Über die Integrabilitätsbedingungen beim Bestehen von Nebenbedingungen.

Von

OSKAR BOLZA in Freiburg i. B.

Die Frage nach den Integrabilitätsbedingungen für den Differentialausdruck

$$(1) \quad P(x, y_1, \dots, y_n) dx + \sum_{i=1}^n Q_i(x, y_1, \dots, y_n) dy_i$$

ist gleichbedeutend mit der Frage nach den Bedingungen, unter welchen der Wert des Integrals

$$(2) \quad J = \int \left\{ P(x, y_1, \dots, y_n) + \sum_{i=1}^n Q_i(x, y_1, \dots, y_n) y'_i \right\} dx \quad \left(y'_i = \frac{dy_i}{dx} \right)$$

vom Integrationsweg unabhängig ist.

In dieser letzteren Form gehört die Aufgabe in das Gebiet der Variationsrechnung, und die Variationsrechnung ist es auch, welche die folgende Verallgemeinerung der Aufgabe nahe legt, die den Gegenstand der folgenden Untersuchung bildet:

Die Bedingungen zu finden, unter welchen das Integral (2) vom Integrationsweg unabhängig ist für alle dieselben Endpunkte verbindenden, ganz in einem gewissen Bereich gelegenen Kurven, *welche außerdem noch einer Anzahl $m < n$ von Nebenbedingungen in der Form von Differentialgleichungen genügen:*

$$(3) \quad \varphi_\beta(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = 0 \\ (\beta = 1, 2, \dots, m).$$

Das Resultat wird folgendes sein:

Wenn $n \geq 2m$, so sind, von gewissen Ausnahmefällen abgesehen, die

Integrabilitätsbedingungen dieselben wie beim Problem ohne Nebenbedingungen, nämlich

$$(4) \quad \frac{\partial P}{\partial y_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q_k}{\partial y_i} = \frac{\partial Q_i}{\partial y_k},$$

$$(i, k = 1, 2, \dots, n).$$

Damit soll nicht gesagt sein, daß der Satz für $n < 2m$ nicht mehr gilt, aber in diesem Fall versagt das benutzte Beweisverfahren.

Die hier behandelte Frage ist von Wichtigkeit für die Theorie des *Hilbertschen Unabhängigkeitssatzes**) für das Lagrangesche Variationsproblem. Man pflegt bei demselben die Bedingungen zu untersuchen, unter welchen der Wert des „Hilbertschen Integrals“ vom Weg unabhängig ist für *alle* dieselben beiden Punkte eines Extremalenfeldes verbindenden Kurven, welche ganz im Felde verlaufen. Dagegen ist für die Anwendung des Unabhängigkeitssatzes zur Aufstellung des Weierstraßschen Fundamentalsatzes nur erforderlich, daß das Hilbertsche Integral für *diejenigen* unter den oben genannten Kurven vom Wege unabhängig ist, welche den Nebenbedingungen des gegebenen Lagrangeschen Problems genügen.

Diese Dissonanz, auf welche kürzlich Herr Radon**) aufmerksam gemacht hat, findet, wenigstens für den Fall $n \geq 2m$ und abgesehen von den erwähnten Ausnahmefällen, ihre Auflösung in dem hier bewiesenen Satz.

§ 1.

Die zugehörigen Lagrangeschen Differentialgleichungen.

Zur Vereinfachung der Schreibweise verabreden wir, daß die Indizes i, j, k stets die Werte $1, 2, \dots, n$ durchlaufen; die Indizes α, β die Werte $1, 2, \dots, m$; die Indizes r, s die Werte $1, 2, \dots, n - m$, sodaß also z. B. eine mit dem Index k versehene Gleichung stets ein System von n Gleichungen repräsentiert, während $\sum_{\beta}^m$ stets für $\sum_{\beta=1}^m$ steht. Ferner schreiben wir

*) Vgl. Bolza, „Vorlesungen über Variationsrechnung“ (Leipzig 1909), im folgenden mit „Vorlesungen“ zitiert, § 78 und die dort angegebene Literatur, zu welcher noch hinzuzufügen ist: Hahn, „Über den Zusammenhang zwischen den Theorien der zweiten Variation und der Weierstraßschen Theorie der Variationsrechnung“, Rend. Cir. Mat. Palermo 29 (1910), S. 49 und Bolza, „Über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz beim Lagrangeschen Variationsproblem“, ibid. 31 (1911), S. 257.

**) „Über das Minimum des Integrals $\int_{s_0}^{s_1} \mathfrak{F}(x, y, \theta, \kappa) ds$ “, Wien. Ak. Ber. 119 (1910), Abt. IIa, S. 1258.

$$(x, y, y') \text{ statt } (x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n'),$$

und analog

$$(x, y, y', y'') \text{ statt } (x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', y_1'', \dots, y_n''),$$

usw.

Wir setzen voraus, daß die Funktionen φ_β dreimal stetig differenzierbar sind in einem Bereich $\mathfrak{L}$ des $x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n'$ -Raumes, die Funktionen P und Q zweimal stetig differenzierbar in der Projektion $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{L}$ in den $x, y_1, \dots, y_n$ -Raum.

