Über die Konstruktion des Mittelpunktes eines Kreises mit dem Lineal allein.

(Berichtigung.)

Von

DETLEF CAUER in Göttingen.

Herr F. Schur (Straßburg) hat mich zuerst darauf aufmerksam gemacht, daß die meiner kleinen Abhandlung „Über die Konstruktion des Mittelpunktes eines Kreises mit dem Lineal allein“ (Mathematische Annalen 73, S. 90—94) als Nachtrag angefügte Konstruktion des Herrn J. Großmann für den Fall dreier gegebenen Kreise nicht richtig ist, weil die beiden Kreise durch A und B , welche dort benutzt werden, zusammenfallen. Herr Schur hat freundlichst gestattet, die von ihm gefundene Konstruktion hier mitzuteilen (1.). Später hat auch Herr Mierendorff in Stettin den Großmannschen Fehler nachgewiesen und ebenfalls eine Konstruktion angegeben. Diese gebe ich mit seiner freundlichen Erlaubnis unter 2. wieder; sie führt die Aufgabe zurück auf den Fall von vier Kreisen, für den ich die ursprünglich von mir angegebene Lösung unter 3. gebe. In Absatz 4. weise ich auf die algebraische Behandlung dieser Probleme hin und füge dem noch einige mir von den genannten Herren gemachte Bemerkungen an.

1. *Konstruktion von Herrn Schur.* Es seien drei Kreise K, K_1, K_2 vollständig gegeben, die nicht demselben Büschel angehören; sie mögen im Endlichen gelegene imaginäre Schnittpunkte haben (andernfalls könnte man die Mittelpunkte durch die von mir [l. c. § 3, 2 und 3] angegebenen Konstruktionen finden). Man nehme auf K die Punkte S, A, B, C beliebig an und beziehe das Strahlenbüschel (S) so projektiv auf das Kreisbüschel (K_1, K_2), daß den Strahlen SA, SB, SC die Kreise K_a, K_b, K_c durch A, B, C entsprechen. Die beiden Büschel erzeugen dann eine Kurve dritter Ordnung $\mathcal{C}^{(3)}$ mit folgender Eigenschaft: Die Verbindungslinien der Punktepaare, die die Kegelschnitte durch S, A, B, C noch außer diesen Punkten mit der $\mathcal{C}^{(3)}$ gemeinsam haben, sind parallel. Denn sie gehen durch einen

Punkt nach einem Satz über Kurven dritter Ordnung*); und dieser ist unendlich fern, weil die unendlich ferne Gerade zu den Verbindungslinien gehört. Zwei solche Kegelschnitte sind die Geradenpaare SA, BC und SB, AC . Die Gerade SA schneidet die $\mathfrak{C}^{(3)}$ zum dritten Male in ihrem Schnittpunkt A_1 mit K_a . Den dritten Schnittpunkt A_2 von BC mit der $\mathfrak{C}^{(3)}$ findet man folgendermaßen: Von dem Punkte S aus projiziere man die durch das Büschel (K_1, K_2) auf BC bestimmte Involution auf den Kreis K . Das Zentrum der so entstehenden krummen Involution auf K sei S' ; die Strahlenbüschel S und S' sind dann projektiv und erzeugen einen durch S, B, C gehenden Kegelschnitt, dessen vierter Schnittpunkt mit K in bekannter Weise gefunden wird. Projiziert man ihn dann von S aus auf BC zurück, so hat man den gesuchten Punkt A_2 . — Analog findet man B_1 und B_2 . Die Polaren des unendlich fernen Schnittpunktes von A_1A_2 und B_1B_2 in bezug auf die gegebenen Kreise liefern einen zweiten unendlich fernen Punkt und damit in bekannter Weise die Mittelpunkte.

2. *Konstruktion von Herrn Mierendorff.* Es seien drei Kreise K, K_1, K_2 gegeben, die denselben Bedingungen genügen, wie die unter 1. Man lege durch einen beliebigen Punkt A von K den Kreis K_{12} , der dem Büschel (K_1, K_2) angehört. Man lege nun durch A eine variable Gerade, die K in P und K_{12} in Q zum zweiten Male schneiden möge. Wählt man dann B auf K und C auf K_{12} fest, so beschreibt der Schnittpunkt R von BP und CQ einen Kreis K' , der durch den andern reellen, übrigens noch unbekannten Schnittpunkt von K und K_{12} geht. Die vier Kreise K, K_1, K_{12}, K' sind nun linear unabhängig, da K, K_{12}, K' ein Bündel bestimmen, dem K_1 nicht angehört. Die Mittelpunkte findet man nunmehr nach 3.

