqrt{E_0}, & \Psi_{32} &= -i \sqrt{G_0} (*). \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

(*) Delle quantità $\sqrt{E_0}$, $\sqrt{G_0}$, $\sqrt{E'_0}$, $\sqrt{G'_0}$ si intende scelta una determinazione e mantenuta in tutto ciò che segue.

Similmente dalle (33) e (34) quadrando e sommando e tenendo conto delle espressioni trovate di Ψ_{13} , Ψ_{23} otteniamo

$$\Psi_{11}^2 + \Psi_{12}^2 = -E'_0 + b^2 c^2 X_1^2 + c^2 a^2 Y_1^2 + a^2 b^2 Z_1^2, \quad (37)$$

$$\Psi_{21}^2 + \Psi_{22}^2 = G'_0 + b^2 c^2 X_2^2 + c^2 a^2 Y_2^2 + a^2 b^2 Z_2^2. \quad (38)$$

Infine dalle (33) e (35) moltiplicando ordinatamente e sommando troviamo

$$\sqrt{E'_0} \Psi_{11} + i \sqrt{G'_0} \Psi_{12} = -(b^2 c^2 X_1 X_3 + c^2 a^2 Y_1 Y_3 + a^2 b^2 Z_1 Z_3), \quad (39)$$

e similmente

$$\sqrt{E'_0} \Psi_{21} + i \sqrt{G'_0} \Psi_{22} = -(b^2 c^2 X_2 X_3 + c^2 a^2 Y_2 Y_3 + a^2 b^2 Z_2 Z_3). \quad (40)$$

Si vede allora che per mezzo delle (36), (37), (38), (39) e (40) tutte le funzioni Ψ_{ik} sono esprimibili mediante le funzioni $\sqrt{E'_0}$, $\sqrt{G'_0}$, e mediante gli elementi relativi alla soluzione X_3 , Y_3 , Z_3 ; onde daremo alle funzioni $\sqrt{E'_0}$, $\sqrt{G'_0}$, il nome di *funzioni trasformatrici*.

E fin da ora osserviamo che note le funzioni X_3 , Y_3 , Z_3 , e note le funzioni trasformatrici $\sqrt{E'_0}$, $\sqrt{G'_0}$, le nuove funzioni X'_3 , Y'_3 , Z'_3 , sono espresse dalle formole

$$\left. \begin{aligned} X'_3 &= \frac{1}{bc} (\sqrt{E'_0} X_1 + i \sqrt{G'_0} X_2), \\ Y'_3 &= \frac{1}{ca} (\sqrt{E'_0} Y_1 + i \sqrt{G'_0} Y_2), \\ Z'_3 &= \frac{1}{ab} (\sqrt{E'_0} Z_1 + i \sqrt{G'_0} Z_2). \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

3. Fra le funzioni trasformatrici passa una notevole relazione, che si deduce esprimendo che le funzioni X'_3 , Y'_3 , Z'_3 , soddisfano la prima del sistema (2). Essa è della forma

$$A_{11} E'_0 - A_{22} G'_0 + 2i A_{12} \sqrt{E'_0} \sqrt{G'_0} = 1, \quad (42)$$

in cui si è posto

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \frac{X_1^2}{b^2 c^2} + \frac{Y_1^2}{c^2 a^2} + \frac{Z_1^2}{a^2 b^2}, \\ A_{22} &= \frac{X_2^2}{b^2 c^2} + \frac{Y_2^2}{c^2 a^2} + \frac{Z_2^2}{a^2 b^2}, \\ A_{12} &= \frac{X_1 X_2}{b^2 c^2} + \frac{Y_1 Y_2}{c^2 a^2} + \frac{Z_1 Z_2}{a^2 b^2}. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Introducendo ancora le quantità

$$\left. \begin{aligned} A_{33} &= \frac{X_3^2}{b^2 c^2} + \frac{Y_3^2}{c^2 a^2} + \frac{Z_3^2}{a^2 b^2}, \\ A_{13} &= \frac{X_1 X_3}{b^2 c^2} + \frac{Y_1 Y_3}{c^2 a^2} + \frac{Z_1 Z_3}{a^2 b^2}, \\ A_{23} &= \frac{X_2 X_3}{b^2 c^2} + \frac{Y_2 Y_3}{c^2 a^2} + \frac{Z_2 Z_3}{a^2 b^2}, \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

avremo in tutto sei funzioni A_{ik} formate esclusivamente cogli elementi relativi alle funzioni X_3, Y_3, Z_3 , e per l'uso che dovremo farne in seguito stabiliremo le formole che ne esprimono le derivate parziali prime.