Wir verstehen unter einer „zulässigen Kurve“ eine Kurve*) $\mathfrak{C}$ im $x, y_1, \dots, y_n$ -Raum, welche folgende Eigenschaften hat:

a) Sie ist darstellbar in der Form

$$\mathfrak{C}: \quad y_i = y_i(x), \quad x_1 \leq x \leq x_2,$$

wobei die Funktionen $y_i(x)$ eindeutig und zweimal stetig differenzierbar sind in dem zum Kurvenbogen gehörigen Intervall $[x_1 x_2]$.**)

b) Die Kurve

$$\mathfrak{C}': \quad y_i = y_i(x), \quad y_i' = y_i'(x), \quad x_1 \leq x \leq x_2$$

im $x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n'$ -Raum liegt im Innern des Bereiches $\mathfrak{L}$.

c) Die Kurve $\mathfrak{C}$ genügt den m Differentialgleichungen

$$\varphi_\beta(x, y(x), y'(x)) = 0.$$

Nach diesen Verabredungen präzisieren wir unsere Aufgabe des näheren dahin:

Die Bedingungen dafür aufzustellen, daß das Integral

$$J = \int \left\{ P(x, y_1, \dots, y_n) + \sum_i Q_i(x, y_1, \dots, y_n) y_i' \right\} dx$$

denselben Wert besitzt für je zwei zulässige Kurven mit denselben Endpunkten.

Wir nehmen an, das Integral J habe diese Eigenschaft, die wir kurz als „Invarianz“ bezeichnen. Ist dann $\mathfrak{C}$ irgend eine zulässige Kurve, und $\bar{\mathfrak{C}}$ eine zweite mit denselben Endpunkten, so ist

$$J_{\bar{\mathfrak{C}}} = J_{\mathfrak{C}},$$

also a fortiori

$$J_{\bar{\mathfrak{C}}} \geq J_{\mathfrak{C}}.$$

Die Kurve $\mathfrak{C}$ liefert also im Sinn der Variationsrechnung ein (allerdings „uneigentliches“***) Minimum für das Integral J in Beziehung auf die

*) Im Sinn von Kurvenbogen.

**) Statt dessen werden wir in der Folge kürzer sagen, die Kurve $\mathfrak{C}$ sei von der Klasse C'' ; analog definieren wir Kurven der Klasse C''' , C^{IV} , usw.

***) Vgl. „Vorlesungen“, S. 18; auch für das uneigentliche Extremum müssen die Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen erfüllt sein.

Gesamtheit der zulässigen Kurven mit denselben Endpunkten wie $\mathfrak{C}$. Die Kurve $\mathfrak{C}$ muß also die erste notwendige Bedingung für ein Minimum des Integrals J mit den Nebenbedingungen (3) erfüllen. Dies führt nach den Regeln der Variationsrechnung zu dem folgenden Resultat:

Wenn das Integral (2) in dem angegebenen Sinn die Eigenschaft der Invarianz besitzt, so lassen sich jeder zulässigen Kurve $\mathfrak{C}$ eine Konstante*) $l_0 = 0$ oder 1 und m in $[x_1 x_2]$ stetig differentiierbare Multiplikatoren $\lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x)$ zuordnen, derart daß in $[x_1 x_2]$

$$(5) \quad l_0^2 + \sum_{\beta} \lambda_{\beta}^2(x) \equiv 0,$$

$$(3) \quad \varphi_{\beta} = 0,$$

$$(6) \quad \frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_k} = 0,$$

wo

$$F = l_0 \left(P + \sum_i Q_i y'_i \right) + \sum_{\beta} \lambda_{\beta} \varphi_{\beta}.$$

Die Ausführung der angedeuteten Differentiationen ergibt für die Differentialgleichungen (6) die ausgerechnete Form

$$(7) \quad l_0 L_k + \sum_{\beta} G_{\beta k} \lambda_{\beta} - \sum_{\beta} \varphi_{\beta k} \lambda'_{\beta} = 0,$$

wobei

$$L_k = \frac{\partial P}{\partial y_k} - \frac{\partial Q_k}{\partial x} + \sum_i y'_i \left(\frac{\partial Q_i}{\partial y_k} - \frac{\partial Q_k}{\partial y_i} \right),$$

$$G_{\beta k} = \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial y'_k},$$

$$\varphi_{\beta k} = \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial y'_k}.$$

Unser Beweis des im Eingang ausgesprochenen Satzes wird nun darin bestehen, daß wir zeigen, daß im Fall $n \geq 2m$ hieraus im allgemeinen folgt

$$l_0 = 1, \quad \lambda_1(x) \equiv 0, \dots, \lambda_m(x) \equiv 0,$$

also

$$L_k \equiv 0,$$

woraus sich dann, wieder im allgemeinen, die Integrabilitätsbedingungen (4) ergeben.

*) Wegen der Konstanten l_0 vgl. „Vorlesungen“, S. 560.

§ 2.

Ein Hilfssatz.