3. *Konstruktion für den Fall von vier Kreisen.* Gegeben sind vier linear unabhängige Kreise. Man wähle auf einem von ihnen zwei Punkte und lege durch diese den dem Netze der drei andern angehörenden Kreis. Dann hat man zwei Kreise mit bekannten reellen Schnittpunkten und kann daher die Mittelpunkte durch die in § 3, 2 meiner oben zitierten Note angegebene Konstruktion finden.

4. Ich benutze diese Gelegenheit, um auf die algebraische Behandlung dieser Probleme hinzuweisen. Wäre es möglich, bei zwei Kreisen mit imaginären Schnittpunkten im Endlichen die Mittelpunkte mit dem Lineal allein zu finden, so könnte man auch bei zwei Kegelschnitten, von denen mindestens der eine ganz ausgezogen gedacht wird, und die vier imaginäre

*) S. z. B. Schroeter, *Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung* (1888) S. 60, oder Schröter, *Theorie der Kegelschnitte*, 3. Aufl. (1898) Nr. 343, S. 485, oder Reye, *Die Geometrie der Lage* III⁴, S. 70.

Schnittpunkte haben, deren reelle Verbindungslinien mit dem Lineal allein finden; dies Problem führt aber bekanntlich auf eine irreduzible Gleichung dritten Grades, deren Wurzeln nach der Theorie der algebraischen Gleichungen nicht durch Auflösung von quadratischen und linearen Gleichungen gefunden werden können. Das, worauf es mir damals ankam, war: zu zeigen, daß man mit Benutzung des Hilbertschen Gedankenganges ohne diese Theorie ganz elementar zum Ziel kommt. Diese liefert aber, wie Herr Schur bemerkte, das weitere Resultat, daß auch bei zwei Kreisen mit reellen Schnittpunkten, wenn nur der *eine* als bekannt angesehen wird, die Konstruktion der Mittelpunkte mit dem Lineal allein unmöglich ist; denn auch diesem Problem entspricht eine irreduzible Gleichung dritten Grades.

Herr Mierendorff hat auch bei drei Kreisen den Fall in Betracht gezogen, wo reelle Schnittpunkte vorhanden aber unbekannt sind, und gefunden: Seine Konstruktion der Mittelpunkte bleibt bestehen und versagt nur, wenn alle drei Kreise durch einen Punkt gehen. Algebraisch entspricht dem Falle dreier Kreise im allgemeinen die Bestimmung der beiden gemeinsamen Wurzeln zweier Gleichungen vierten Grades und bekanntlich kann man die quadratische Gleichung, der diese genügen, rational finden. Gehen dagegen die drei Kreise durch einen Punkt, so sind drei gemeinsame Wurzeln vorhanden. Nicht einmal, wenn die drei vierten Schnittpunkte bekannt sind*), kann man die drei gemeinsamen Schnittpunkte und die Mittelpunkte finden. Denn man entnehme aus 2., daß man, wenn zwei Kreise, K und K_1 , gegeben sind, von denen man nur den einen reellen Schnittpunkt A kennt, mit dem Lineal allein alle durch den andern Schnittpunkt gehenden Kreise finden kann; man müßte also auch aus *zwei* Kreisen mit nur einem bekannten Schnittpunkt die Mittelpunkte mit dem Lineal finden können; und daß das nicht möglich ist, wurde schon oben gezeigt.

Hierdurch ist zugleich die Aufgabe aus der projektiven Geometrie erledigt: Die gemeinsame Sehne dreier Kegelschnitte zu konstruieren, wenn bekannt ist, daß sie eine und nur eine solche besitzen.

Göttingen, im August 1913.

*) Übrigens sind diese vierten Schnittpunkte konstruierbar, wenn alle Schnittpunkte unbekannt sind: Man wende die Schursche Konstruktion 1. auf diesen Fall an; dann geht A, B_1 durch den vierten Schnittpunkt von K_1 und K_2 .