A tale scopo basta derivare le (43), osservando le (6) e le (43) stesse, e troviamo così per le derivate richieste le espressioni seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A_{11}}{\partial \alpha} &= -2 \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} A_{12} - 2 \sqrt{E_0} A_{13}, \\ \frac{\partial A_{11}}{\partial \beta} &= 2 \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} A_{12}, \\ \frac{\partial A_{12}}{\partial \alpha} &= \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} (A_{11} - A_{22}) - \sqrt{E_0} A_{23}, \\ \frac{\partial A_{12}}{\partial \beta} &= \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} (A_{22} - A_{11}) - \sqrt{G_0} A_{13}, \\ \frac{\partial A_{13}}{\partial \alpha} &= -\frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} A_{23} + \sqrt{E_0} (A_{11} - A_{33}), \\ \frac{\partial A_{13}}{\partial \beta} &= \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} A_{23} + \sqrt{G_0} A_{12}, \\ \frac{\partial A_{22}}{\partial \alpha} &= 2 \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} A_{12}, \\ \frac{\partial A_{22}}{\partial \beta} &= -2 \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} A_{12} - 2 \sqrt{G_0} A_{23}, \\ \frac{\partial A_{23}}{\partial \alpha} &= \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} A_{13} + \sqrt{E_0} A_{12}, \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A_{23}}{\partial \beta} &= -\frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} A_{13} + \sqrt{G_0} (A_{22} - A_{33}), \\ \frac{\partial A_{33}}{\partial \alpha} &= 2 \sqrt{E_0} A_{13}, \\ \frac{\partial A_{33}}{\partial \beta} &= 2 \sqrt{G_0} A_{23}. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

§ III. IL SISTEMA DIFFERENZIALE PER LE FUNZIONI TRASFORMATRICI.

4. Da quanto abbiamo stabilito nel precedente paragrafo, facilmente si ricava un sistema di equazioni differenziali per le funzioni trasformatrici $\sqrt{E'_0}$, $\sqrt{G'_0}$.

Per formare questo sistema basta esprimere che le funzioni X'_i , Y'_i , Z'_i , date dalle (30), (31) e (32), verificano le relazioni (25).

Derivando la prima delle (33), e sostituendo per le derivate di X_1 , X_2 , X_3 , le loro espressioni date dalle (6) otteniamo

$$\begin{aligned} b \, c \, \frac{\partial X'_3}{\partial \alpha} &= X_1 \frac{\partial \Psi_{13}}{\partial \alpha} + X_2 \frac{\partial \Psi_{23}}{\partial \alpha} - \Psi_{13} \left(\frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} X_2 + \sqrt{E_0} X_3 \right) + \\ &+ \Psi_{23} \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} X_1. \end{aligned}$$

Sostituendo in questa per Ψ_{13} , Ψ_{23} le loro espressioni (36), e tenendo conto che per essa e per la prima delle (30) deve essere soddisfatta la terza delle (25), troviamo

$$\begin{aligned} X_1 \left(\frac{\partial \sqrt{E'_0}}{\partial \alpha} + i \sqrt{G'_0} \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} - \Psi_{11} \sqrt{E'_0} \right) + \\ + i X_2 \left(\frac{\partial \sqrt{G'_0}}{\partial \alpha} + i \sqrt{E'_0} \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} + i \Psi_{21} \sqrt{E'_0} \right) = 0. \end{aligned}$$

Analogamente operando sulla seconda e terza delle (33) perveniamo a due altre relazioni che si deducono da questa scambiando X in Y e poi

in Z , sicchè concludiamo che si dovrà avere separatamente

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sqrt{E'_0}}{\partial \alpha} &= -i \sqrt{G'_0} \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} + \Psi_{11} \sqrt{E'_0}, \\ \frac{\partial \sqrt{G'_0}}{\partial \alpha} &= -i \sqrt{E'_0} \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} - i \Psi_{21} \sqrt{E'_0}. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Allo stesso modo ricaviamo