Dazu bedürfen wir zunächst eines Hilfssatzes. Neben den Differentialgleichungen (3) muß jede zulässige Kurve auch den daraus durch Differentiation hervorgehenden Differentialgleichungen

$$\frac{d\varphi_\beta}{dx} = \sum_i \varphi_{\beta i} y_i'' + \Phi_\beta^{(1)} = 0$$

genügen, wobei $\Phi_\beta^{(1)}$ nur von (x, y, y') abhängt, oder, wie wir sagen wollen, eine „Größe erster Ordnung“ ist; ebenso, falls die Kurve von der Klasse C''' ist, den Differentialgleichungen

$$\frac{d^2\varphi_\beta}{dx^2} = \sum_i \varphi_{\beta i} y_i''' + \Phi_\beta^{(2)} = 0,$$

wo $\Phi_\beta^{(2)}$ eine „Größe zweiter Ordnung“ ist, d. h. nur von (x, y, y', y'') abhängt usw.

Wir beweisen jetzt den folgenden

Hilfssatz: Ist

$$(8) \quad (x_0, \overset{0}{y}, \overset{0}{y}')$$

ein Wertsystem im Inneren des Bereiches $\mathfrak{Z}$, welches den m Gleichungen

$$(9) \quad \varphi_\beta(x_0, \overset{0}{y}, \overset{0}{y}') = 0$$

und der Ungleichung*)

$$(10) \quad ||(\varphi_{\beta i})_0|| \neq 0$$

genügt, und genügt ferner das Wertsystem $(\overset{0}{y}'', \overset{0}{y}''', \dots, \overset{0}{y}^{(p)})$ mit dem Wertsystem (8) zusammen den $m(p-1)$ Gleichungen

$$(11) \quad \left(\frac{d\varphi_\beta}{dx}\right)_0 = 0, \left(\frac{d^2\varphi_\beta}{dx^2}\right)_0 = 0, \dots, \left(\frac{d^{p-1}\varphi_\beta}{dx^{p-1}}\right)_0 = 0,$$

so gibt es stets zulässige Kurven der Klasse $C^{(p)}$, welche die Anfangsbedingungen

$$(12) \quad y_i(x_0) = \overset{0}{y}_i, \quad \left. \frac{dy_i(x)}{dx} \right|_{x_0} = \overset{0}{y}_i', \dots, \left. \frac{d^p y_i(x)}{dx^p} \right|_{x_0} = \overset{0}{y}_i^{(p)}$$

erfüllen.

*) Wenn eine der Funktionen φ_β die Variablen y_i' nicht enthält, so ist es unmöglich, den Ungleichungen (10) zu genügen; dieser Fall ist also von der Betrachtung ausgeschlossen.

Dabei bedeutet der untere Index 0, daß das Wertsystem

$$(x, y, y', \dots, y^{(p)})$$

durch

$$(x_0, \overset{0}{y}, \overset{0}{y}', \dots, \overset{0}{y}^{(p)})$$

zu ersetzen ist, und die Ungleichung (10) soll ausdrücken, daß mindestens eine Determinante m^{ten} Grades der Matrix

$$\|(\varphi_{\beta i})_0\|, \quad (\beta=1, 2, \dots, m; i=1, 2, \dots, n)$$

von Null verschieden ist.

Die Funktionen φ_β sind hierbei als p -mal stetig differenzierbar vorauszusetzen.

Zum Beweise sei z. B. die Determinante

$$(13) \quad |(\varphi_{\beta \alpha})_0| \neq 0;$$

dann wählen wir für die $n - m$ Funktionen y_{m+r} irgend welche den Anfangsbedingungen

$$y_{m+r}(x_0) = \overset{0}{y}_{m+r}, \quad \left. \frac{dy_{m+r}(x)}{dx} \right|^{x_0} = \overset{0}{y}'_{m+r}, \dots, \left. \frac{d^p y_{m+r}(x)}{dx^p} \right|^{x_0} = \overset{0}{y}^{(p)}_{m+r}$$

genügende, in der Umgebung von x_0 p -mal stetig differenzierbare Funktionen und setzen diese Funktionen an Stelle der y_{m+r} in die m Differentialgleichungen

$$(14) \quad \frac{d^{p-1} \varphi_\beta}{dx^{p-1}} \equiv \sum_i \varphi_{\beta i} y_i^{(p)} + \Phi_\beta^{(p-1)} = 0$$

ein. Das so erhaltene System von m Differentialgleichungen mit den m unbekannten Funktionen $y_1, \dots, y_m$ können wir dann wegen der Voraussetzung (13) mit den Anfangsbedingungen

$$y_\alpha(x_0) = \overset{0}{y}_\alpha, \quad \left. \frac{dy_\alpha(x)}{dx} \right|^{x_0} = \overset{0}{y}'_\alpha, \dots, \left. \frac{d^{p-1} y_\alpha(x)}{dx^{p-1}} \right|^{x_0} = \overset{0}{y}^{(p-1)}_\alpha$$

integrieren. Aus der Voraussetzung

$$\left(\frac{d^{p-1} \varphi_\beta}{dx^{p-1}} \right)_0 = 0$$

folgt dann wegen (13), daß die erhaltene Lösung überdies noch der weiteren Anfangsbedingung

$$\left. \frac{d^p y_\alpha(x)}{dx^p} \right|^{x_0} = \overset{0}{y}^{(p)}_\alpha$$

genügt. Durch Integration von (14) folgt jetzt, daß das so erhaltene Funktionensystem $y_i(x)$ den n Gleichungen

$$\frac{d^{p-2} \varphi_\beta}{dx^{p-2}} = C_{\beta, p-2}$$

genügt, wobei die Größen $C_{\beta, p-2}$ Integrationskonstanten sind, die sich nach (11) sämtlich gleich Null ergeben.