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sqrt{E'_0}}{\partial \beta} &= i \sqrt{G'_0} \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} + \Psi_{12} \sqrt{G'_0}, \\ \frac{\partial \sqrt{G'_0}}{\partial \beta} &= i \sqrt{E'_0} \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} - i \Psi_{22} \sqrt{G'_0}. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

5. Ciò posto deriviamo la (42), e sostituiamo per le derivate prime delle funzioni $\sqrt{E'_0}$, $\sqrt{G'_0}$, A_{ik} , le loro espressioni date dalle precedenti e dalle (44). Ponendo per brevità

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \sqrt{E'_0} A_{11} + i \sqrt{G'_0} A_{12}, \\ N_2 &= \sqrt{E'_0} A_{21} + i \sqrt{G'_0} A_{22}, \\ N_3 &= \sqrt{E'_0} A_{31} + i \sqrt{G'_0} A_{32}, \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

troviamo con calcoli facili

$$\left. \begin{aligned} N_1 \Psi_{11} + N_2 \Psi_{21} &= N_3 \sqrt{E'_0}, \\ N_1 \Psi_{12} + N_2 \Psi_{22} &= i N_3 \sqrt{G'_0}. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

D'altra parte dalla (37) e dalla (39) si ricava

$$\left. \begin{aligned} (\sqrt{E'_0} \Psi_{12} - i \sqrt{G'_0} \Psi_{11})^2 &= (E'_0 - G'_0) \left[-E'_0 + b^2 c^2 X_1^2 + c^2 a^2 Y_1^2 + a^2 b^2 Z_1^2 \right] \\ &\quad - \left[b^2 c^2 X_1 X_3 + c^2 a^2 Y_1 Y_3 + a^2 b^2 Z_1 Z_3 \right]^2, \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

che si può anche scrivere

$$(\sqrt{E'_0} \Psi_{12} - i \sqrt{G'_0} \Psi_{11})^2 = -a^4 b^4 c^4 \left[E'_0 (A_{11} A_{22} - A_{12}^2) - A_{22} \right];$$

mentre la (42) si può anche scrivere

$$N_2^2 = -E'_0 (A_{11} A_{22} - A_{12}^2) + A_{22}.$$

Quindi deduciamo

$$\sqrt{E_0} \Psi_{12} - i \sqrt{G_0} \Psi_{11} = \varepsilon \alpha^2 b^2 c^2 N_2; \quad (\varepsilon = \pm 1) \quad (50)$$

e da questa e dalle (48) otteniamo

$$\sqrt{E_0} \Psi_{22} - i \sqrt{G_0} \Psi_{21} = -\varepsilon \alpha^2 b^2 c^2 N_1. \quad (51)$$

Ed allora riunendo queste con le (39) e (40) e risolvendo rispetto alle Ψ_{ik} , avremo:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{11} &= \frac{1}{E_0 - G_0} (P_1 \sqrt{E_0} - i \varepsilon \alpha^2 b^2 c^2 \sqrt{G_0} N_2), \\ \Psi_{12} &= \frac{1}{E_0 - G_0} (i P_1 \sqrt{G_0} + \varepsilon \alpha^2 b^2 c^2 \sqrt{E_0} N_2), \\ \Psi_{21} &= \frac{1}{E_0 - G_0} (Q_1 \sqrt{E_0} + i \varepsilon \alpha^2 b^2 c^2 \sqrt{G_0} N_1), \\ \Psi_{22} &= \frac{1}{E_0 - G_0} (i Q_1 \sqrt{G_0} - \varepsilon \alpha^2 b^2 c^2 \sqrt{E_0} N_1), \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

in cui abbiamo posto per brevità

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= -(b^2 c^2 X_1 X_3 + c^2 \alpha^2 Y_1 Y_3 - \alpha^2 b^2 Z_1 Z_3), \\ Q_1 &= -(b^2 c^2 X_2 X_3 + c^2 \alpha^2 Y_2 Y_3 + \alpha^2 b^2 Z_2 Z_3). \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Siamo così condotti al seguente sistema di equazioni differenziali

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sqrt{E'_0}}{\partial \alpha} &= -i \sqrt{G'_0} \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} + \Psi_{11} \sqrt{E'_0}, \\ \frac{\partial \sqrt{G'_0}}{\partial \alpha} &= -i \sqrt{E'_0} \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} - i \Psi_{21} \sqrt{E'_0}, \\ \frac{\partial \sqrt{E'_0}}{\partial \beta} &= i \sqrt{G'_0} \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} + \Psi_{12} \sqrt{G'_0}, \\ \frac{\partial \sqrt{G'_0}}{\partial \beta} &= i \sqrt{E'_0} \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} - i \Psi_{22} \sqrt{G'_0}, \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

(in cui per le Ψ_{ik} si debbono intendere poste le espressioni (52)), che deve essere soddisfatto insieme alla relazione

$$A_{11} E'_0 - A_{22} G'_0 + 2i A_{12} \sqrt{E'_0} \sqrt{G'_0} = 1, \quad (55)$$

delle funzioni trasformatrici.

Notiamo infine che ha luogo identicamente la relazione

$$P_1 N_1 + Q_1 N_2 = N_3 (E_0 - G_0), \quad (56)$$

e che la (55) introducendo le funzioni

$$\left. \begin{aligned} E &= E_0 (a^2 X_1^2 + b^2 Y_1^2 + c^2 Z_1^2), \\ F &= \sqrt{E_0} \sqrt{G_0} (a^2 X_1 X_2 + b^2 Y_1 Y_2 + c^2 Z_1 Z_2), \\ G &= G_0 (a^2 X_2^2 + b^2 Y_2^2 + c^2 Z_2^2), \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

che danno i coefficienti della prima forma quadratica fondamentale della quadrica Q , si può anche scrivere sotto la forma

$$E \cdot \frac{E'_0}{E_0} + 2 F \frac{i \sqrt{E'_0} \sqrt{G'_0}}{\sqrt{E_0} \sqrt{G_0}} - G \frac{G'_0}{G_0} = a^2 b^2 c^2. \quad (58)$$

§ III. TEOREMA FONDAMENTALE.

6. I risultati che abbiamo stabilito fin qui sono stati tutti ricavati in base all'ipotesi dell'esistenza della soluzione X'_3, Y'_3, Z'_3 , del sistema (3) legata alla soluzione X_3, Y_3, Z_3 dalla relazione (16).

Ora dimostreremo inversamente che qualunque sia la soluzione particolare X_3, Y_3, Z_3 , del sistema (3) esistono sempre infinite soluzioni X'_3, Y'_3, Z'_3 , dello stesso sistema legate alla prima dalla relazione (16).

Da quanto abbiamo esposto nel primo paragrafo, conosciamo questo teorema per le quadriche di rotazione; ma qui vogliamo dimostrarlo per quadriche generali, cioè lasciando per a, b, c valori costanti qualsiasi.

Il teorema che vogliamo dimostrare può enunciarsi nel modo seguente:

Se X_3, Y_3, Z_3 , è una soluzione particolare qualunque del sistema (3), il sistema di equazioni differenziali (54) (55) nelle funzioni incognite $\sqrt{E'_0}, \sqrt{G'_0}$ è illimitatamente integrabile. Assumendo una soluzione $\sqrt{E'_0}, \sqrt{G'_0}$ di questo sistema, e ponendo

$$\left. \begin{aligned} X'_3 &= \frac{1}{b c} (\sqrt{E'_0} X_1 + i \sqrt{G'_0} X_2), \\ Y'_3 &= \frac{1}{c a} (\sqrt{E'_0} Y_1 + i \sqrt{G'_0} Y_2), \\ Z'_3 &= \frac{1}{a b} (\sqrt{E'_0} Z_1 + i \sqrt{G'_0} Z_2), \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

avremo una nuova soluzione del sistema (3), contenente una costante arbitraria, e legata alla prima dalla relazione (16).

Infatti osserviamo anzitutto che dalle (52) seguono le (48); quindi dalla prima delle (54) e dalla (55) segue la seconda; e dalla terza delle (54) e dalla (55) segue la quarta ed inversamente.