Durch Wiederholung dieses Schlusses kommt man zuletzt zu dem Resultat, daß

$$\varphi_{\beta} = 0.$$

Da überdies der Punkt $(x, \overset{0}{y}, \overset{0}{y}')$ im Inneren des Bereiches $\mathfrak{I}$ vorausgesetzt ist, so stellt das Funktionensystem $y_i(x)$, wenigstens in einer gewissen Umgebung der Stelle x_0 , in der Tat eine zulässige Kurve dar, welche den vorgeschriebenen Anfangsbedingungen (13) genügt.

Eine solche Kurve nennen wir *eine zu den Anfangswerten*

$$(x_0, \overset{0}{y}, \overset{0}{y}', \dots, \overset{0}{y}^{(p)})$$

gehörige zulässige Kurve.

§ 3.

Beweis des Hauptsatzes.

Wir schreiben jetzt die Gleichungen (7) an für $k=1, 2, \dots, m, m+r$ und eliminieren aus diesen $m+1$ Gleichungen die Größen $\lambda'_1, \dots, \lambda'_m$. Definieren wir die Determinanten $\Delta, \Delta_{\alpha}^r$ durch die Identität

$$\begin{vmatrix} u_{m+r}, & \varphi_{1,m+r}, & \dots, & \varphi_{m,m+r} \\ u_1, & \varphi_{11}, & \dots, & \varphi_{m,1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_m & \varphi_{1m}, & \dots, & \varphi_{mm} \end{vmatrix} \equiv \Delta u_{m+r} + \sum_{\alpha} \Delta_{\alpha}^r u_{\alpha},$$

und setzen

$$(15) \quad \begin{cases} A_r = \Delta L_{m+r} + \sum_{\alpha} \Delta_{\alpha}^r L_{\alpha}, \\ B_{r\beta} = \Delta G_{\beta, m+r} + \sum_{\alpha} \Delta_{\alpha}^r G_{\beta\alpha}, \end{cases}$$

so lautet das Resultat der Elimination

$$(16) \quad l_0 A_r + B_{r1} \lambda_1 + \dots + B_{rm} \lambda_m = 0.$$

Im Fall der Invarianz des Integrals J müssen also auch diese $n-m$ Gleichungen von jeder zulässigen Kurve mit ihren zugehörigen Multiplikatoren erfüllt sein.

Wir setzen ausdrücklich voraus, daß

$$n \geq 2m,$$

sodaß in (16) die Zahl der Gleichungen nicht kleiner ist als die Zahl der Funktionen λ_{β} .

Es sei jetzt wie in § 2 $(x_0, \overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{y}')$ ein Wertsystem im Innern des Bereiches $\mathfrak{X}$, welches den m Gleichungen (9) und der Ungleichung (10) genügt; es sei z. B. wieder (13) erfüllt. Wenn wir dann der Ungleichung (10) noch eine gewisse weitere Ungleichung

$$(17) \quad R(x_0, \overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{y}') \neq 0,$$

die wir weiter unten näher betrachten werden, hinzufügen, so ist es möglich, n Werte $\overset{\circ}{y}_i''$ so zu wählen, daß sie den m Gleichungen

$$(18) \quad \left(\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x}\right)_0 \equiv \sum_i (\varphi_{\beta i})_0 \overset{\circ}{y}_i'' + (\Phi_\beta^{(1)})_0 = 0$$

und gleichzeitig der Ungleichung

$$(19) \quad \|(B_{r\beta})_0\| \neq 0$$

genügen, welche wieder bedeuten soll, daß mindestens eine Determinante n^{ten} Grades der Matrix von Null verschieden ist.

Zu einem diesen Bedingungen genügenden System von Anfangswerten gibt es dann nach § 2 unendlich viele zugehörige zulässige Kurven. Wir zeigen zunächst: *Für alle diese zulässigen Kurven ist $l_0 = 1$, und die Multiplikatoren und ihre ersten Ableitungen haben für alle dieselben Anfangswerte $\lambda_\beta(x_0)$, $\lambda'_\beta(x_0)$.*

Denn ist $\mathfrak{C}$ irgend eine dieser Kurven und von der Klasse C''' , so gelten für sie und ihre Multiplikatoren λ_β die Gleichungen (16). Gleichzeitig folgt aus (19) und der Stetigkeit der Funktionen $B_{r\beta}$, daß in einer gewissen Umgebung $[x_1 x_2]$ von x_0 auch

$$\|B_{r\beta}\| \neq 0.$$

Wäre daher $l_0 = 0$, so würde aus den Gleichungen (16) folgen, daß sämtliche Multiplikatoren $\lambda_\beta(x)$ in $[x_1 x_2]$ identisch verschwinden, was wegen (5) nicht möglich ist; es ist also $l_0 \neq 0$, und somit

$$(20) \quad l_0 = 1.$$

Ist ferner $\overline{\mathfrak{C}}$ eine zweite zu denselben Anfangswerten $(x_0, \overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{y}', \overset{\circ}{y}'')$ gehörige zulässige Kurve der Klasse C''' , und unterscheiden wir die auf $\overline{\mathfrak{C}}$ bezüglichen Größen durch Überstreichen von den auf $\mathfrak{C}$ bezüglichen, so ist auch für diese Kurve $\overline{l}_0 = 1$, und weiter ist, da die Größen A_r , $B_{r\beta}$ in der in § 2 eingeführten Terminologie von nicht höherer als der zweiten Ordnung sind,

$$(21) \quad (\overline{A}_r)_0 = (A_r)_0, \quad (\overline{B}_{r\beta})_0 = (B_{r\beta})_0.$$

Subtrahieren wir daher die beiden auf die Kurven $\mathfrak{C}$ und $\overline{\mathfrak{C}}$ bezüglichen Gleichungen (16) voneinander, nachdem wir in ihnen $x = x_0$ gesetzt haben, so folgt

$$\sum_{\beta} (B_{r\beta})_0 [\bar{\lambda}_{\beta}(x_0) - \lambda_{\beta}(x_0)] = 0$$

und daher wegen (19)

$$(22) \quad \bar{\lambda}_{\beta}(x_0) = \lambda_{\beta}(x_0).$$

Schreiben wir endlich die beiden auf die Kurven $\mathfrak{C}$ und $\bar{\mathfrak{C}}$ bezüglichen Gleichungen (7) an und setzen darin $x = x_0$, so ist

$$(\bar{L}_k)_0 = (L_k)_0, \quad (\bar{G}_{\beta k})_0 = (G_{\beta k})_0, \quad (\bar{\varphi}_{\beta k})_0 = (\varphi_{\beta k})_0,$$

woraus mit Rücksicht auf (20) und (22) folgt

$$\sum_{\beta} (\varphi_{\beta k})_0 [\bar{\lambda}'_{\beta}(x_0) - \lambda'_{\beta}(x_0)] = 0,$$

also wegen (13)

$$(23) \quad \bar{\lambda}'_{\beta}(x_0) = \lambda'_{\beta}(x_0).$$

Wir haben jetzt noch die Ableitung der Ungleichung (17) nachzutragen. Angenommen, es wäre bei festgehaltenem $(x_0, \overset{0}{y}, \overset{0}{y}')$

$$\|(B_{r\beta})_0\| = 0$$

(d. h. alle Determinanten m^{ten} Grades dieser Matrix wären gleich Null) für alle Wertsysteme $\overset{0}{y}_i''$, welche den m Gleichungen (18) genügen. Aus der Definition (15) der Größen $B_{r\beta}$ folgt, daß wir schreiben können

$$(24) \quad B_{r\beta} = \sum_i C_{r\beta i} y_i'' + B_{r\beta}^{(1)};$$

dabei ist

$$C_{r\beta i} = - \left\{ \Delta \frac{\partial^2 \varphi_{\beta}}{\partial y'_{m+r} \partial y'_i} + \sum_{\alpha} \Delta_{\alpha}^r \frac{\partial^2 \varphi_{\beta}}{\partial y'_{\alpha} \partial y'_i} \right\},$$

und die $B_{r\beta}^{(1)}$ sind, ebenso wie die $C_{r\beta i}$, Größen erster Ordnung.

Wir greifen jetzt irgend eine der Determinanten m^{ten} Grades der Matrix

$$(25) \quad \|(B_{r\beta})_0\|$$

heraus. Dieselbe ist eine ganze Funktion m^{ten} Grades der Größen $\overset{0}{y}_i''$, die wir mit

$$D^v(\overset{0}{y}_1'', \dots, \overset{0}{y}_n'')$$

bezeichnen. Wir lösen dann die m Gleichungen (18) nach $\overset{0}{y}_1'', \dots, \overset{0}{y}_m''$ auf und setzen die erhaltenen Werte in D^v ein. Das Resultat ist eine ganze Funktion m^{ten} Grades der Größen $\overset{0}{y}_{m+1}'', \dots, \overset{0}{y}_n''$, die nunmehr identisch für alle Werte dieser Größen verschwinden muß. Es muß also insbesondere auch das Aggregat der Glieder m^{ter} Dimension in dieser ganzen Funktion, das wir mit

$$E^v(\overset{0}{y}_{m+1}'', \dots, \overset{0}{y}_n'')$$

bezeichnen, identisch verschwinden, d. h. es müssen die Koeffizienten von E'' einzeln verschwinden, was wir schreiben

$$E_1'' = 0, E_2'' = 0, \dots, E_{q''}'' = 0.$$

Dies führen wir für sämtliche Determinanten m^{ten} Grades der Matrix (25) aus und setzen dann

$$R(x_0, \overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{y}') = \sum_{\nu} \{ (E_1'')^2 + (E_2'')^2 + \dots + (E_{q''}')^2 \}.$$