Inoltre dalle espressioni (52) delle Ψ_{ik} sono soddisfatte le (37), (38), (39) e (40); e si ha pure

$$\Psi_{11} \Psi_{21} + \Psi_{12} \Psi_{22} = -i \sqrt{E'_0} \sqrt{G'_0} + b^2 c^2 X_1 X_2 + c^2 a^2 Y_1 Y_2 + a^2 b^2 Z_1 Z_2,$$

donde per derivazione facilmente si deducono le relazioni seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Psi_{11}}{\partial \alpha} &= -i \Psi_{12} \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} - \Psi_{21} \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} - \Psi_{12} + E_0 - E'_0, \\ \frac{\partial \Psi_{11}}{\partial \beta} &= -i \Psi_{12} \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} + \Psi_{21} \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} - i \Psi_{12} \Psi_{21}, \\ \frac{\partial \Psi_{21}}{\partial \alpha} &= -i \Psi_{22} \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} + \Psi_{11} \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} - \Psi_{12} \Psi_{22} - i \sqrt{E'_0} \sqrt{G'_0}, \\ \frac{\partial \Psi_{21}}{\partial \beta} &= -i \Psi_{22} \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} - \Psi_{11} \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} - i \Psi_{21} \Psi_{22} + \sqrt{E_0} \sqrt{G_0}, \\ \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial \alpha} &= i \Psi_{11} \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} - \Psi_{22} \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} + \Psi_{11} \Psi_{12} + i \sqrt{E'_0} \sqrt{G'_0}, \\ \frac{\partial \Psi_{12}}{\partial \beta} &= i \Psi_{11} \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} + \Psi_{22} \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} + i \Psi_{21} \Psi_{11} - \sqrt{E'_0} \sqrt{G'_0}, \\ \frac{\partial \Psi_{22}}{\partial \alpha} &= i \Psi_{21} \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} + \Psi_{12} \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} + \Psi_{12} \Psi_{21}, \\ \frac{\partial \Psi_{22}}{\partial \beta} &= i \Psi_{21} \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} - \Psi_{12} \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} + i \Psi_{21}^2 + i G_0 - i G'_0. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Tenendo conto di queste e dell'equazione di GAUSS

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial \sqrt{G_0}}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial \beta} \right) + \sqrt{E_0} \sqrt{G_0} = 0,$$

si verifica subito che le condizioni d'integrabilità del sistema (54), (55) sono soddisfatte, sicchè esso sistema è illimitatamente integrabile.

Rimane ancora da dimostrare che le funzioni X'_3, Y'_3, Z'_3 , soddisfano al sistema (3).

A tale scopo insieme alle funzioni X'_3, Y'_3, Z'_3 consideriamo le funzioni X'_1, Y'_1, Z'_1 , e X'_2, Y'_2, Z'_2 , date dalle (30) e (31); in forza delle (54) e delle (60), le funzioni X'_1, X'_2, X'_3 , soddisfano al sistema (25) ed allo stesso sistema soddisfano Y'_1, Y'_2, Y'_3 , e Z'_1, Z'_2, Z'_3 ; inoltre si ha per la (55)

$$X'^2_3 + Y'^2_3 + Z'^2_3 = 1,$$

donde segue subito che il determinante

$$\begin{vmatrix} X'_1 & Y'_1 & Z'_1 \\ X'_2 & Y'_2 & Z'_2 \\ X'_3 & Y'_3 & Z'_3 \end{vmatrix}$$

è ortogonale.

Ed allora avremo dalle (25)

$$\Sigma \left(\frac{\partial X'_3}{\partial \alpha} \right)^2 = E'_0, \quad \Sigma \frac{\partial X'_3}{\partial \alpha} \frac{\partial X'_3}{\partial \beta} = 0, \quad \Sigma \left(\frac{\partial X'_3}{\partial \beta} \right)^2 = G'_0;$$

ma dalle (59) si ha inoltre

$$b^2 c^2 X'^2_3 + c^2 a^2 Y'^2_3 + a^2 b^2 Z'^2_3 = E'_0 - G'_0,$$

dunque le funzioni X'_3, Y'_3, Z'_3 soddisfano al sistema (3); di più risulta dalle (59) stesse che la relazione (16) è verificata.

Nel teorema ora stabilito consiste la trasformazione che volevamo ottenere, la quale è la naturale generalizzazione a quadriche qualunque della trasformazione $H^{-1} B H$ delle superficie applicabili sulla sfera.