Dann ist

$$R(x_0, \overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{y}') = 0$$

eine notwendige Bedingung dafür, daß die sämtlichen Determinanten m^{ten} Grades der Matrix (25) für alle den Gleichungen (18) genügenden Wertsysteme $\overset{\circ}{y}_i''$ verschwinden. Wenn also*)

$$(17) \quad R(x_0, \overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{y}'') \neq 0,$$

so können wir die $\overset{\circ}{y}_i''$ so wählen, daß gleichzeitig die Gleichungen (18) und die Ungleichung (19) erfüllt sind.

Hieran knüpfen wir noch folgende Bemerkung, von der wir weiter unten Gebrauch zu machen haben werden:

Die oben mit E'' bezeichnete Funktion kann man auch folgendermaßen berechnen: Nach (24) erhält man das Aggregat der Glieder höchster Dimension der Determinante D'' , indem man jedes Element $(B_{r\beta})_0$ der Determinante durch

$$\sum_i (C_{r\beta i})_0 \overset{\circ}{y}_i''$$

ersetzt. In der so erhaltenen homogenen Funktion m^{ten} Grades der $\overset{\circ}{y}_i''$ ersetze man dann $\overset{\circ}{y}_1'', \dots, \overset{\circ}{y}_m''$ durch die aus der Auflösung der m homogenen linearen Gleichung

$$\sum_i (\varphi_{\beta i})_0 \overset{\circ}{y}_i'' = 0$$

erhaltenen homogenen linearen Funktionen von $\overset{\circ}{y}_{m+1}'', \dots, \overset{\circ}{y}_n''$. Das Resultat ist die Funktion E'' .

Daraus folgt zugleich, daß

$$R(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{y}') = 0$$

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß

*) Sobald eine der Funktionen φ_{β} in den Größen $\overset{\circ}{y}_i'$ linear ist, so sind für den betreffenden Wert von β sämtliche Größen $(C_{r\beta i})_0 = 0$, also ist dann stets

$$R(x_0, \overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{y}') = 0;$$

auch dieser Fall ist also von der Betrachtung ausgeschlossen.

$$\left\| \sum_i (C_{r\beta i})_0 \eta_i \right\| = 0$$

für alle den m Gleichungen

$$(26) \quad \sum_i (\varphi_{\beta i})_0 \eta_i = 0$$

genügenden Wertsysteme $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$.

Ist daher

$$R(\overset{0}{x}, \overset{0}{y}, \overset{0}{y}') \neq 0,$$

so kann man n Größen $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ so wählen, daß sie den m Gleichungen (26) genügen und gleichzeitig der Ungleichung

$$(27) \quad \left\| \sum_i (C_{r\beta i})_0 \eta_i \right\| \neq 0.$$

Wir zeigen jetzt weiter: *Unter denselben Voraussetzungen über das System von Anfangswerten*

$$(x_0, \overset{0}{y}, \overset{0}{y}', \overset{0}{y}'')$$

ist für jede zugehörige zulässige Kurve

$$(28) \quad \lambda_1(x_0) = 0, \lambda_2(x_0) = 0, \dots, \lambda_m(x_0) = 0.$$

Denn durch Differentiation von (16) folgt, daß die oben mit $\mathfrak{E}$ bezeichnete Kurve mit ihren Multiplikatoren auch den $n - m$ Differentialgleichungen

$$A'_r + \sum_{\beta} B_{r\beta} \lambda'_{\beta} + \sum_{\beta} B'_{r\beta} \lambda_{\beta} = 0$$

genügen muß und ebenso die Kurve $\overline{\mathfrak{E}}$ den entsprechenden Differentialgleichungen

$$\bar{A}'_r + \sum_{\beta} \bar{B}_{r\beta} \bar{\lambda}'_{\beta} + \sum_{\beta} \bar{B}'_{r\beta} \bar{\lambda}_{\beta} = 0.$$

Wir setzen in beiden $x = x_0$, und subtrahieren die erste von der zweiten. Beachten wir dabei, daß

$$(\bar{A}'_r)_0 = (A'_r)_0,$$

da die Funktionen A'_r Größen zweiter Ordnung sind, so erhalten wir mit Rücksicht auf (21), (22) und (23)

$$(29) \quad \sum_{\beta} [(\bar{B}'_{r\beta})_0 - (B'_{r\beta})_0] \lambda_{\beta}(x_0) = 0.$$

Nun ist aber nach (24)

$$B'_{r\beta} = \sum_i C_{r\beta i} y_i''' + B_{r\beta}^{(2)},$$

wo die $B_{r\beta}^{(2)}$ Größen zweiter Ordnung sind. Ebenso ist

$$\bar{B}'_{r\beta} = \sum_i \bar{C}_{r\beta i} \bar{y}_i''' + \bar{B}_{r\beta}^{(2)}.$$

Setzen wir jetzt $x = x_0$, so wird

$$(\bar{C}_{r\beta i})_0 = (C_{r\beta i})_0, \quad (\bar{B}_{r\beta}^{(2)})_0 = (B_{r\beta}^{(2)})_0.$$

Wenn wir also

$$\bar{y}_i'''(x_0) - y_i'''(x_0) = \eta_i$$

setzen, so geht (29) über in

$$(30) \quad \sum_{\beta} \left[\sum_i (C_{r\beta i})_0 \eta_i \right] \lambda_{\beta}(x_0) = 0.$$

Nun können wir aber, nachdem die Kurve $\mathfrak{C}$ gewählt ist, immer noch die Kurve $\bar{\mathfrak{C}}$ so wählen, daß

$$(27) \quad \left\| \sum_i (C_{r\beta i})_0 \eta_i \right\| \neq 0.$$

Denn zunächst können wir, wie oben gezeigt wurde, wegen der Voraussetzung (17) n Größen η_i so wählen, daß sie den Gleichungen (26) und der Ungleichung (27) genügen. Sodann können wir nach dem Hilfssatz von § 2 die Kurve $\bar{\mathfrak{C}}$ so wählen, daß

$$\bar{y}_i'''(x_0) = y_i'''(x_0) + \eta_i$$

wird, da ja aus den von der Kurve $\mathfrak{C}$ erfüllten Gleichungen

$$\left(\frac{d^2 \varphi_{\beta}}{dx^2} \right)_0 \equiv \sum_{\beta} (\varphi_{\beta i})_0 y_i'''(x_0) + (\Phi_{\beta}^{(2)})_0 = 0$$

zusammen mit (26) folgt, daß auch

$$\left(\frac{d^2 \bar{\varphi}_{\beta}}{dx^2} \right)_0 \equiv \sum_{\beta} (\varphi_{\beta i})_0 \bar{y}_i'''(x_0) + (\Phi_{\beta}^{(2)})_0 = 0$$

Ist aber die Kurve $\bar{\mathfrak{C}}$ so gewählt, daß (27) erfüllt ist, so folgen die zu beweisenden Gleichungen (28) unmittelbar aus (30).

Weiter folgt jetzt leicht: *Die Funktionen $\lambda_{\beta}(x)$ verschwinden nicht nur im Punkt x_0 , sondern sie sind identisch gleich Null in einer gewissen Umgebung dieser Stelle.*

Denn nach den gemachten Stetigkeitsannahmen folgt aus den Ungleichungen (10) und (19), daß auch in einer gewissen Umgebung der Stelle x_0 entlang der Kurve $\mathfrak{C}$

$$\|\varphi_{\beta i}\| \neq 0, \quad \|B_{r\beta}\| \neq 0.$$

Ist daher x_1 ein Wert von x in hinreichender Nähe von x_0 , so genügt das Wertsystem

$$(x_1, y(x_1), y'(x_1), y''(x_1))$$

denselben Bedingungen, die wir oben von dem Wertsystem

$$(x_0, \overset{0}{y}, \overset{0}{y}', \overset{0}{y}'')$$

als erfüllt vorausgesetzt haben. Es folgt also genau in derselben Weise wie dort, daß auch

$$\lambda_1(x_1) = 0, \lambda_2(x_1) = 0, \dots, \lambda_m(x_1) = 0,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Aus dem identischen Verschwinden der Funktionen λ_β in einer gewissen Umgebung der Stelle x_0 folgt aber weiter, daß in derselben Umgebung auch die Ableitungen λ'_β identisch verschwinden.

Jetzt zeigen aber die Gleichungen (7), da $l_0 = 1$, daß

$$L_k \equiv 0$$

in derselben Umgebung von x_0 , insbesondere also im Punkt x_0 selbst, d. h. es müssen die n Gleichungen

$$(31) \quad \left(\frac{\partial P}{\partial y_k} - \frac{\partial Q_k}{\partial x} \right)_0 + \sum_i y'_i \left(\frac{\partial Q_i}{\partial y_k} - \frac{\partial Q_k}{\partial y_i} \right)_0 = 0$$

erfüllt sein.

Um hieraus weitere Folgerungen zu ziehen, ersetzen wir unter Festhaltung von x_0 und y'_i das Wertsystem y'_i durch ein benachbartes $y'_i + h$, und erhalten dann durch Anwendung des letzten Resultates auf das Wertsystem

$$(x_0, y, y' + h)$$

und Subtraktion das Resultat: Jedes hinreichend kleine Wertsystem der h , welches den m Gleichungen

$$(32) \quad \varphi_\beta(x_0, y, y' + h) = 0$$

genügt, genügt im Fall der Invarianz des Integrals J auch den n Gleichungen

$$(33) \quad \sum_i \left(\frac{\partial Q_i}{\partial y_k} - \frac{\partial Q_k}{\partial y_i} \right)_0 h_i = 0.$$

Wir wollen zunächst den Fall $m = 1$ betrachten, wo wir also nur eine einzige Gleichung

$$(34) \quad \varphi(x_0, y, y' + h) = 0$$

haben, und wo die Voraussetzung (13) übergeht in

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'_1} \right)_0 \neq 0.$$

Hier können wir $h_2, h_3, \dots, h_n$ willkürlich wählen und alsdann h_1 nach dem Dinischen Satz über implizite Funktionen aus (34) bestimmen; da aber die erste der Gleichungen (33) h_1 überhaupt nicht enthält, so folgt hieraus

$$\left(\frac{\partial Q_i}{\partial y_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial y_i} \right)_0 = 0.$$

Auf Grund dieser Gleichungen fällt jetzt aber auch aus den folgenden

$n - 1$ Gleichungen (33) h_1 ganz heraus, und es folgt daher wegen der Willkürlichkeit der Größen $h_2, \dots, h_n$, daß allgemein

$$\left(\frac{\partial Q_i}{\partial y_k} - \frac{\partial Q_k}{\partial y_i}\right)_0 = 0,$$

woraus dann schließlich wegen (31) folgt, daß auch

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y_k} - \frac{\partial Q_k}{\partial x}\right)_0 = 0.$$

Im Fall $m = 1$ folgt also aus den Gleichungen (31) *ausnahmslos*, daß die gewöhnlichen Integrabilitätsbedingungen (4) im Punkt $x_0, y_1^0, \dots, y_n^0$ erfüllt sein müssen.

Für $m > 1$ gilt dasselbe zwar auch noch „im allgemeinen“, es sind aber gewisse Ausnahmefälle denkbar. Die Gleichungen (32) stellen nämlich in diesem Fall eine unter Berücksichtigung von (10) $(n - m)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ im Gebiet der Variablen $h_1, \dots, h_n$ dar. Sind jetzt nicht sämtliche Differenzen

$$\left(\frac{\partial Q_i}{\partial y_k} - \frac{\partial Q_k}{\partial y_i}\right)_0$$

gleich Null, so möge q der Rang der aus diesen n^2 Größen gebildeten Determinante sein. Dann stellen die Gleichungen (33) eine *lineare* $(n - q)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{L}$ im Gebiet derselben Variablen $h_1, \dots, h_n$ dar, und im Fall der Invarianz des Integrals J muß die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ ganz in dieser linearen Mannigfaltigkeit enthalten sein. Das ist überhaupt nur möglich, wenn $q \leq m$, und auch dann nur in Ausnahmefällen, welche im allgemeinen bereits durch die Voraussetzung (17) ausgeschlossen sind. Denn wenn $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{L}$ enthalten ist, wird man im allgemeinen eine Anzahl der Gleichungen (3) durch in den y_i' lineare Gleichungen ersetzen können, es wird also stets $R(x_0, y^0, y') = 0$ sein.*)

Hiermit sind wir aber zu folgendem, bereits im Eingang kurz erwähnten Schlußergebnis gekommen:

Soll das Integral

$$J = \int \left\{ P(x, y_1, \dots, y_n) + \sum_i Q_i(x, y_1, \dots, y_n) y_i' \right\} dx$$

denselben Wert besitzen für je zwei dieselben Endpunkte verbindende, ganz in einem Bereich $\mathfrak{S}$ gelegene Kurven der Klasse C' , welche den m Differentialgleichungen

$$(3) \quad \varphi_\beta(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = 0$$

genügen, so müssen, wenn

$$n \geq 2m,$$

*) Vgl. S. 542, Fußnote.

im allgemeinen die Größen P, Q_i in $\mathfrak{S}$ denselben Integrabilitätsbedingungen

$$(4) \quad \frac{\partial P}{\partial y_k} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q_i}{\partial y_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial y_i}$$

genügen, wie wenn die Nebenbedingungen (3) gar nicht vorhanden wären.

Eine Ausnahme kann nur stattfinden für solche Wertsysteme $x_0, y_1^0, \dots, y_n^0$, denen sich kein Wertsystem $y_1', \dots, y_n'$ derart zuordnen läßt, daß die Ungleichungen (10) und (17) befriedigt sind, ferner für solche Wertsysteme $x_0, y_1^0, \dots, y_n^0$, für welche das durch die m Gleichungen

$$\varphi_\beta(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0, y_1', \dots, y_n') = 0$$

im Raum der Variablen $y_1', \dots, y_n'$ definierte Gebilde in einer linearen Mannigfaltigkeit von wenigstens $n - m$ Dimensionen gelegen ist.

Diese Ausnahmefälle treten stets ein, sobald eine der Funktionen φ_β die Variablen $y_1', \dots, y_n'$ entweder gar nicht oder nur linear*) enthält.

Über die erwähnten Ausnahmefälle, sowie über den Fall $n < 2m$ geben unsere Entwicklungen keinen Aufschluß.

Freiburg i. B., den 7. Mai 1911.

*) Ein Beispiel eines solchen Ausnahmefalles, in welchem die Nebenbedingungen linear sind, habe ich in der Note „Über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz, zweite Mitteilung“ (Rend. Circ. Mat. Palermo 32 (1911), S. 111) behandelt.